Belle figure

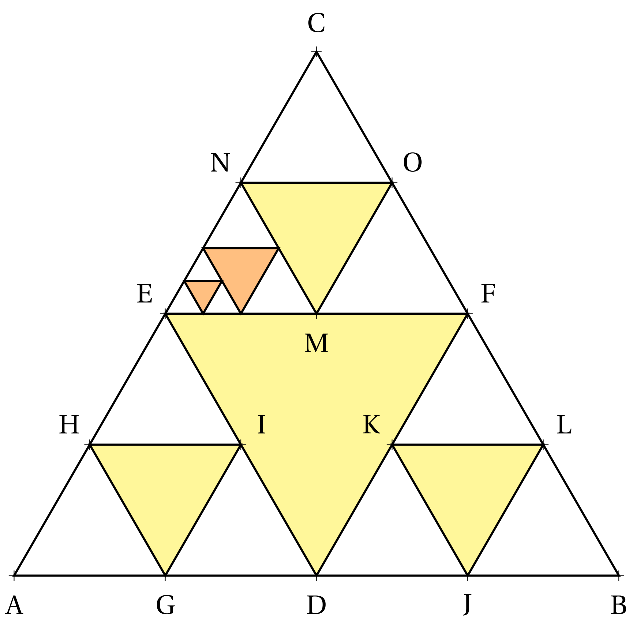
Le triangle de Sierpiński

Collège

Mots clés : *Triangle équilatéral — Milieux — Calcul — Fractale*

1. Effectuer la figure suivante sur une feuille A4 au format portrait ;
2. **Situation initiale**
   Tracer un segment [AB] tel que AB = 192 mm ;
   Tracer le triangle équilatéral ABC ;
   Si l'ouverture du compas est trop petite, place le milieu D *du segment* [AB], *le point* C *se trouve sur la perpendiculaire au segment* [AB] *passant par* D *à 166 mm du point* D ;
3. **Étape n° 1**
   Placer D le milieu de [AB], E le milieu de [AC] et F le milieu de [BC] ;
   Tracer le triangle DEF et le colorier ;
4. **Étape n° 2**
   Dans le triangle ADE, placer G, H et I les milieux respectifs de [AD], [AE] et [ED] ;
   Dans le triangle DFB, placer J, K et L les milieux respectifs de [DB], [DF] et [FB] ;
   Dans le triangle CEF, placer M, N et O les milieux respectifs de [EF], [EC] et [CF] ;
   Tracer les triangles GHI, JKL et MNO puis les colorier ;
5. **Étape n° 3**
   Recommencer l'étape précédente en plaçant les milieux de chacun des côtés des neuf triangles AGH, GID, HIE, DJK, JLB, KLF, EMN, MOF et NOC. Inutile de nommer ces milieux, ils sont trop nombreux !
   Colorier à chaque fois les triangles à l'intérieur ;
6. **Étape n° 4 et suivantes**
   Recommencer de la même manière ;
   Il est possible, pour les plus persévérants, d'aller jusqu'à la sixième étape...
7. Compléter ensuite le tableau au dos de cette feuille et répondre à la question posée.

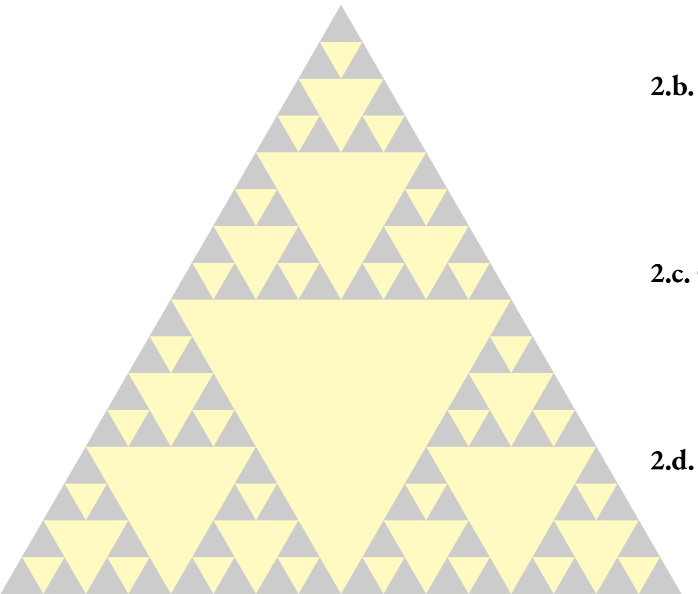
*La figure ci-dessous n'est complète que pour l'**Étape n° 2**. Les autres étapes sont à peine commencées !*



1. Compléter, dans la mesure du possible, le tableau suivant :

	Situation initiale	**Étape n° 1**	**Étape n° 2**	**Étape n° 3**	**Étape n° 4**	**Étape n° 5**	**Étape n° 6**	**Étape n° 7**
Longueur du côté du triangle	192 mm	96 mm	48 mm					
Nombre de triangles de cette taille	1	4	12					
Nombre de triangles de cette taille colorés	0	1	3					
Nombre cumulé de triangles	1	5	17					
Nombre cumulé de triangles colorés	0	1	4					

2. Les professeurs de mathématiques du collège souhaitent utiliser vos triangles de Sierpiński pour en construire un beaucoup plus grand que nous afficherons dans le couloir.
Le triangle central à chaque étape sera laissé vide.



Toutes les mesures ci-dessous seront indiquées au millimètre près.

2.a. Mesurer la hauteur du triangle ABC qui a été construit.

2.b. En utilisant trois triangles comme ABC, on obtient un triangle de Sierpiński plus grand. Combien mesure son côté et sa hauteur ?

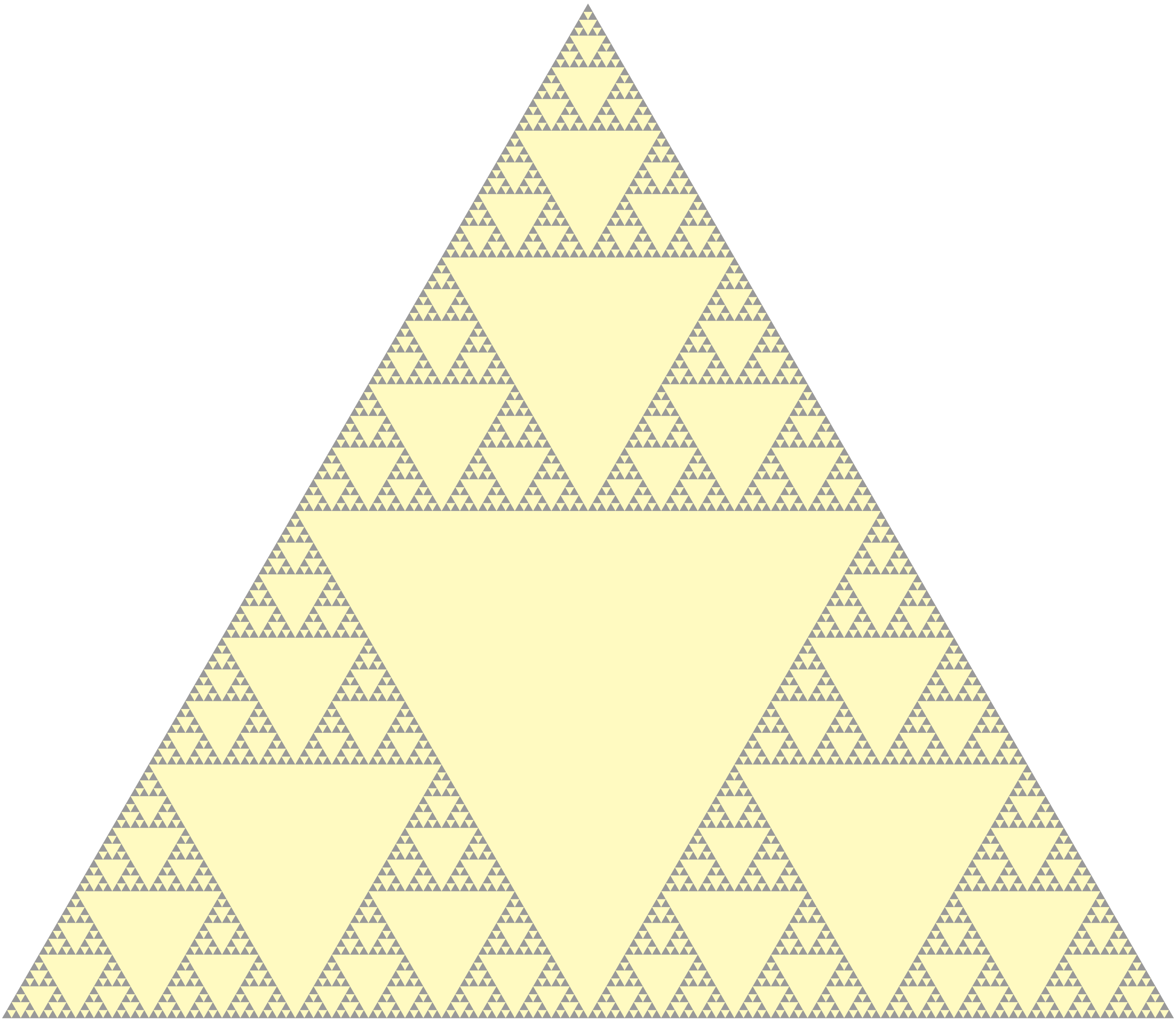
2.c. On veut encore doubler la mesure du côté et la hauteur. Combien de triangles comme ABC nous faudra-t-il ?

2.d. Plus de 200 élèves vont faire cette activité. Quels mesures maximales du côté du triangle et de sa hauteur pourrons-nous atteindre ?

2.e. Combien nous en faut-il pour passer à l'étape d'après, un triangle deux fois plus grand que celui de la question **2.d.** ?

Belle figure

Le triangle de Sierpiński — Correction



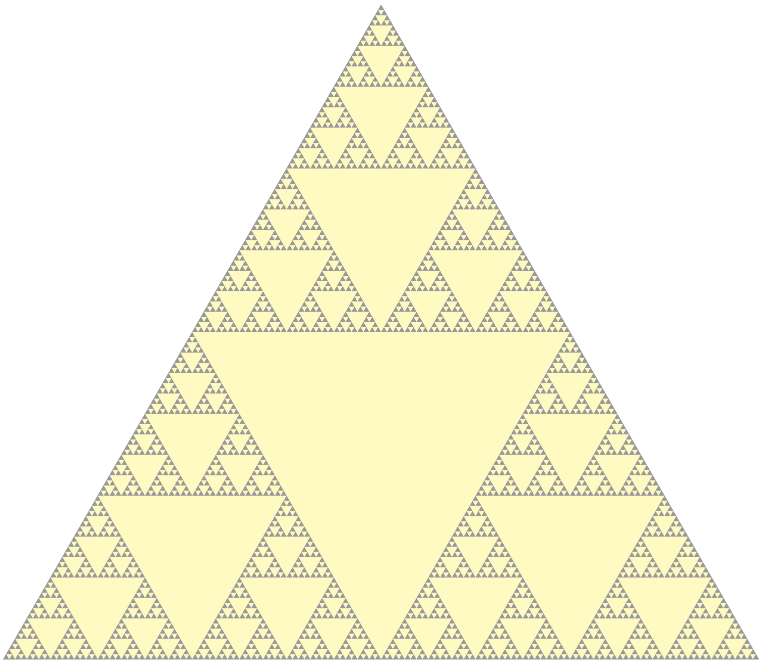
Le triangle de Sierpiński

Waclaw Sierpiński (né le 14 mars 1882 à Varsovie et mort le 21 octobre 1969) est un mathématicien polonais, connu pour ses recherches sur la théories des nombres, théories des ensembles, la topologie et la théorie des fonctions.

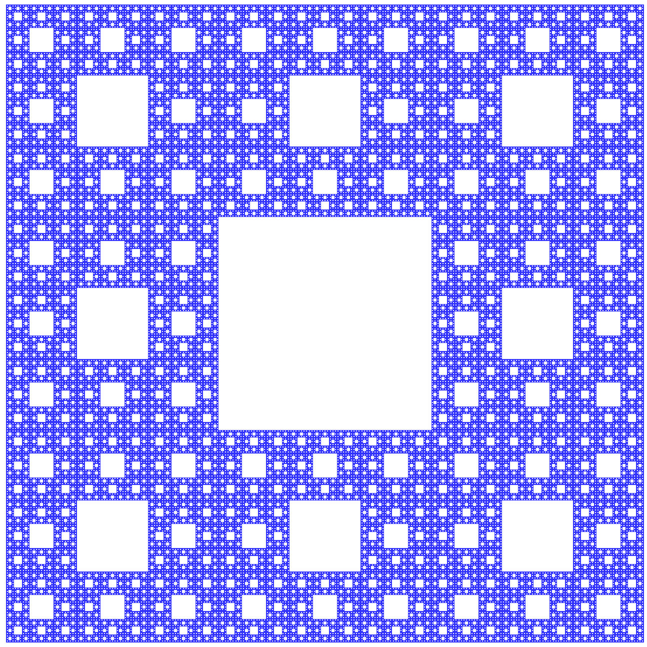
Le **triangle de Sierpiński** est une figure fractale qui porte son nom.

Une **fractale** est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles. C'est un objet géométrique infiniment morcelé dont des détails sont observables à une échelle arbitrairement choisie. En zoomant sur une partie de la figure, il est possible de retrouver toute la figure ; on dit alors qu'elle est autosimilaire.
De nombreux exemples de fractales, comme le flocon de Koch ou le tapis de Sierpiński ont été découverts à la fin du 19e siècle, mais c'est Benoît Mandelbrot qui, en 1975, a attiré l'attention sur ces objets et leur omniprésence dans la nature, créant à cette occasion l'adjectif fractal à partir de la racine latine fractus, qui signifie brisé , irrégulier.

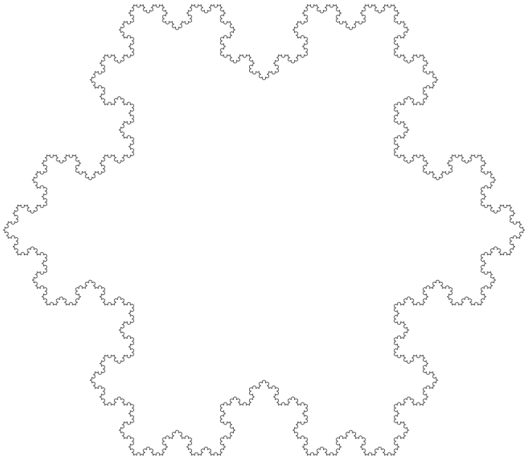
À chaque étape de la construction du triangle de Sierpiński, le triangle central est retiré. L'aire restante est donc égale au trois quarts de l'aire précédente. En reproduisant ce processus, « à l'infini », l'aire du triangle devient nulle !



Le triangle de Sierpínski



Le tapis de Sierpínski



Le flocon de Von Koch

L'arbre de Pythagore

1. Compléter, dans la mesure du possible, le tableau suivant :

	Situation initiale	**Étape n° 1**	**Étape n° 2**	**Étape n° 3**	**Étape n° 4**	**Étape n° 5**	**Étape n° 6**	**Étape n° 7**
Longueur du côté du triangle	192 mm	96 mm	48 mm	24 mm	12 mm	6 mm	3 mm	1,5 mm
Nombre de triangles de cette taille	1	4	12	36	108	324	972	2916
Nombre de triangles de cette taille colorés	0	1	3	9	27	81	243	729
Nombre cumulé de triangles	1	5	17	53	161	485	1457	4373
Nombre cumulé de triangles colorés	0	1	4	12	39	120	363	1092

2. Les professeurs de mathématiques du collège souhaitent utiliser vos triangles de Sierpiński pour en construire un beaucoup plus grand que nous afficherons dans le couloir.
Le triangle central à chaque étape sera laissé vide.

Toutes les mesures ci-dessous seront indiquées au millimètre près.

2.a. Mesurer la hauteur du triangle ABC qui a été construit.

Le triangle mesure environ 166 mm soit 16,6 cm.

2.b. En utilisant trois triangles comme ABC, on obtient un triangle de Sierpiński plus grand. Combien mesure son côté et sa hauteur ?

Le côté est deux fois plus long, son côté mesure $2 \times 192\ mm = 384\ mm = 38,4\ cm$.
Il est deux fois plus haut, sa hauteur mesure $2 \times 166\ mm = 332\ mm = 33,2\ cm$

2.c. On veut encore doubler la mesure du côté et la hauteur. Combien de triangles comme ABC nous faudra-t-il ?

Il en faut trois fois plus, 9.

2.d. Plus de 200 élèves vont faire cette activité. Quels mesures maximales du côté du triangle et de sa hauteur pourrons-nous atteindre ?

Il faut 3 triangles, c'est-à-dire 3×1, puis $3 \times 3 = 9$, $3 \times 9 = 27$, $3 \times 27 = 81$ et $3 \times 81 = 243$.
Avec 200 triangles, nous ne pourrons faire que deux assemblages de 81 triangles.
Nous aurons doublé la taille du côté et de la hauteur 4 fois de suites soit des longueurs $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ fois plus grandes.

Le côté du plus grand triangle mesure alors au bout de quatre étapes : $16 \times 192\ mm = 3\,072\ mm = 307,2\ cm = 3,072\ m$.
Sa hauteur mesure $16 \times 166\ mm = 2\,656\ mm = 265,6\ cm = 2,656\ m$

2.e. Combien nous en faut-il pour passer à l'étape d'après, un triangle deux fois plus grand que celui de la question **2.d.** ?

On vient de voir qu'il fallait 243 triangles pour passer à l'étape suivante, il en manquera donc 43 !

Intentions pédagogiques

Je suis sûr qu'un jour j'aurai le temps de rédiger mes intentions pédagogiques !

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 23 octobre 2025 à 14:51

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Plucky Puffin (macareux courageux) 25.04 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaHBTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerai beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
Mes pdf ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page, et verticalement sur mes corrections de brevet qui sont très pillés, afin de permettre à tous d'utiliser les documents tels quels.
Les QRCodes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe pas vers une page de mon blog ni sur une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Figure_de_geometrie_remarquables.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 23 octobre 2025 à 14:51.

Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : lala.