



Arithmétique

Sommaire

ACTIVITÉ — SITUATION INITIALE : Le jeu de Juniper-Green	88
LA LEÇON	93
FICHE D'EXERCICES : — Arithmétique	94
I Division euclidienne, diviseurs et multiples	98
II Nombres premiers et décomposition	98
III Critères de divisibilité	98
ÉVALUATION — Theme	99
Notes de fin de chapitre	104



LE JEU DE JUNIPER-GREEN

CINQUIÈME



SITUATION INITIALE

Le jeu de Juniper-Green a été inventé par Richard Porteus en 1996 pour aider des enfants de l'école primaire à manipuler les tables de multiplication. Ce jeu porte le nom de l'école. Il a été popularisé par le mathématicien Ian Stewart dans un article du magazine Pour la Science au mois de juillet 1997. L'activité ci-dessous est librement inspiré de cet article.

1. Vous allez tester le jeu de Juniper-Green 50 avec votre voisin, voici les règles :

Règle n° 1 : Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 50;

Règle n° 2 : Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 50 vérifiant les deux conditions suivantes :

- Ce nombre entier n'a pas encore été choisi dans cette partie;
- Ce nombre entier est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.

Règle n° 3 : Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre camarade en utilisant les grilles de jeu fournies.

Écrire ci-dessous une stratégie qui vous paraît gagnante à ce jeu ?

2. On modifie la première règle de la manière suivante :

Règle n° 1 : Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier **pair** compris entre 1 et 50;

Refaire quelques parties avec votre voisin en utilisant cette règle.

Écrire ci-dessous une nouvelle stratégie qui vous paraît gagnante ?

3. Vous allez passer au jeu de Juniper-Green 100, voici les règles :

Règle n° 1 : Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier pair compris entre 1 et 100;

Règle n° 2 : Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :

- Ce nombre entier n'a pas encore été choisi dans cette partie;
- Ce nombre entier est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.

Règle n° 3 : Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre camarade en utilisant les grilles de jeu fournies.

Écrire ci-dessous une stratégie qui vous paraît gagnante à ce jeu ?

4. Juniper-Green en mode « collaboratif »

Vous n'êtes plus obligé de commencer par un nombre pair.

Dans ce mode, votre objectif, à deux, est d'obtenir la partie de Juniper-Green la plus longue possible.

4.a. Déterminer avec votre camarade, une partie de Juniper-Green 50 la plus longue possible.

4.b. Déterminer avec votre camarade, une partie de Juniper-Green 100 la plus longue possible.

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :

PARTIE DE JUNIPER-GREEN 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Faire la liste ci-dessous des nombres entiers de votre partie de Juniper-Green.
Changer de couleurs de stylo pour différencier chaque partenaire.
Cocher les nombres entiers déjà utilisés dans le tableau ci-contre.

Nombre de termes :



SITUATION INITIALE



LE JEU DE JUNIPER-GREEN — Correction





SITUATION INITIALE



INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

Mes intentions pédagogiques.

LA LEÇON





EXERCICE N° 1 : Un partage équitable



La légende raconte que le grand général chinois Han Xin, vers 200 avant notre ère, comptait ses soldats de la manière suivante :

- En rangeant les soldats par 3, il en reste 2 non rangés;
- En les rangeant par 5, il en reste 4;
- En les rangeant par 7, il en reste 5.

On se demande combien de soldats au minimum ce général avait devant lui quand il a effectué ces comptes.

Sans utiliser la calculatrice et en justifiant votre raisonnement, répondre aux questions suivantes :

1. Y avait-il 284 soldats devant lui ?
2. Y avait-il 362 soldats devant lui ?
3. Y avait-il 341 soldats devant lui ?
4. Montrer qu'il y avait 299 soldats devant lui.

Ce problème est connu depuis de plus de deux mille ans, on le retrouve dans le Sunzi Suanjing un traité de mathématiques du troisième siècle de notre ère. Ce résultat est connu aujourd'hui sous le nom de théorème des restes chinois.

EXERCICE N° 2 : Les bus se rencontrent toujours deux fois



Catriona, Malvina et Sorcha sont trois amies chauffeurs de bus.

Elles partent toutes les trois de l'arrêt des Fontaines Étroites à 7h00 le matin.

Catriona conduit le bus de la ligne 132, elle repasse par son point de départ toutes les 28 minutes.

Malvina conduit le bus de la ligne 167, elle repasse par son point de départ toutes les 35 minutes.

Sorcha conduit le bus de la ligne 287, elle repasse par son point de départ toutes les 30 minutes.

1. Expliquer pourquoi Catriona et Malvina vont se retrouver à l'arrêt des Fontaines Étroites au bout de 140 minutes.
2. Expliquer pourquoi Malvina et Sorcha vont se retrouver au point de départ à 10h30.
3. Vont-elles se retrouver toutes les trois au point de départ à la même heure avant la fin de leurs services à 15h00 ?

EXERCICE N° 3 : Un apprentissage chez le chocolatier



Fraser fait son apprentissage chez un grand chocolatier à Grenade. Ce matin son patron lui demande de constituer des sachets de chocolats mélangés, des oeufs au chocolat blanc, des cloches au chocolat au lait et des lapins au chocolat noir. La consigne est très précise, il doit constituer **un maximum de sachets sans qu'il ne reste un seul chocolat à la fin.**

La production en chocolat de la semaine est constituée de 576 oeufs, 792 cloches et 984 lapins.

1. Fraser décide qu'il va placer 20 oeufs par sachets, 30 cloches et 40 lapins.

Combien de sachets va-t-il constituer en s'y prenant de cette manière ?

Aura-t-il respecté la consigne donnée par son patron ?

2. Il se demande aussi s'il ne devrait pas faire 36 sachets.

Combien d'oeufs, de cloches et de lapins doit-il placer dans chaque sachet ?

Aura-t-il respecté la consigne donnée par son patron ?

3. En vous aidant de votre calculatrice, faire la liste des :

- 21 diviseurs de 576
- 24 diviseurs de 792
- 16 diviseurs de 984

4. En observant la liste des diviseurs précédente, indiquer combien de sachets devrait faire Fraser et combien d'oeufs, de cloches et de lapins devrait contenir chaque sachet.

La légende raconte que le grand général chinois Han Xin, vers 200 avant notre ère, comptait ses soldats de la manière suivante :

- En rangeant les soldats par 3, il en reste 2 non rangés;
- En les rangeant par 5, il en reste 4;
- En les rangeant par 7, il en reste 5.

On se demande combien de soldats au minimum ce général avait devant lui quand il a effectué ces comptes.

Sans utiliser la calculatrice et en justifiant votre raisonnement, répondre aux questions suivantes :

1. Y avait-il 284 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 284 & 3 \\ - 27 & 94 \\ \hline 14 & \\ - 12 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$284 = 3 \times 94 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 284 & 5 \\ - 25 & 56 \\ \hline 34 & \\ - 30 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$284 = 5 \times 56 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 284 & 7 \\ - 28 & 40 \\ \hline 04 & \\ - 0 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$284 = 7 \times 40 + 4$$

Il n'y a donc pas 284 soldats devant lui!

2. Y avait-il 362 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 362 & 3 \\ - 3 & 120 \\ \hline 06 & \\ - 6 & \\ \hline 02 & \\ - 0 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$362 = 3 \times 120 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 362 & 5 \\ - 35 & 72 \\ \hline 12 & \\ - 10 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$362 = 5 \times 72 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 362 & 7 \\ - 35 & 51 \\ \hline 12 & \\ - 7 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$362 = 7 \times 51 + 5$$

Il n'y a donc pas 362 soldats devant lui!

3. Y avait-il 341 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 341 & 3 \\ - 3 & 113 \\ \hline 04 & \\ - 3 & \\ \hline 11 & \\ - 9 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$341 = 3 \times 113 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 341 & 5 \\ - 30 & 68 \\ \hline 41 & \\ - 40 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$341 = 5 \times 68 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 341 & 7 \\ - 28 & 48 \\ \hline 61 & \\ - 56 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$341 = 7 \times 48 + 5$$

Il n'y a donc pas 341 soldats devant lui!

4. Montrer qu'il y avait 299 soldats devant lui.

$$\begin{array}{r|l} 299 & 3 \\ - 27 & 99 \\ \hline 29 & \\ - 27 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$299 = 3 \times 99 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 5 \\ - 25 & 59 \\ \hline 49 & \\ - 45 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$299 = 5 \times 59 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 7 \\ - 28 & 42 \\ \hline 19 & \\ - 14 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$299 = 7 \times 42 + 5$$

Il n'y a donc bien 299 soldats devant lui au minimum.

$$3 \times 5 \times 7 = 105.$$

$$\text{Or } \begin{array}{r|l} 299 & 105 \\ - 210 & 2 \\ \hline 89 & \end{array}$$

Donc $299 = 2 \times 105 + 89$

89 est la plus petite solution de ce problème.

$$\begin{array}{r|l} 89 & 3 \\ - 6 & 29 \\ \hline 29 & \\ - 27 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$89 = 3 \times 29 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ - 5 & 17 \\ \hline 39 & \\ - 35 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$89 = 5 \times 17 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 89 & 7 \\ - 7 & 12 \\ \hline 19 & \\ - 14 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$89 = 7 \times 12 + 5$$

Les autres solutions sont les nombres dont la division entière par 105 ont pour reste 89.

C'est le théorème des restes chinois qui permet d'obtenir ces solutions.



EXERCICE N° 2

CORRECTION

1. Expliquer pourquoi Catriona et Malvina vont se retrouver à l'arrêt des Fontaines Étroites au bout de 140 minutes.

Il faut observer une partie de la liste des multiples de 28 et 35 :

— 28 : 28 — 56 — 84 — 112 — 140 — 168

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175

Catriona et Malvina vont bien se retrouver dans 140 minutes.

2. Expliquer pourquoi Malvina et Sorcha vont se retrouver au point de départ à 10h30.

Il faut observer une partie de la liste des multiples de 35 et 30 :

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175 — 210 — 245

— 30 : 30 — 60 — 90 — 120 — 150 — 180 — 210 — 240

Malvina et Sorcha vont se retrouver dans 210 min. Or $210 = 3 \times 60 + 30$. Elles se retrouveront dans 3 h 30 min à 10 h 30 min.

3. Vont-elles se retrouver toutes les trois au point de départ à la même heure avant la fin de leurs services à 15h00.

Il faut maintenant observer les multiples communs des trois nombres.

— 28 : 28 — 56 — 84 — 112 — 140 — 168 — 196 — 224 — 252 — 280 — 308 — 336 — 364 — 392 — 420 — 448

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175 — 210 — 245 — 280 — 315 — 350 — 385 — 420 — 455

— 30 : 30 — 60 — 90 — 120 — 150 — 180 — 210 — 240 — 270 — 300 — 330 — 360 — 390 — 420 — 450

Elles vont se retrouver dans 420 min. Comme $420 = 7 \times 60$, elles se retrouveront dans 7 h, à 14 h.



EXERCICE N° 3

CORRECTION

1. Fraser décide qu'il va placer 20 oeufs par sachets, 30 cloches et 40 lapins.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 20 \\ - 40 & 28 \\ \hline 176 & \\ - 160 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

$$576 = 20 \times 28 + 16$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 30 \\ - 60 & 26 \\ \hline 192 & \\ - 180 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$792 = 30 \times 26 + 12$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 40 \\ - 80 & 24 \\ \hline 184 & \\ - 160 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

$$984 = 40 \times 24 + 24$$

On constate qu'il ne pourra réaliser que 24 sachets, le quotient le plus petit.

En plus, il restera des chocolats sans sachet. La consigne n'est pas réalisée.

2. Il se demande aussi s'il ne devrait pas faire 36 sachets.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 36 \\ - 36 & 16 \\ \hline 216 & \\ - 216 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$576 = 36 \times 16$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 36 \\ - 72 & 22 \\ \hline 72 & \\ - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$792 = 36 \times 22$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 36 \\ - 72 & 27 \\ \hline 264 & \\ - 252 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$984 = 36 \times 27 + 12$$

Il pourrait placer 16 œufs, 22 cloches et 27 lapins, mais il resterait des lapins, la consigne n'est pas suivie!

3. En vous aidant de votre calculatrice, faire la liste des :

- 21 diviseurs de 576 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 32; 36; 48; 64; 72; 96; 144; 192; 288; 576
- 24 diviseurs de 792 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 11; 12; 18; 22; 24; 33; 36; 44; 66; 72; 88; 99; 132; 198; 264; 396; 792
- 16 diviseurs de 984 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24; 41; 82; 123; 164; 246; 328; 492; 984

4. En observant la liste des diviseurs précédente, indiquer combien de sachets devrait faire Fraser et combien d'œufs, de cloches et de lapins devrait contenir chaque sachet.

On constate que 24 est le plus grand diviseur commun.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 24 \\ - 48 & 24 \\ \hline 96 & \\ - 96 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$576 = 24 \times 24$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 24 \\ - 72 & 33 \\ \hline 72 & \\ - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$792 = 24 \times 33$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 24 \\ - 96 & 41 \\ \hline 24 & \\ - 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$984 = 24 \times 41$$

Fraser pourra faire 24 sachets contenant 24 œufs, 33 cloches et 41 lapins.



I — Division euclidienne, diviseurs et multiples

II — Nombres premiers et décomposition

III — Critères de divisibilité





Exercice n° 1 : Question de cours

(2 points)



Faire la liste, sur votre copie, de tous les nombres premiers inférieurs à 30.

Exercice n° 2 : Le cinéma

(4 points)

Pour ce problème, vous devez poser les opérations sur votre copie et faire des phrases réponses.

Les 157 élèves de cinquième du collège de Castelnau se rendent au cinéma.
La salle de cinéma comprend 182 places réparties en 14 rangées.



1. Combien il y a-t-il de fauteuils dans chaque rangée de ce cinéma ?
2. Les élèves se sont installés les uns à côtés des autres, sans aucune place disponible depuis le premier rang.
Combien de rangées sont complètement vides ?
Combien de places sont disponibles sur la dernière rangée occupée ?

Exercice n° 3 : Diviseurs et multiples

(4 points)



1. Faire la liste de tous les diviseurs de 96, de 84 et de 29.



2. Faire la liste des multiples de 19 compris entre 2024 et 2100.

Exercice n° 4 : Une après-midi devant nos écrans

(4 points)

Ma soeur et moi avons décidé de passer une après-midi entière, chacun devant nos tablettes à regarder nos animés préférés.

Nous commençons à 14h et convenons de cesser quand chacun de nos épisodes s'arrêtera exactement au même moment.

Ma soeur regarde Demon Slayer, chaque épisode dure 24 minutes.

Moi, je préfère My Hero Academia, chaque épisode dure 14 minutes.

À quelle heure les épisodes de nos deux séries cesseront au même moment pour la première fois ?

Exercice n° 5 : Les macarons

(6 points)

Arthur est en stage chez un pâtissier.

Celui-ci vient de préparer 240 macarons au caramel et 288 macarons à la framboise.

Il lui demande de constituer **un maximum de lots, tous identiques, sans qu'il ne reste aucun macaron.**



1. Arthur commence par préparer des lots contenant 6 macarons au caramel et 8 à la framboise.
A-t-il réalisé correctement la commande ? Justifier votre réponse.



2. Arthur décide de préparer des 24 lots.
A-t-il réalisé correctement la commande ? Justifier votre réponse.



3.a. Faire la liste des 20 diviseurs de 240 et des 16 diviseurs de 288.

3.b. Combien de lots au maximum Arthur pourra-t-il faire ?

3.c. Dans ce cas, combien de macarons de chaque sorte doit-il placer dans un lot ?

NOM :

PRÉNOM :

Classe :

COMPÉTENCES ET SAVOIRS FAIRE	MI	MF	MS	TB
Effectuer et interpréter une division euclidienne				
Comprendre et utiliser la notion de diviseur				
Comprendre et utiliser la notion de multiple				

COMMENTAIRES :



Évaluation — CORRECTION



EXERCICE N° 1

CORRECTION

Question de cours

Faire la liste, sur votre copie, de tous les nombres premiers inférieurs à 30.

2 — 3 — 5 — 7 — 11 — 13 — 17 — 19 — 23 — 29



EXERCICE N° 2

CORRECTION

Le cinéma

1. Combien il y a-t-il de fauteuil dans chaque rangée de ce cinéma?

$$\begin{array}{r|l} 182 & 14 \\ - 14 & 13 \\ \hline 42 & \\ - 42 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Il y a 13 fauteuils par rangée.

2. Les élèves se sont installés les uns à côtés des autres, sans aucune place disponible depuis le premier rang.

Combien de rangées sont complètement vide?

Combien de places sont disponibles sur la dernière rangée occupée?

$$\begin{array}{r|l} 157 & 13 \\ - 13 & 12 \\ \hline 27 & \\ - 27 & \\ \hline 26 & \\ - 26 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Il y a 12 rangées pleines, une avec 1 élèves et 12 places vides et un rangée entièrement vide.



EXERCICE N° 3

CORRECTION

Diviseurs et multiples

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 96, de 84 et de 29.

96 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 12 — 16 — 24 — 32 — 48 — 96

84 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 14 — 24 — 28 — 48 — 84

29 : 1 — 29

2. Faire la liste des multiples de 19 compris entre 2024 et 2100.

$$\begin{array}{r|l} 2024 & 19 \\ - 19 & 106 \\ \hline 12 & \\ - 12 & \\ \hline 0 & \\ - 124 & \\ - 114 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Donc $107 \times 19 = 2033$ est le premier. $108 \times 19 = 2052$, $109 \times 19 = 2071$, $110 \times 19 = 2090$ le dernier.



EXERCICE N° 4

CORRECTION

Une après-midi devant nos écrans

Ma soeur et moi avons décidé de passer une après-midi entière, chacun devant nos tablettes à regarder nos animés préférés.

Nous commençons à 14h et convenons de cesser quand chacun de nos épisodes s'arrêtera exactement au même moment.

Ma soeur regarde Demon Slayer, chaque épisode dure 24 minutes.

Moi, je préfère My Hero Academia, chaque épisode dure 14 minutes.

À quelle heure les épisodes de nos deux séries cesseront au même moment pour la première fois?

Il faut faire la liste des multiples de 24 et 14 jusqu'à trouver un multiple commun.

24 : 24 — 48 — 72 — 96 — 120 — 144 — 168 — 192

14 : 14 — 28 — 42 — 56 — 70 — 84 — 98 — 112 — 126 — 140 — 154 — 168 — 182

Nous terminerons dans 168 minutes soit 2 h 48 min, à 16 h 48 min



EXERCICE N° 5

CORRECTION

Les macarons

Arthur est en stage chez un pâtissier. Celui-ci vient de préparer 240 macarons au caramel et 288 macarons à la framboise. Il lui demande de constituer **un maximum de lots, tous identiques, sans qu'il ne reste aucun macaron.**

1. Arthur commence par préparer des lots contenant 6 macarons au caramel et 8 à la framboise.

A-t-il réalisé correctement la commande ? Justifier votre réponse.

$$\begin{array}{r|l} 240 & 6 \\ \hline 24 & 40 \\ \hline 00 & \\ -0 & \\ \hline 0 & \end{array} \text{ et } \begin{array}{r|l} 288 & 8 \\ \hline 24 & 36 \\ \hline 48 & \\ -48 & \\ \hline 0 & \end{array} \text{ donc il ne pourrait faire que 36 sachets identiques.}$$

2. Arthur décide de préparer des 24 lots.

A-t-il réalisé correctement la commande ? Justifier votre réponse.

$$\begin{array}{r|l} 240 & 24 \\ \hline 24 & 10 \\ \hline 00 & \\ -0 & \\ \hline 0 & \end{array} \text{ et } \begin{array}{r|l} 288 & 12 \\ \hline 24 & 12 \\ \hline 48 & \\ -48 & \\ \hline 0 & \end{array} \text{ donc il pourrait faire que 24 sachets identiques avec 10 macarons au caramel et 12 à la framboise.}$$

3.a. Faire la liste des 20 diviseurs de 240 et des 16 diviseurs de 288.

240 : 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 8 — 10 — 12 — 15 — 16 — 20 — 24 — 30 — 40 — **48** — 60 — 80 — 120 — 240

288 : 1 — 2 — 3 — 4 — 6 — 8 — 12 — 16 — 18 — 24 — 36 — **48** — 72 — 96 — 144 — 288

3.b. Combien de lots au maximum Arthur pourra-t-il faire ?

Il pourra faire 48 lots

3.c. Dans ce cas, combien de macarons de chaque sorte doit-il placer dans un lot ?

240 = 48 × 5 et 288 = 48 × 6 donc il pourra faire 48 lots avec 5 macarons au caramel et 6 macarons à la framboise.





ARITHMÉTIQUE

Division euclidienne, diviseurs, multiples, nombres premiers



DEFINITION : LA DIVISION EUCLIDIENNE

a et b deux nombres entiers naturels, b différent de zéro.

Il existe un unique couple de nombre entiers, q et r , vérifiant :

$$a = b \times q + r \text{ où } 0 \leq r < b$$

On dit que l'on a effectué la **division euclidienne** de a par b .

a est le **dividende**, b est le **diviseur**, q est le **quotient** et r est le **reste**.

EXEMPLES :

$$\begin{array}{r|l} 2024 & 7 \\ \hline 14 & 289 \\ -62 & \\ \hline 56 & \\ -64 & \\ \hline 63 & \\ -1 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$2024 = 7 \times 289 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 2024 & 11 \\ \hline 11 & 184 \\ -92 & \\ \hline 88 & \\ -44 & \\ \hline 44 & \\ -44 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$2024 = 11 \times 184$$

$$\begin{array}{r|l} 12040 & 3 \\ \hline 12 & 4013 \\ -00 & \\ \hline 0 & \\ -04 & \\ \hline 3 & \\ -10 & \\ \hline 9 & \\ -9 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$12040 = 3 \times 4013 + 1$$

VOCABULAIRE

Quand le reste de la division de a par b vaut zéro, on a $a = b \times q$.

On dit que a est **divisible** par b , que b est un **diviseur** de a et que a est un **multiple** de b .

REMARQUE IMPORTANTE :

Tous les nombres entiers naturels sont divisibles par 1.

Tous les nombres entiers naturels sont divisibles par eux-mêmes.

EXEMPLES :

Comme $2024 = 11 \times 184$,

— 2024 est **divisible** par 11;

— 2024 est **divisible** par 184;

— 2024 est un **multiple** de 11;

— 2024 est un **multiple** de 184;

— 11 est un **diviseur** de 2024;

— 184 est un **diviseur** de 2024.

LES CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Un nombre est **divisible par 2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Un nombre est **divisible par 5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

EXEMPLES :

2024 est divisible par 2, car son chiffre des unités est 4.

2024 n'est pas divisible par 3 ni par 9, car $2 + 0 + 2 + 4 = 7$ n'est ni un multiple de 3 ni de 9.

123 456 789 est divisible par 9, car $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ est un multiple de 9, il est par conséquent divisible par 3.

67 890 est divisible par 5 et par 2 puisque son chiffre des unités est 0, il est ainsi divisible par 10.

MÉTHODE : DÉTERMINER LES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER :

Déterminons la liste des diviseurs du nombre 96.

Pour cela on teste tous les nombres entiers à partir de 1. On écrit à chaque fois les deux diviseurs obtenus, un au début de la ligne, l'autre à la fin. On continue jusqu'à épuisement des nombres disponibles, quand le début et la fin de la ligne se rejoignent.

1 et 96 sont évidemment deux diviseurs de 96.

96 est divisible par 2, on a $96 = 2 \times 48$. 96 est divisible par 3 et $96 = 3 \times 32$

96 est divisible par 4, $96 = 4 \times 24$. 96 est divisible par 6, $96 = 6 \times 16$

96 est divisible par 8, $96 = 8 \times 12$. 96 n'est divisible ni par 9, ni par 10, ni par 11 : on a terminé!

Les diviseurs de 96 : **1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 8 - 12 - 16 - 24 - 32 - 48 - 96**

EXEMPLES :

1. Un numismate possède 68 pièces en or et 102 pièces en argent. Il souhaite faire un maximum de lots, tous identiques, sans qu'il ne reste une seule pièce. Comment doit-il s'y prendre?

Il faut pour cela déterminer le **plus grand diviseur commun** des nombres 68 et 102.

Les diviseurs de 68 : **1 - 2 - 4 - 17 - 34 - 68**

Les diviseurs de 102 : **1 - 2 - 3 - 6 - 17 - 34 - 51 - 102**

Le **plus grand diviseur commun** de 68 et 102 est 34. Comme $68 = 34 \times 2$ et que $102 = 34 \times 3$, il peut faire 34 lots constitués chacun de 2 pièces d'or et 3 pièces d'argent.

2. Une course caritative propose a des équipes de coureurs de se relayer autour d'un stade. L'équipe de Raisa fait un tour en 48 s, celle de Tudor en 56 s. La course doit durer 6h, combien de fois l'équipe de Raisa va-t-elle doubler celle de Tudor?

Il faut déterminer les **multiples communs** aux nombres 48 et 56.

Les multiples de 48 : **48 - 96 - 144 - 192 - 240 - 288 - 336 - 384**

Les multiples de 56 : **56 - 112 - 168 - 224 - 280 - 336 - 392**

336 est le **plus petit multiples commun** aux nombres 48 et 56.

Cela signifie que toutes les $336 s = 5 \times 60 s + 36 s = 5 \text{ min } 36 s$, l'équipe de Raisa va doubler celle de Tudor.

Comme $6 h = 6 \times 3600 s = 21600 s$ et que $2600 s \div 336 s \approx 64,3$, cela va se produire 64 fois.

DEFINITION : LES NOMBRES PREMIERS

Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs**, un et lui-même.

REMARQUE IMPORTANTE :

1 n'est pas un nombre premier, il n'a qu'un seul diviseur, lui-même!

LISTE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 30 :

2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29

Remarques et intentions pédagogiques

¹Ce raisonnement suppose que la relation d'ordre « être supérieur ou égal à » est compatible avec l'addition sur l'ensemble des nombres réels.

INFORMATIONS LÉGALES

- **Auteur** : Fabrice ARNAUD
- **Web** : pi.ac3j.fr
- **Mail** : contact@ac3j.fr
- **Dernière modification** : 2 avril 2025 à 6:55

Ce document a été écrit pour L^AT_EX avec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTeX 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprenant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code définit un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

LICENCE CC BY-NC-SA 4.0



Attribution Pas d'Utilisation Commerciale Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

- Partager** — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
- Adapter** — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

- Attribution** — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.
- Pas d'Utilisation Commerciale** — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.
- Partage dans les Mêmes Conditions** — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les mêmes conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.
- Pas de restrictions complémentaires** — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Œuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr>

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été créé par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 2 avril 2025 à 6:55.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : <https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college>.