

LA LEÇON





EXERCICE N° 1 : Un partage équitable



La légende raconte que le grand général chinois Han Xin, vers 200 avant notre ère, comptait ses soldats de la manière suivante :

- En rangeant les soldats par 3, il en reste 2 non rangés;
- En les rangeant par 5, il en reste 4;
- En les rangeant par 7, il en reste 5.

On se demande combien de soldats au minimum ce général avait devant lui quand il a effectué ces comptes.

Sans utiliser la calculatrice et en justifiant votre raisonnement, répondre aux questions suivantes :

1. Y avait-il 284 soldats devant lui ?
2. Y avait-il 362 soldats devant lui ?
3. Y avait-il 341 soldats devant lui ?
4. Montrer qu'il y avait 299 soldats devant lui.

Ce problème est connu depuis de plus de deux mille ans, on le retrouve dans le Sunzi Suanjing un traité de mathématiques du troisième siècle de notre ère. Ce résultat est connu aujourd'hui sous le nom de théorème des restes chinois.

EXERCICE N° 2 : Les bus se rencontrent toujours deux fois



Catriona, Malvina et Sorcha sont trois amies chauffeurs de bus.

Elles partent toutes les trois de l'arrêt des Fontaines Étroites à 7h00 le matin.

Catriona conduit le bus de la ligne 132, elle repasse par son point de départ toutes les 28 minutes.

Malvina conduit le bus de la ligne 167, elle repasse par son point de départ toutes les 35 minutes.

Sorcha conduit le bus de la ligne 287, elle repasse par son point de départ toutes les 30 minutes.

1. Expliquer pourquoi Catriona et Malvina vont se retrouver à l'arrêt des Fontaines Étroites au bout de 140 minutes.
2. Expliquer pourquoi Malvina et Sorcha vont se retrouver au point de départ à 10h30.
3. Vont-elles se retrouver toutes les trois au point de départ à la même heure avant la fin de leurs services à 15h00 ?

EXERCICE N° 3 : Un apprentissage chez le chocolatier



Fraser fait son apprentissage chez un grand chocolatier à Grenade. Ce matin son patron lui demande de constituer des sachets de chocolats mélangés, des oeufs au chocolat blanc, des cloches au chocolat au lait et des lapins au chocolat noir. La consigne est très précise, il doit constituer **un maximum de sachets sans qu'il ne reste un seul chocolat à la fin.**

La production en chocolat de la semaine est constituée de 576 oeufs, 792 cloches et 984 lapins.

1. Fraser décide qu'il va placer 20 oeufs par sachets, 30 cloches et 40 lapins.

Combien de sachets va-t-il constituer en s'y prenant de cette manière ?

Aura-t-il respecté la consigne donnée par son patron ?

2. Il se demande aussi s'il ne devrait pas faire 36 sachets.

Combien d'oeufs, de cloches et de lapins doit-il placer dans chaque sachet ?

Aura-t-il respecté la consigne donnée par son patron ?

3. En vous aidant de votre calculatrice, faire la liste des :

- 21 diviseurs de 576
- 24 diviseurs de 792
- 16 diviseurs de 984

4. En observant la liste des diviseurs précédente, indiquer combien de sachets devrait faire Fraser et combien d'oeufs, de cloches et de lapins devrait contenir chaque sachet.

La légende raconte que le grand général chinois Han Xin, vers 200 avant notre ère, comptait ses soldats de la manière suivante :

- En rangeant les soldats par 3, il en reste 2 non rangés;
- En les rangeant par 5, il en reste 4;
- En les rangeant par 7, il en reste 5.

On se demande combien de soldats au minimum ce général avait devant lui quand il a effectué ces comptes.

Sans utiliser la calculatrice et en justifiant votre raisonnement, répondre aux questions suivantes :

1. Y avait-il 284 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 284 & 3 \\ - 27 & 94 \\ \hline 14 & \\ - 12 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$284 = 3 \times 94 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 284 & 5 \\ - 25 & 56 \\ \hline 34 & \\ - 30 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$284 = 5 \times 56 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 284 & 7 \\ - 28 & 40 \\ \hline 04 & \\ - 0 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$284 = 7 \times 40 + 4$$

Il n'y a donc pas 284 soldats devant lui!

2. Y avait-il 362 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 362 & 3 \\ - 3 & 120 \\ \hline 06 & \\ - 6 & \\ \hline 02 & \\ - 0 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$362 = 3 \times 120 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 362 & 5 \\ - 35 & 72 \\ \hline 12 & \\ - 10 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$362 = 5 \times 72 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 362 & 7 \\ - 35 & 51 \\ \hline 12 & \\ - 7 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$362 = 7 \times 51 + 5$$

Il n'y a donc pas 362 soldats devant lui!

3. Y avait-il 341 soldats devant lui ?

$$\begin{array}{r|l} 341 & 3 \\ - 3 & 113 \\ \hline 04 & \\ - 3 & \\ \hline 11 & \\ - 9 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$341 = 3 \times 113 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 341 & 5 \\ - 30 & 68 \\ \hline 41 & \\ - 40 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$341 = 5 \times 68 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 341 & 7 \\ - 28 & 48 \\ \hline 61 & \\ - 56 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$341 = 7 \times 48 + 5$$

Il n'y a donc pas 341 soldats devant lui!

4. Montrer qu'il y avait 299 soldats devant lui.

$$\begin{array}{r|l} 299 & 3 \\ - 27 & 99 \\ \hline 29 & \\ - 27 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$299 = 3 \times 99 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 5 \\ - 25 & 59 \\ \hline 49 & \\ - 45 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$299 = 5 \times 59 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 299 & 7 \\ - 28 & 42 \\ \hline 19 & \\ - 14 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$299 = 7 \times 42 + 5$$

Il n'y a donc bien 299 soldats devant lui au minimum.

$$3 \times 5 \times 7 = 105.$$

$$\text{Or } \begin{array}{r|l} 299 & 105 \\ - 210 & 2 \\ \hline 89 & \end{array}$$

Donc $299 = 2 \times 105 + 89$

89 est la plus petite solution de ce problème.

$$\begin{array}{r|l} 89 & 3 \\ - 6 & 29 \\ \hline 29 & \\ - 27 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$89 = 3 \times 29 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ - 5 & 17 \\ \hline 39 & \\ - 35 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$89 = 5 \times 17 + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 89 & 7 \\ - 7 & 12 \\ \hline 19 & \\ - 14 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$89 = 7 \times 12 + 5$$

Les autres solutions sont les nombres dont la division entière par 105 ont pour reste 89.

C'est le théorème des restes chinois qui permet d'obtenir ces solutions.



EXERCICE N° 2

CORRECTION

1. Expliquer pourquoi Catriona et Malvina vont se retrouver à l'arrêt des Fontaines Étroites au bout de 140 minutes.

Il faut observer une partie de la liste des multiples de 28 et 35 :

— 28 : 28 — 56 — 84 — 112 — 140 — 168

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175

Catriona et Malvina vont bien se retrouver dans 140 minutes.

2. Expliquer pourquoi Malvina et Sorcha vont se retrouver au point de départ à 10h30.

Il faut observer une partie de la liste des multiples de 35 et 30 :

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175 — 210 — 245

— 30 : 30 — 60 — 90 — 120 — 150 — 180 — 210 — 240

Malvina et Sorcha vont se retrouver dans 210 min. Or $210 = 3 \times 60 + 30$. Elles se retrouveront dans 3 h 30 min à 10 h 30 min.

3. Vont-elles se retrouver toutes les trois au point de départ à la même heure avant la fin de leurs services à 15h00.

Il faut maintenant observer les multiples communs des trois nombres.

— 28 : 28 — 56 — 84 — 112 — 140 — 168 — 196 — 224 — 252 — 280 — 308 — 336 — 364 — 392 — 420 — 448

— 35 : 35 — 70 — 105 — 140 — 175 — 210 — 245 — 280 — 315 — 350 — 385 — 420 — 455

— 30 : 30 — 60 — 90 — 120 — 150 — 180 — 210 — 240 — 270 — 300 — 330 — 360 — 390 — 420 — 450

Elles vont se retrouver dans 420 min. Comme $420 = 7 \times 60$, elles se retrouveront dans 7 h, à 14 h.



EXERCICE N° 3

CORRECTION

1. Fraser décide qu'il va placer 20 oeufs par sachets, 30 cloches et 40 lapins.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 20 \\ - 40 & 28 \\ \hline 176 & \\ - 160 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

$$576 = 20 \times 28 + 16$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 30 \\ - 60 & 26 \\ \hline 192 & \\ - 180 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$792 = 30 \times 26 + 12$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 40 \\ - 80 & 24 \\ \hline 184 & \\ - 160 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

$$984 = 40 \times 24 + 24$$

On constate qu'il ne pourra réaliser que 24 sachets, le quotient le plus petit.

En plus, il restera des chocolats sans sachet. La consigne n'est pas réalisée.

2. Il se demande aussi s'il ne devrait pas faire 36 sachets.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 36 \\ - 36 & 16 \\ \hline 216 & \\ - 216 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$576 = 36 \times 16$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 36 \\ - 72 & 22 \\ \hline 72 & \\ - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$792 = 36 \times 22$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 36 \\ - 72 & 27 \\ \hline 264 & \\ - 252 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$984 = 36 \times 27 + 12$$

Il pourrait placer 16 œufs, 22 cloches et 27 lapins, mais il resterait des lapins, la consigne n'est pas suivie!

3. En vous aidant de votre calculatrice, faire la liste des :

- 21 diviseurs de 576 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 32; 36; 48; 64; 72; 96; 144; 192; 288; 576
- 24 diviseurs de 792 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 11; 12; 18; 22; 24; 33; 36; 44; 66; 72; 88; 99; 132; 198; 264; 396; 792
- 16 diviseurs de 984 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24; 41; 82; 123; 164; 246; 328; 492; 984

4. En observant la liste des diviseurs précédente, indiquer combien de sachets devrait faire Fraser et combien d'œufs, de cloches et de lapins devrait contenir chaque sachet.

On constate que 24 est le plus grand diviseur commun.

$$\begin{array}{r|l} 576 & 24 \\ - 48 & 24 \\ \hline 96 & \\ - 96 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$576 = 24 \times 24$$

$$\begin{array}{r|l} 792 & 24 \\ - 72 & 33 \\ \hline 72 & \\ - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$792 = 24 \times 33$$

$$\begin{array}{r|l} 984 & 24 \\ - 96 & 41 \\ \hline 24 & \\ - 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$984 = 24 \times 41$$

Fraser pourra faire 24 sachets contenant 24 œufs, 33 cloches et 41 lapins.



I — Division euclidienne, diviseurs et multiples

II — Nombres premiers et décomposition

III — Critères de divisibilité



INFORMATIONS LÉGALES

- **Auteur** : Fabrice ARNAUD
- **Web** : pi.ac3j.fr
- **Mail** : contact@ac3j.fr
- **Dernière modification** : 2 avril 2025 à 6:55

Ce document a été écrit pour \LaTeX avec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTeX 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprenant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise `%{{{ ... %}}}` est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code définit un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

LICENCE CC BY-NC-SA 4.0



Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

- Partager** — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
- Adapter** — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

- Attribution** — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.
- Pas d'Utilisation Commerciale** — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.
- Partage dans les Mêmes Conditions** — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les mêmes conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.
- Pas de restrictions complémentaires** — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Œuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr>

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été créé par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 2 avril 2025 à 6:55.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : <https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college>.