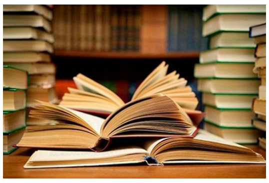
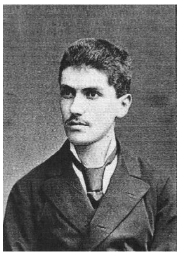


Le théorème de Pick
Sixième

Culture
Georges Alexander Pick (1859 - 1942)



Georg Alexander Pick (10 août 1859 – 26 juillet 1942) était un mathématicien autrichien, qui a donné son nom au théorème de Pick. En 1899, Georg Alexander Pick prouve son fameux théorème portant sur l'aire d'un polygone simple dont l'ensemble des sommets sont situés sur le réseau des points à coordonnées entières. Après l'annexion de la Pologne par l'Allemagne, Pick s'enfuit en Tchécoslovaquie mais il est déporté par les nazis au début de l'année 1942. Il meurt au cours de cette-même année dans le camp de concentration de Theresienstadt. Ce n'est que vingt-sept ans plus tard, en 1969, que le mathématicien polonais Hugo Steinhaus redécouvre le théorème de Pick et le rend célèbre.

Dans un quadrillage 3x3

Sur un quadrillage pointé de trois colonnes et trois lignes on peut tracer exactement quatre rectangles tous différents.

1. Tracez ces quatre rectangles dans les cases ci-dessous.

Un carré est un rectangle particulier. Deux rectangles sont différents quand ils ne sont pas superposables !

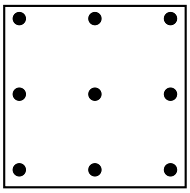


Figure n° 1

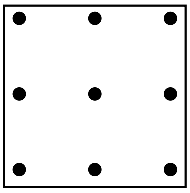


Figure n° 2

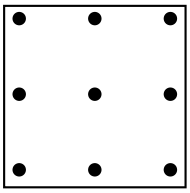


Figure n° 3

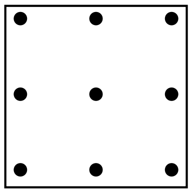
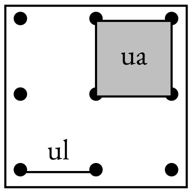


Figure n° 4

On souhaite mesurer le périmètre et l'aire de chacune des figures obtenues. On utilise pour cela les unités de mesures ci-contre.



Avec l'unité de longueur **ul** il n'est pas possible de mesurer la longueur d'un segment en diagonal à l'aide d'un nombre décimal ! Dans cette situation on ne calcule pas le périmètre de la figure.

2. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1				
Figure n° 2				
Figure n° 3				
Figure n° 4				

Dans un quadrillage 4x4

Sur un quadrillage pointé de quatre colonnes et quatre lignes on peut tracer exactement neuf rectangles tous différents.

3. Tracez ces neuf rectangles dans les cases ci-dessous.

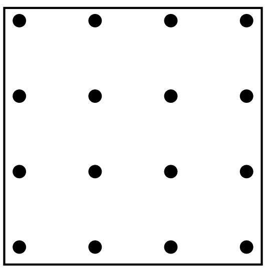


Figure n° 1

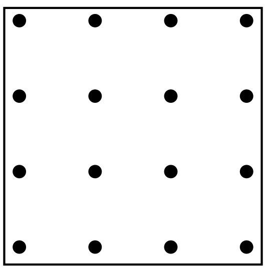


Figure n° 2

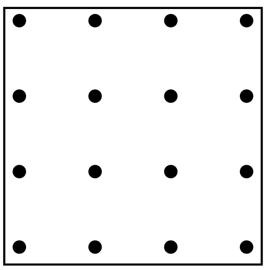


Figure n° 3

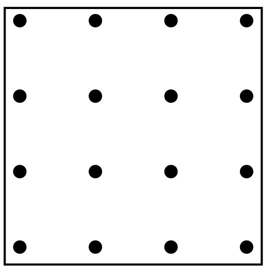


Figure n° 4

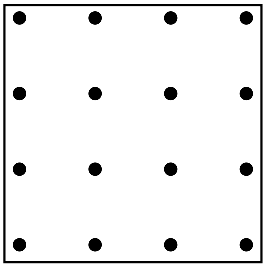


Figure n° 5

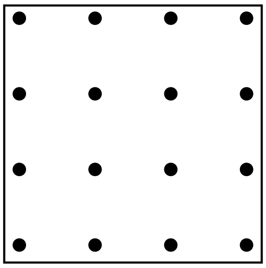


Figure n° 6

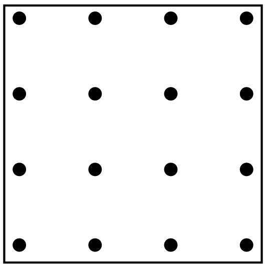


Figure n° 7

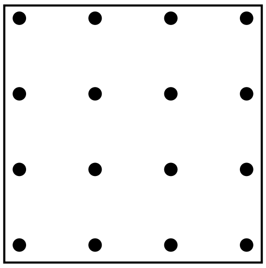


Figure n° 8

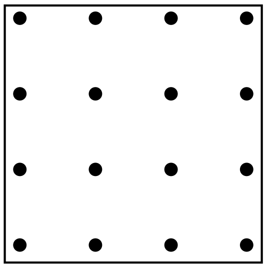


Figure n° 9

4. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1				
Figure n° 2				
Figure n° 3				
Figure n° 4				
Figure n° 5				
Figure n° 6				
Figure n° 7				
Figure n° 8				
Figure n° 9				

Alexander Pick a découvert en 1899, qu'il était possible de calculer l'aire d'une figure polygonale tracée du papier pointé, en comptant le nombre de points sur le contour et le nombre de points à l'intérieur du polygone.

Quelle conjecture peut-on faire, en observant le tableau précédent, sur la relation entre le nombre de points intérieur, le nombre de points sur le contour et l'aire de chaque figure ?

Écrit ici ta conjecture :

Théorème de Pick

1899

On note :

- C le nombre de points sur le contour ;
- I le nombre de points à l'intérieur ;
- A l'aire du polygone.

$A =$

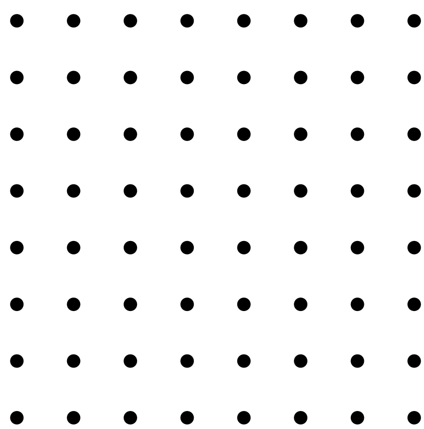
Dessine ci-dessous une figure polygonale de ton choix sur le papier pointé.
Calcule l'aire de cette figure en utilisant la méthode habituelle.
Vérifie ensuite avec le théorème de Pick.

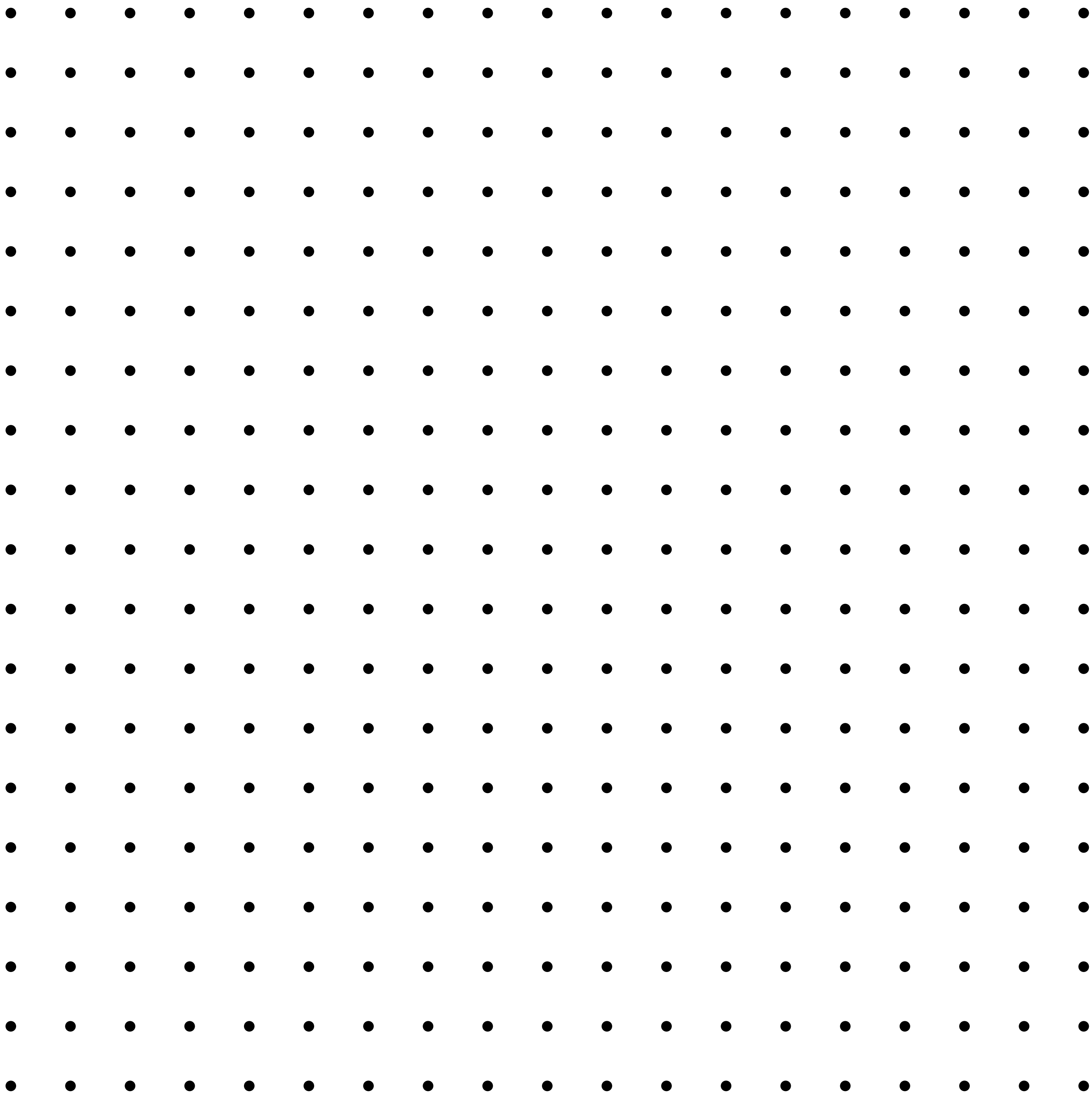
A =

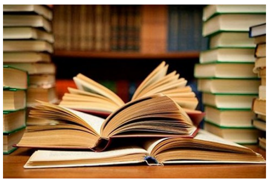
C =

I =

A =







Le théorème de Pick — Correction

Culture

Dans un quadrillage 3x3

Sur un quadrillage pointé de trois colonnes et trois lignes on peut tracer exactement quatre rectangles tous différents.

1. Tracez ces quatre rectangles dans les cases ci-dessous.

Un carré est un rectangle particulier. Deux rectangles sont différents quand ils ne sont pas superposables !

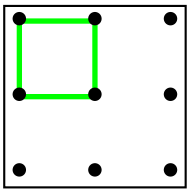


Figure n° 1

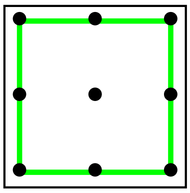


Figure n° 2

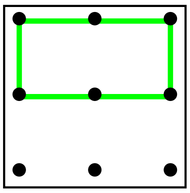


Figure n° 3

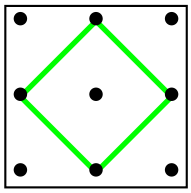


Figure n° 4

On a obtenu quatre rectangles dont trois carrés. On ne pourra pas estimer le périmètre de la dernière figure, les côtés de ce carré sont les diagonales du quadrillage. Cette dernière longueur n'est pas un nombre entier, ni même une fraction. Cette diagonale mesure environ $1,41\ ul$, exactement $\sqrt{2}\ ul$, ce qu'un élève de quatrième est capable de comprendre.

2. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1	**4**	**1**	**0**	**4**
Figure n° 2	**8**	**4**	**1**	**8**
Figure n° 3	**6**	**2**	**0**	**6**
Figure n° 4	**X**	**2**	**1**	**4**

Pour la Figure n° 4, on peut déterminer l'aire en effectuant le découpage ci-contre
Chacun des quatre petits triangles rectangles correspond à la moitié d'un carré unité.
La Figure n° 4 a donc une aire de deux unités.

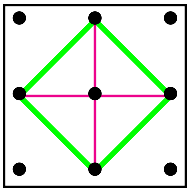


Figure n° 4

Dans un quadrillage 4x4

Sur un quadrillage pointé de quatre colonnes et quatre lignes on peut tracer exactement neuf rectangles tous différents.

3. Tracez ces neuf rectangles dans les cases ci-dessous.

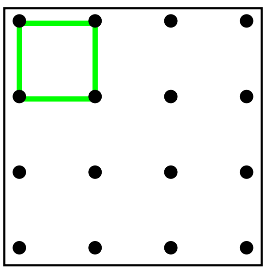


Figure n° 1

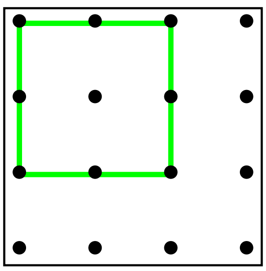


Figure n° 2

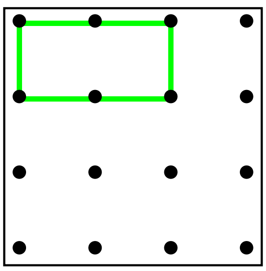


Figure n° 3

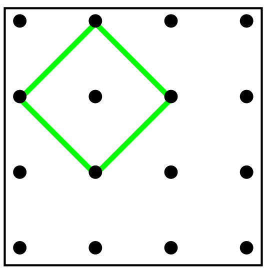


Figure n° 4

Il s'agit des quatre figures précédentes !

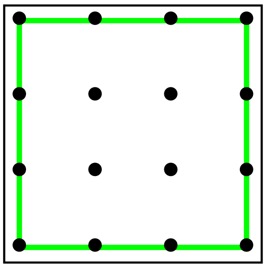


Figure n° 5

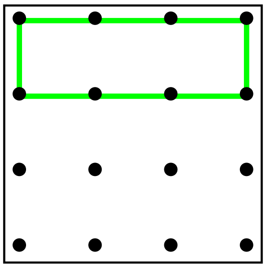


Figure n° 6

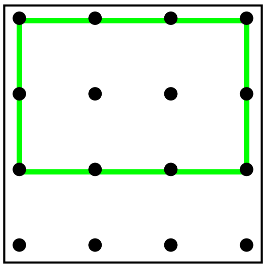


Figure n° 7

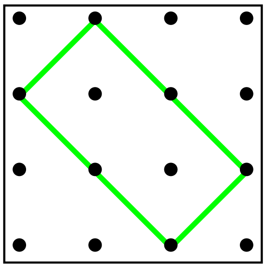


Figure n° 8

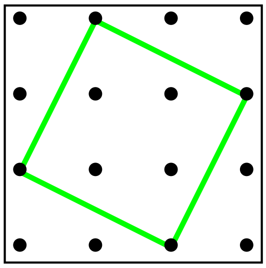


Figure n° 9

4. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1	**4**	**1**	**0**	**4**
Figure n° 2	**8**	**4**	**1**	**8**
Figure n° 3	**6**	**2**	**0**	**6**
Figure n° 4	**X**	**2**	**1**	**4**
Figure n° 5	**12**	**9**	**4**	**12**
Figure n° 6	**8**	**3**	**0**	**8**
Figure n° 7	**10**	**6**	**2**	**10**
Figure n° 8	**X**	**4**	**2**	**6**
Figure n° 9	**X**	**5**	**4**	**4**

Pour la figure suivante, on peut utiliser la même méthode que la Figure n° 4. Sa surface vaut exactement le double de la Figure n° 4.

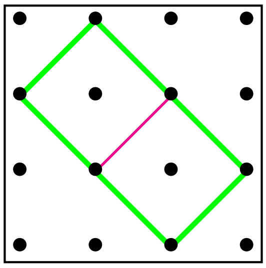


Figure n° 9

Pour la figure suivante, on peut utiliser un découpage comme ci-après.
On voit un carré central et quatre demi rectangle de longueur deux unités et de largeur une unité.

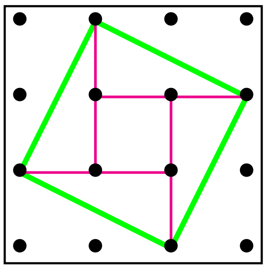


Figure n° 9

On peut tenter de nombreuses conjectures et vérifier sur les neuf figures précédentes leur réalité.
Notons A l'aire, C le nombre de points sur le contour et I le nombre de point intérieur.

Conjecture n° 1 : $\mathrm{A} = \mathrm{C} - 3 + \mathrm{I}$
Elle est vraie pour :

- La Figure n° 1 : $\mathrm{A} = 4 - 3 + 0 = 1$;
- La Figure n° 4 : $\mathrm{A} = 4 - 3 + 1 = 2$;

Elle est fausse pour les sept autres cas !

Conjecture n° 2 : $\mathrm{A} = \mathrm{C} \div 2 - 1$
Elle est vraie pour :

- La Figure n° 1 : $\mathrm{A} = 2 - 1 = 1$;
- La Figure n° 3 : $\mathrm{A} = 3 - 1 = 2$;
- La Figure n° 6 : $\mathrm{A} = 4 - 1 = 3$;

Elle est fausse pour les six autres cas !

Conjecture n° 1 : $\mathrm{A} = \mathrm{C} \div 2 - 1 + \mathrm{I}$
Elle est vraie pour :

- La Figure n° 1 : $\mathrm{A} = 2 - 1 + 0 = 1$;
- La Figure n° 2 : $\mathrm{A} = 4 - 1 + 1 = 4$;
- La Figure n° 3 : $\mathrm{A} = 3 - 1 + 0 = 2$;
- La Figure n° 4 : $\mathrm{A} = 2 - 1 + 1 = 2$;
- La Figure n° 5 : $\mathrm{A} = 6 - 1 + 4 = 9$;
- La Figure n° 6 : $\mathrm{A} = 4 - 1 + 0 = 3$;
- La Figure n° 7 : $\mathrm{A} = 5 - 1 + 2 = 6$;
- La Figure n° 8 : $\mathrm{A} = 3 - 1 + 2 = 4$;
- La Figure n° 9 : $\mathrm{A} = 2 - 1 + 4 = 5$;

Elle est vraie pour toutes les figures fournies. Cela ne démontre pas notre conjecture, cela la confirme un peu !
Alexander Pick a démontré que cette conjecture est vraie. La démonstration dépasse largement la cadre du collège. Voici quelques idées de cette démonstration :

- On démontre que cela est vrai pour tous les rectangles ayant des côtés « verticaux »ou « horizontaux ».
  - Le nombre de points sur le contour est égal au périmètre du rectangle, soit le double de la somme de la largeur et de la longeur ;
  - la moitié du nombre de points sur le contour est donc égal à la somme de la largeur et de la longueur ;
  - le nombre de points intérieurs est égal au produit de la longueur diminuée d'une unité par la largeur diminuée d'une unité ;
  - en notant L la longueur, l la largeur et A l'aire du rectangle,
    on obtient : $(\mathrm{L} - 1) \times (l - 1) = \mathrm{L} \times l - \mathrm{L} - \mathrm{L} + 1 = \mathrm{A} - (l + \mathrm{L}) + 1$;
  - ainsi, si on ajoute le nombre de points sur le contour, $\mathrm{L} + l$ et qu'on retire 1, on obtient le résultat attendu.
- on en déduit la même égalité pour tous les triangles ;
  - on commence par des triangles rectangles dont les côtés sont « verticaux »et « horizontaux » ;
  - on montre que deux tels triangles forment un rectangle et on utilise le résultat précédent ;
  - dans les autres cas on obtient un parallèlogramme, puis un rectange...
- on termine la démonstration par récurrence sur le nombre de points sur le contour.
  - la propriété est vraie pour les triangles ;
  - si elle est vraie pour le polygone quelconque ;
  - elle est vraie pour ce polygone auquel on ajoute un triangle quelconque ;
  - tout polygone peut se construire de cette manière.

Théorème de Pick

1899

On note :

- C le nombre de points sur le contour ;
- I le nombre de points à l'intérieur ;
- A l'aire du polygone.

$$A = C \div 2 + I - 1$$

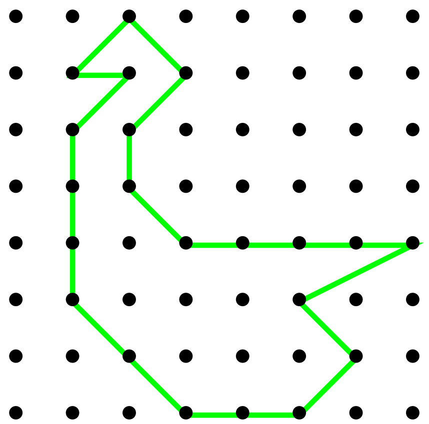
Dessine ci-dessous une figure polygonale de ton choix sur le papier pointé.
Calcule l'aire de cette figure en utilisant la méthode habituelle.
Vérifie ensuite avec le théorème de Pick.

$A = 17,5$

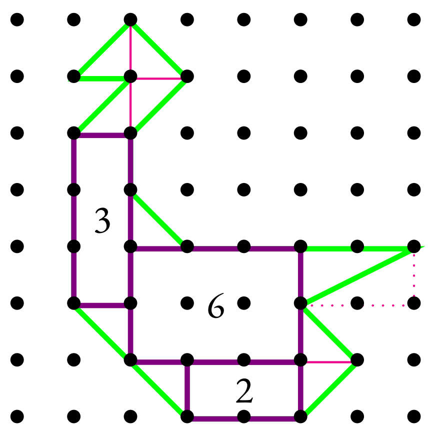
$C = 21$

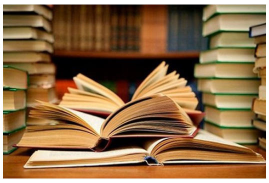
$I = 7$

$A = 21 \div 2 + 7 - 1$
$A = 11,5 + 7 - 1$
$A = 17,5$



Pour calculer avec la méthode classique, l'aire de ce polygone « canardesque », on peut utiliser le découpage suivant :





Culture

Le théorème de Pick

Intentions pédagogiques

Mes intentions sont claires

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr
— **Dernière modification :** 17 septembre 2025 à 18:15

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Plucky Puffin (macareux courageux) 25.04 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaHBTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerai beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
Mes pdf ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page, et verticalement sur mes corrections de brevet qui sont très pillés, afin de permettre à tous d'utiliser les documents tels quels.
Les QRCodes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe pas vers une page de mon blog ni sur une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 17 septembre 2025 à 18:15.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college.