La leçon

I — Fractions et demi-droite graduée

Définition 3.1 : Fractions sur la droite graduée

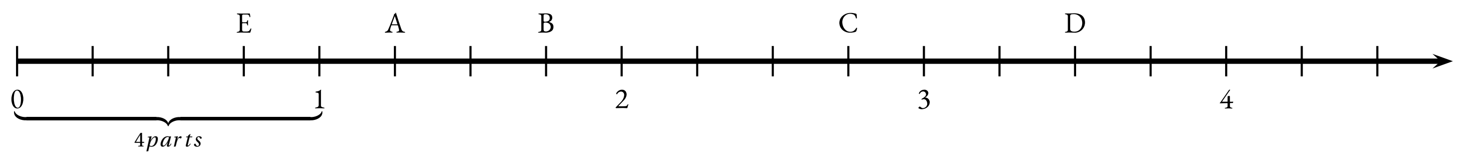
n un nombre entier naturel non nul.
Sur une demi-droite graduée dont l'unité est partagée en n parts égales, la **fraction** $\dfrac{1}{n}$ est le nombre qui correspond à la longueur d'une de ses parts.

k et n des nombres entiers naturels, n non nul.
La **fraction** $\dfrac{k}{n}$ est le nombre qui correspond à la longueur de k parts.

Le nombre entier naturel k est le **numérateur** de la fraction.
Le nombre entier naturel non nul n est le **dénominateur** de la fraction.

Commentaire pour l'enseignant :

Ces définitions ne sont données que sous la forme d'exemple générique en sixième, jamais sous cette forme !
En sixième et à l'école primaire, la fraction est un moyen pour parler d'un partage. On passe des formes partagées en part, gâteaux, objets géométriques, au partage d'un segment unitaire sur la demi-droite graduée.
Avec cet artifice, on arrive à admettre que la fraction passe d'un outil de partage à un nombre sur la droite graduée. Il faudra attendre un peu plus tard avec la définition du quotient, pour obtenir la définition d'un rationnel.



Une **fraction** est un nombre qui correspond à une abscisse sur une demi-droite graduée dont l'unité à été partagée en plusieurs parts égales.

Par exemple, sur la demi-droite ci-dessus, voici les abscisses des points A, B, C et D :

— A : $1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

— B : $1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$

— C : $2+\dfrac{3}{4}=\dfrac{11}{4}$

— D : $3+\dfrac{2}{4}=\dfrac{14}{4}=3+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

— E : $\dfrac{3}{4}$

Il y a **quatre quarts** dans une unité, c'est à dire $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

Pour la même raison, il y a **deux demis** dans une unité, **trois tiers** dans une unité ou encore **sept septièmes**.

On peut donc écrire que $2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ ou $3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$.

Propriété 3.1 : Partage de l'unité *(Admise)*

n un nombre entier naturel non nul

$$n\times\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1$$

Démonstration pour l'enseignant :

À ce stade de la progression du cours en sixième, il faut admettre cette propriété. Elle est essentiellement « visuelle », et consiste simplement à dire qu'en partageant l'unité en plusieurs parts, on retrouve l'unité en regroupant ces parts.
Ce qui est moins évident, et doit être admis, c'est le fait que ce partage géométrique de l'unité sur la droite graduée, correspond à un nombre. Nous admettrons l'existence de ce nombre ici et verront plus tard la définition du quotient.

Il est souvent inutile d'écrire cette propriété dans le cahier des élèves en utilisant la lettre n, des exemples génériques suffisent et sont bien plus simple à comprendre !

CQFD

Comme il y a quatre quarts dans une unité, il y a huit quarts dans deux unités, douze quarts dans trois unités et ainsi de suite.
$4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$
$8\times\frac{1}{4}=2\times4\times\frac{1}{4}=2\times\frac{4}{4}=2\times1=2$
$12\times\frac{1}{4}=3\times4\times\frac{1}{4}=3\times\frac{4}{4}=3\times1=3$

$7\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7\times3}{4}=\frac{21}{4}$

Propriété 3.2 : Multiples d'une fraction *(Admise)*

n un nombre entier naturel non nul et k un entier naturel.

$$k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

Si k est un multiple de n, c'est à dire si $k=p\times n$ alors

$$k\times\frac{1}{n}=p$$

Démonstration pour l'enseignant :

Encore une propriété que je ne fais pas écrire et que je me contente d'illustrer sur des exemples génériques.

La première propriété est basée sur le langage. Elle est inutilement formalisée dans cette propriété.
Par exemple, le produit $7\times\frac{1}{8}$, revient à effectuer sept fois un huitième, ce qui peut se dire sept huitièmes soit $\frac{7}{8}$.

Dire que $7\times\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ soit sept huitièmes, ne signifie pas encore que $\frac{7}{8}$ est le huitième de 7 !
Dit autrement, le fait que $\frac{7}{8}=7\times\frac{1}{8}$ ne signifie pas encore que $8\times\frac{7}{8}=7$.

La seconde propriété est plus facilement démontrable.
Si n est un naturel non nul et $k=p\times n$ un multiple de n, alors $k\times\frac{1}{n}=p\times n\times\frac{1}{n}=p\times\frac{n}{n}=p\times1=p$.

Exemple :

$\dfrac{7}{3} = \dfrac{6}{3} + \dfrac{1}{3} = 2 + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{45}{6} = \dfrac{42}{6} + \dfrac{3}{6} = 7 + \dfrac{3}{6}$

$\dfrac{89}{9} = \dfrac{81}{9} + \dfrac{8}{9} = 9 + \dfrac{8}{9}$

II — Les fractions décimales

III — Les nombres décimaux

IV — Somme, différence et produit des nombres décimaux

Nous allons prolonger l'addition, la différence et le produit des nombres entiers aux nombres décimaux. Nous proposerons les démonstrations sous forme d'exemples génériques.

1 La somme et la différence

On souhaite calculer $3,14 + 1,789$

$3,14 = \dfrac{314}{100} = \dfrac{3\,140}{1\,000}$ et $1,789 = \dfrac{1\,789}{1\,000}$

$3,14 + 1,789 = \dfrac{3\,140}{1\,000} + \dfrac{1\,789}{1\,000} = \dfrac{3\,140 + 1\,789}{1\,000} = \dfrac{4\,929}{1\,000}$

Ainsi $3,14 + 1,789 = 4,929$

Méthode 3 . 1 : Additionner des nombres décimaux
Pour additionner des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour additionner les nombres entiers :

- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;
- on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;
- on effectue la somme comme pour des entiers ;
- dans la somme, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 3,1\,4\,{\color{red}0} \\ +\; 1,7\,8\,9 \\ \hline 4,9\,2\,9 \end{array}$$

On souhaite calculer $3,14 - 1,789$

$$3,14 - 1,789 = \frac{3\,140}{1\,000} - \frac{1\,789}{1\,000} = \frac{3\,140 - 1\,789}{1\,000} = \frac{1\,351}{1\,000}$$

Ainsi $3,14 - 1,789 = 1,351$

Méthode 3.2 : Soustraire des nombres décimaux
Pour soustraire des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour soustraire les nombres entiers :

- on place le nombre le plus grand au dessus du nombre le plus petit ;
- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;
- on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;
- on effectue la différence comme pour des entiers ;
- dans la différence, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r} 3,1\;4\;\color{red}{0} \\ -\;\;1,7\;8\;9 \\ \hline 1,3\;5\;1 \end{array}$$

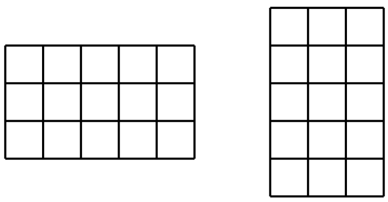
---

2 Le produit des nombres décimaux

Le produit de deux nombres entiers

La multiplication entière est une répétition d'additions.

Souvenons-nous que $3 \times 5 = \underbrace{5+5+5}_{3\ fois}$ et que $5 \times 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{5\ fois}$.
Signalons également que $3 \times 5 = 5 \times 3$.[1]
Pour illustrer cette propriété on peut raisonner de manière géométrique :



Dans les deux cas le nombre de carrés à l'intérieur de ces rectangles identiques est $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$

La produit d'un nombre entier par un nombre décimal

Calculons $5 \times 3,14$.
Ce produit peut s'interpréter comme $\underbrace{3,14+3,14+3,14+3,14+3,14}_{5 fois} = 15,70$

Calculons maintenant $3,14 \times 5$.
Attention, rien ne prouve que $3,14 \times 5$ revient à calculer $5 \times 3,14$! Comment effectuer une addition répétée « 3,14 fois » ?

Notons $P = 3,14 \times 5$, $P = \dfrac{314}{100} \times 5$.

On peut multiplier P par 100 : ${\color{red}100} \times P = \underbrace{{\color{red}100} \times \dfrac{314}{100}}_{314} \times 5$

Donc $100 \times P = 314 \times 5 = 1\,570$

Nous en déduisons que $P = \dfrac{1\,570}{100} = 15,70$ puisque $100 \times \dfrac{1\,570}{100} = 1\,570$

Finalement $3,14 \times 5 = 5 \times 3,14 = 15,70$

Le produit de deux nombres décimaux

Calculons $5,2 \times 3,14$.
Cette fois-ci ce produit ne peut pas être interprété comme une addition répétée. On utilise la stratégie précédente.

Notons $P = 5,2 \times 3,14$ on a $P = \dfrac{52}{10} \times \dfrac{314}{100}$

Comme $10 \times \dfrac{52}{10} = 52$ et que $100 \times \dfrac{314}{100} = 314$, on effectue les multiplications suivantes :

$$10 \times P \times 100 = \underbrace{10 \times \frac{52}{10}}_{52} \times \underbrace{\frac{314}{100} \times 100}_{314}$$

$$10 \times P \times 100 = 52 \times 314$$

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 20 mars 2025 à 19:33

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.