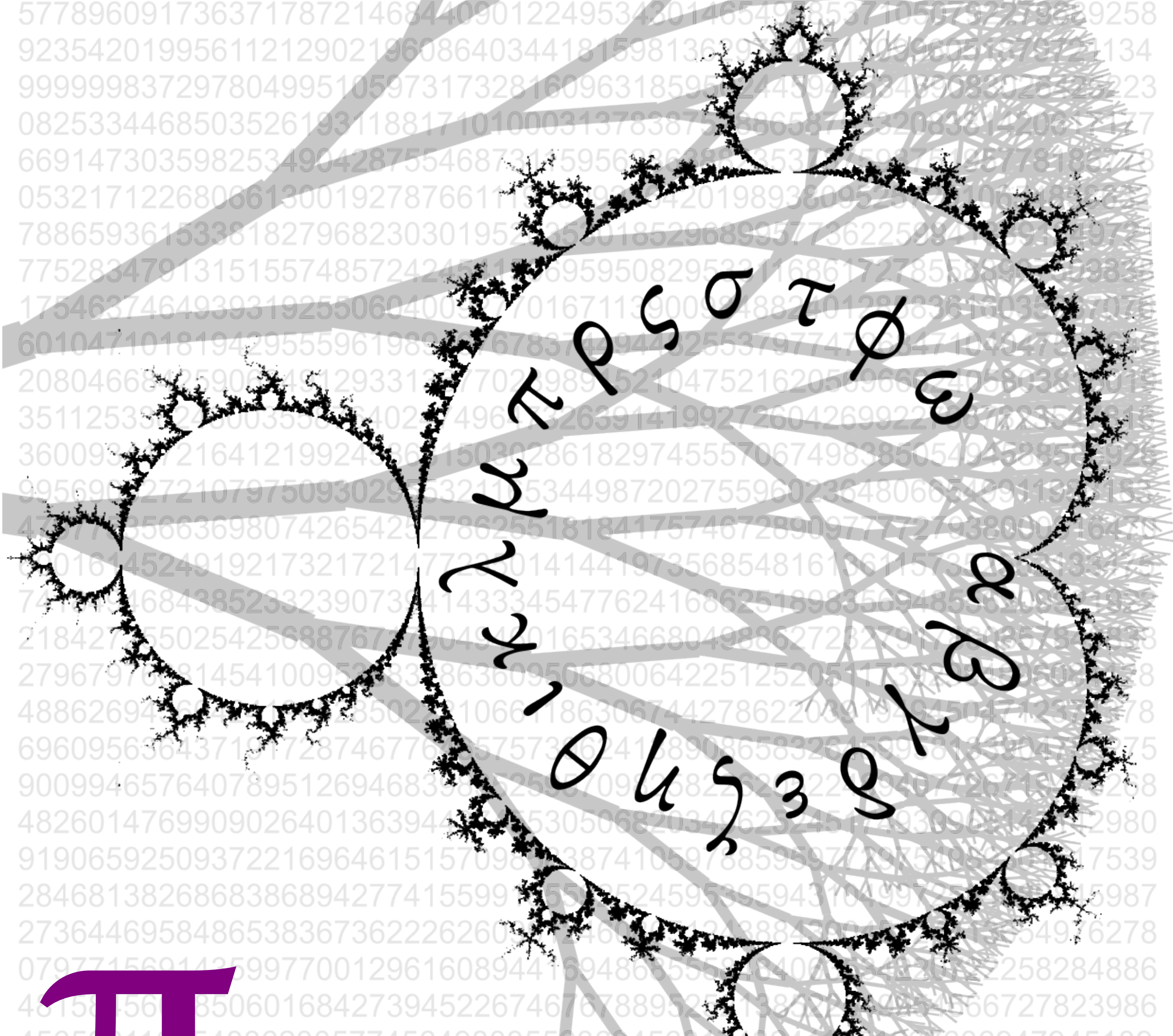
Brevet des collèges

Fiches de synthèse

Mathématiques



Collège Vauquelin

Année scolaire 2023-2024

Version du 16 juin 2024

Table des matières

Les nombres entiers

Nombres et chiffres

Les **entiers naturels** sont les **nombres** qui permettent de compter des objets.
Un nombre entier peut s'écrire en utilisant les 10 **chiffres** indo-arabes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. On utilise pour cela la **notation positionnelle** où chaque chiffre à un sens différent suivant sa position dans le nombre.

Le sens des chiffres

Milliards			Millions			Milliers			Unités simples		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	Centaines	Dizaines	Unités
								2	0	1	9
				1	2	3	4	5	6	7	8
9	0	8	0	7	0	6	0	5	0	4	1

$2019 = 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1$
$12\,345\,678 = 1 \times 10\,000\,000 + 2 \times 1\,000\,000 + 3 \times 100\,000 + 4 \times 10\,000 + 5 \times 1000 + 6 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$

$908\,070\,605\,041 = 9 \times 100\,000\,000\,000 + 8 \times 1\,000\,000\,000 + 7 \times 10\,000\,000 + 6 \times 100\,000 + 5 \times 1000 + 4 \times 10 + 1 \times 1$

Exemple :
Le nombre 12 345 se décompose ainsi : $12\,345 = 1 \times 10\,000 + 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

— Le **chiffre** des unités est : 5;
— Le **chiffre** des dizaines est : 4;
— Le **chiffre** des centaines est : 3;
— Le **chiffre** des milliers est : 2;
— Le **chiffre** des dizaines de milliers est : 1;

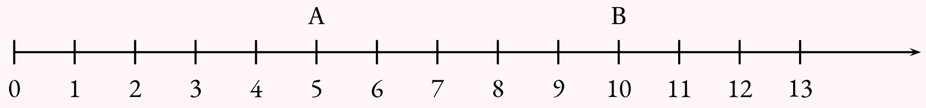
$12\,345 = 12\,340 + 5 = 1\,234 \times 10 + 5$
$12\,345 = 12\,300 + 45 = 123 \times 100 + 45$
$12\,345 = 12\,000 + 345 = 12 \times 1\,000 + 345$
$12\,345 = 10\,000 + 2\,345 = 1 \times 10\,000 + 2\,345$

— Le **nombre** d'unités est : 12 345;
— Le **nombre** de dizaines est : 1 234;
— Le **nombre** de centaines est : 123;
— Le **nombre** de milliers est : 12;
— Le **nombre** de dizaines de milliers est : 1.

La demi-droite graduée

On représente les nombres entiers sur une demi-droite graduée. Cette demi-droite est constituée :

— d'une **origine** qui correspond au nombre 0;
— d'une **unité** qui indique le pas sur la demi-droite;
— d'un **sens** de lecture.



On dit que

— 5 est **l'abscisse** du point A;
— 10 est **l'abscisse** du point B.

Opérations et vocabulaire

Le résultat d'une **addition** s'appelle la **somme** .
Le résultat d'une **soustraction** s'appelle la **différence** .
Le résultat d'une **multiplication** s'appelle le **produit** .
Le résultat d'une **division** s'appelle le **quotient** .

Le **double** d'un nombre correspond au **produit** de ce nombre par 2.
La **moitié** d'un nombre correspond au **quotient** de ce nombre par 2.
Le **triple** d'un nombre correspond au **produit** de ce nombre par 3.
Le **tiers** d'un nombre correspond au **quotient** de ce nombre par 3.
Le **quadruple** d'un nombre correspond au **produit** de ce nombre par 4.
Le **quart** d'un nombre correspond au **quotient** de ce nombre par 4.

Exemple :
La **somme** de 78 et 90 est 168 car $78 + 90 = 168$.
On dit que 78 et 90 sont les **termes** de la **somme** .

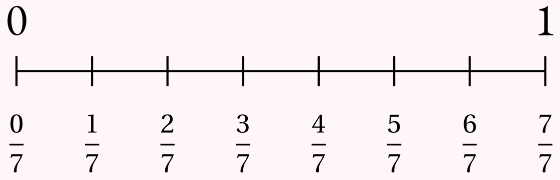
La **différence** de 2 020 et 1 789 est 231 car $2\,020 - 1\,789 = 231$
On dit que 2 020 et 1 789 sont les **termes** de la **différence** .

Le **produit** de 12 par 23 est 276 car $12 \times 23 = 276$.
On dit que 12 et 23 sont les **facteurs** du **produit** .

Le produit de la somme de 5 et 7 par la différence de 12 et 5 vaut 84.
En effet : $5 + 7 = 12$ et $12 - 5 = 7$ donc $12 \times 7 = 84$
On peut aussi écrire $(5 + 7) \times (12 - 5)$.

Les nombres décimaux

Fraction partage, vocabulaire



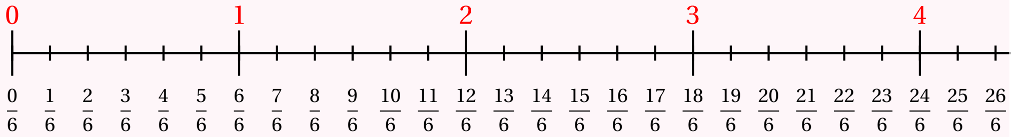
La **fraction** $\frac{3}{7}$ est constitué d'un **numérateur** : 3 et d'un **dénominateur** : 7.

Le dénominateur indique le nombre de part. Le numérateur indique le numéro de la graduation.

$\frac{3}{2}$ se dit trois demis. $\frac{5}{3}$ se dit cinq tiers. $\frac{7}{4}$ se dit sept quarts.

$\frac{11}{5}$ se dit onze cinquièmes. $\frac{3}{2\,020}$ se dit trois deux-mille-vingtièmes.

Fraction et demi-droite graduée



Sur un demi-droite graduée, une fraction peut représenter un nombre.

Une fraction peut se décomposer sous la forme de **la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à une unité** .

$\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ car 3 unités correspond à $\frac{18}{6}$. Ainsi $3 < \frac{23}{6} < 4$.

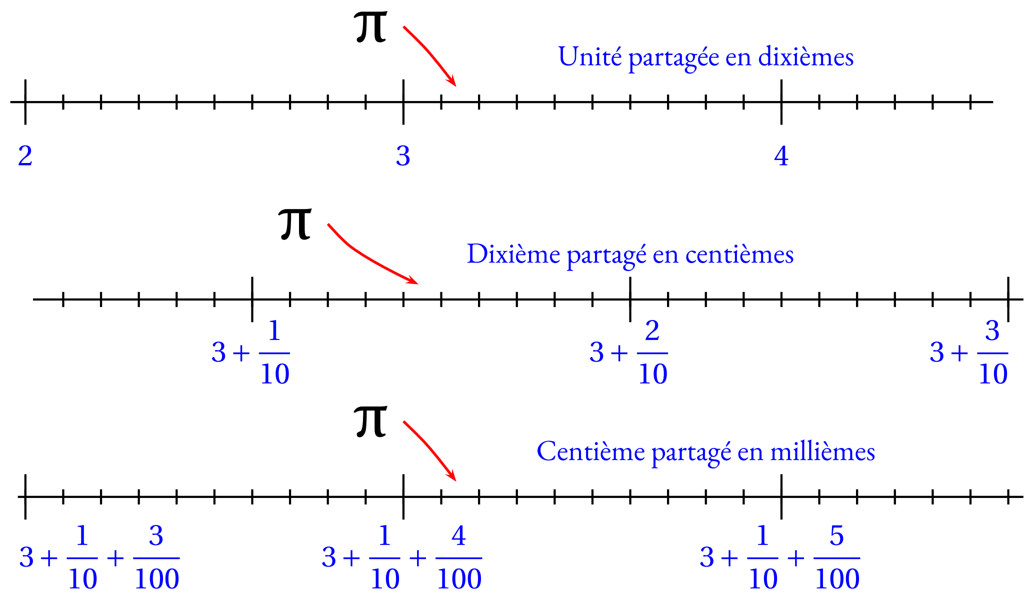
Les fractions décimales

Les **fractions décimales** sont les fractions dont le dénominateur est 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 ...

On parle de **dixième** , **centième** , **millième** , **dix-millième** , **cent-millième** ...

Il y a :

- 10 dixièmes dans une unité;
- 10 centièmes dans un dixième;
- 10 millièmes dans un centième.
- 100 centièmes dans une unité;
- 100 millièmes dans un dixième;
- 1000 millièmes dans une unité.



Le nombre $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000}$ peut s'écrire plus rapidement sous la forme $3,142$.

$$3,142 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000} = 3 + \frac{142}{1\,000} = \frac{3\,142}{1\,000}$$

On dit que 3 est **la partie entière** et $\frac{142}{1\,000}$ **la partie décimale** du nombre $3,142$.

Nombres décimaux et multiplication

Pour effectuer $3{,}163 \times 0{,}7$ on effectue le produit des nombres entiers 3 163 et 7. En effet, le nombre 3,163 vaut 3 163 millièmes et 0,7 vaut 7 dixièmes.

$3\,163 \times 7 = 22\,141$ et comme le produit de **millièmes** par des **dixièmes** donne des **dix-millièmes** , on en déduit que $3{,}163 \times 0{,}7 = 2{,}214\,1$.

En pratique, le produit a autant de chiffres après la virgule que la somme du nombre de chiffres après la virgule des deux facteurs.
Ici, 3,163 a trois chiffres après la virgule et 0,7 en a un.
Le produit des deux en a donc quatre !

La division euclidienne

Définition

Soient a et b deux nombres entiers.
Il existe toujours deux nombres entiers q et r tels que :

— $a = b \times q + r$: c'est **l'égalité euclidienne** ;

— q est inférieur strictement à b.

On dit que l'on a effectué la **division euclidienne** de a par b.
a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne.

Exemples :

$$
\begin{array}{r|l}
12345 & 7 \\ \cline{2-2}
-7 & 1763 \\
53 & \\
-49 & \\
44 & \\
-42 & \\
25 & \\
-21 & \\
4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
8765 & 8 \\ \cline{2-2}
-8 & 1095 \\
07 & \\
-0 & \\
76 & \\
-72 & \\
45 & \\
-40 & \\
5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3789 & 9 \\ \cline{2-2}
-36 & 421 \\
18 & \\
-18 & \\
09 & \\
-9 & \\
0 &
\end{array}
$$

$12\,345 = 7 \times 1763 + 4$ $\qquad 8765 = 8 \times 1095 + 5$ $\qquad 3789 = 9 \times 421$

Vocabulaire

Soient a et b deux nombres entiers.
Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0, on peut écrire :

$a = b \times q$ où q est le quotient.

Dans ce cas on peut dire que :

— b est un **diviseur** de a ;

— a est **divisible** par b ;

— a est un **multiple** de b.

Exemples :

On a vu ci-dessus que $3789 = 9 \times 421$.

Ainsi :

— 3789 est divisible par 421 ;

— 3789 est divisible par 9 ;

— 9 est un diviseur de 3789 ;

— 421 est un diviseur de 3789 ;

— 3789 est un multiple de 421 ;

— 3789 est un multiple de 9.

Critère de divisibilité

Un nombre est **divisible** par :

— **2**, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;

— **3**, si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;

— **4**, si les deux derniers chiffres forment un multiple de 4 ;

— **5**, si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

— **6**, s'il est divisible par 2 et par 3 ;

— **9**, si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 ;

— **10**, si le chiffre de ses unités est 0.

Exemples :

1 234 650 est divisible par :

— 2, car son chiffre des unités est 0 ;

— 3, car la somme des chiffres vaut 21 qui est un multiple de 3 ;

— 5, car son chiffre des unités est 0 ;

— 10, car son chiffre des unités est 0 mais aussi divisible par 2 et par 5 ;

— 6, car divisible par 2 et par 3 ;

Il n'est pas divisible par 9 car 21 n'est pas un multiple de 9.
Il n'est pas divisible par 4 car 50 n'est pas un multiple de 4.

En revanche, **451 836** est dans la table de 9 et de 4, mais aussi de 2, 3 et 6.

D'ailleurs tous les nombres divisibles par 9 sont divisibles par 3, tous les nombres divisibles par 4 sont divisibles par 2, tous les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 5, tous les nombres divisibles par 6 sont divisibles par 2 et 3.

Les nombres relatifs

Nombres opposés

Deux nombres relatifs sont **opposés** si leur somme est nulle.

0 est égal à son opposé.
Quand deux nombres sont opposés, l'un des deux est **positif** et l'autre est **négatif** .
Deux nombres opposés sont situés à la même distance de zéro.

Exemples :
$(-5)+(+5)=0$, (-5) et $(+5)$ sont opposés. (-5) est négatif et $(+5)$ est positif.
Le nombre relatif $(+5)$ correspond au nombre entier 5. On écrit le plus souvent 5 au lieu de $(+5)$.
Ces deux nombres sont situés à la même distance de zéro : 5 unités.
$0+0=0$: 0 est son propre opposé.

Somme de deux nombres relatifs

Pour calculer la somme de deux nombres relatifs :

- Si les deux nombres ont **le même signe** :
  - on **ajoute** les distances à zéro ;
  - la somme a le même signe que les deux nombres.
- Si les deux nombres ont **des signes différents** :
  - on **soustrait** les distances à zéro ;
  - la somme est du même signe que celui des nombres le plus éloigné de zéro.

Exemples :
$(+5)+(+7)=(+12)$ car $5+7=12$ et les deux nombres sont positifs.
$(-5)+(-7)=(-12)$ car $5+7=12$ et les deux nombres sont négatifs.
$(+5)+(-7)=(-2)$ car $7-5=2$ et -7 est le plus éloigné de zéro.
$(-5)+(+7)=(+2)$ car $7-5=2$ et $+7$ est le plus éloigné de zéro.

Différence de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemples :
$(-5)-(+7)=(-5)+(-7)=(-12)$
$(-6)-(-7)=(-6)+(+7)=(+1)$

Somme algébrique

L'expression $-5+7-8-9+9$ est une somme algébrique.
Elle correspond à la somme suivante : $(-5)+(+7)+(-8)+(-9)+(+9)$.
L'expression $5-7-8+9-9$ est une somme algébrique.
Elle correspond à la somme suivante : $(+5)+(-7)+(-8)+(+9)+(-9)$.

Dans cette écriture les symboles + et − donne le signe du nombre qui suit.
Ce ne sont plus des symboles opératoires car l'addition est sous-entendue.

On n'écrit pas le signe + devant le premier terme d'une somme algébrique.

Exemple pratique :
$A=(-6)+(-3)-(+7)-(-5)+(+9)$ peut s'écrire $A=(-6)+(-3)+(-7)+(+5)+(+9)$
Ainsi $A=-6-3-7+5+9$
On remarque que deux signes + consécutifs correspondent à un +, que deux signes − à un + et un signe + suivi d'un − ou le contraire à un −.

Produit de deux nombres relatifs

Pour calculer le produit de deux nombres relatifs :

- Si les deux nombres ont **le même signe** :
  - on multiplie les distances à zéro ;
  - le produit est **positif** .
- Si les deux nombres ont **des signes différents** :
  - on multiplie les distances à zéro ;
  - le produit est **négatif** .

Exemples :
$(+5)\times(+7)=(+35)$ $(-5)\times(-7)=(+35)$ $(+5)\times(-7)=(-35)$ $(-5)\times(+7)=(-35)$

Quotient de deux nombres relatifs

La règle est la même que pour le produit en calculant les quotients des distances à zéro.

Remarque :

$(+5)\div(+3)$ est positif.
$(-5)\div(-3)$ est positif.
$(-5)\div(+3)$ est négatif.
$(+5)\div(-3)$ est négatif.

$$\frac{+5}{+3}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{-5}{+3}=\frac{+5}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Les fractions

La fraction quotient

a et b étant deux nombres, $b \neq 0$

La fraction $\dfrac{a}{b}$ désigne l'unique nombre vérifiant : $b \times \dfrac{a}{b} = a$

Exemples :

$3 \times \dfrac{4}{3} = 4$ $\qquad 7 \times \dfrac{1}{7} = 1$ $\qquad -9 \times \dfrac{10}{-9} = 10$ $\qquad$ Comme $5 \times 3 = 15$ on a $3 = \dfrac{15}{5}$.

Égalité de fractions

a, b et k des nombres non nuls, alors $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$

Exemples de simplification de fractions :

$\dfrac{56}{64} = \dfrac{8 \times 7}{8 \times 8} = \dfrac{7}{8}$ $\qquad \dfrac{144}{180} = \dfrac{9 \times 16}{9 \times 20} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4 \times 4}{4 \times 5} = \dfrac{4}{5}$

Égalité des produits en croix

a, b, c et d des nombres non nuls.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ à la seule et unique condition que $a \times d = b \times c$

Exemple :

$\dfrac{56}{64} = \dfrac{7}{8}$ et on constate que $56 \times 8 = 448$ et que $64 \times 7 = 448$

Somme algébrique de deux fractions

a, b et c des nombres non nuls, alors $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$

Remarque :

Quand les fractions n'ont pas le même dénominateur il faut déterminer des fractions égales ayant le même dénominateur. Ce dénominateur commun est un multiple commun des dénominateurs. Il est conseillé de choisir le plus petit !

Exemples :

$A = \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3} + \dfrac{11}{3} = \dfrac{1-5+11}{3} = \dfrac{7}{3}$

$B = \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{7}{12}$

$B = \dfrac{15}{12} - \dfrac{7}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{4 \times 2}{4 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

$C = \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{7 \times 4}{5 \times 4} - \dfrac{7 \times 5}{4 \times 5}$

$C = \dfrac{28}{20} - \dfrac{35}{20} = -\dfrac{7}{20}$

$D = \dfrac{26}{15} - \dfrac{13}{12} = \dfrac{26 \times 4}{15 \times \text{ă}4} - \dfrac{13 \times 5}{12 \times 5}$

$D = \dfrac{104}{60} - \dfrac{65}{60} = \dfrac{39}{60} = \dfrac{13 \times 3}{20 \times 3} = \dfrac{13}{20}$

Produit de deux fractions

a, b, c et d des nombres non nuls, alors $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Remarque :

Il est conseillé de simplifier le produit avant de l'effectuer.

Exemples :

$E = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{8}{11} = \dfrac{7 \times 8}{3 \times 11} = \dfrac{56}{33}$

$F = \dfrac{64}{49} \times \dfrac{63}{56} = \dfrac{64 \times 63}{49 \times 56} = \dfrac{8 \times 8 \times 9 \times 7}{7 \times 7 \times 8 \times 7} = \dfrac{8 \times 9}{7 \times 7} = \dfrac{72}{49}$

Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

a et b des nombres non nuls.

Comme $a \times \dfrac{1}{a} = 1$, $\dfrac{1}{a}$ est l'inverse de a. Comme $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = 1$, $\dfrac{b}{a}$ est l'inverse de $\dfrac{a}{b}$.

Quotient de deux fractions

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

a, b, c et d des nombres non nuls, $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Exemples :

$G = \dfrac{7}{3} \div \dfrac{5}{9} = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{5} = \dfrac{63}{15} = \dfrac{21}{5}$

$H = \dfrac{5}{3} \div \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{3} \times \dfrac{6}{5} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{5 \times 6}{5 \times 3}$

$H = \dfrac{20}{9} + 2 = \dfrac{20}{9} + \dfrac{18}{9} = \dfrac{38}{9}$

$I = \dfrac{\dfrac{8}{5}}{\dfrac{16}{15}} = \dfrac{8}{5} \div \dfrac{16}{15} = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{15}{16}$

$I = \dfrac{8 \times 15}{5 \times 16} = \dfrac{8 \times 3 \times 5}{5 \times 8 \times 2} = \dfrac{3}{2}$

Les puissances de 10

Définition

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $2^3 \neq 2 \times 3$ en effet $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$1^{2020} = 1$, $(-1)^{2019} = -1$ car 2 019 est impair. $(-1)^{2020} = 1$ car 2 020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

Les puissances de 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n fois le nombre 10}} = 1\underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{\text{n zéros}}$$

Exemples :

$10^2 = 100$ $10^3 = 1\,000$ $10^6 = 1\,000\,000$ $10^9 = 1\,000\,000\,000$

Propriétés et extension de la définition

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entier supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n \text{ ; } 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0 \ , \ 0 \ . \ . \ . \ 1}_{\text{1 en nième position après la virgule}}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \qquad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p} \qquad (10^n)^p = 10^{n \times p}$$

Préfixe et puissances de 10 :

n	nano	10^{-9}	= 0,000 000 001	un milliardième
µ	micro	10^{-6}	= 0,000 001	un millionième
m	milli	10^{-3}	= 0,001	un millième
c	centi	10^{-2}	= 0,01	un centième
d	déci	10^{-1}	= 0,1	un dixième
		10^0	= 1	
da	déca	10^1	= 10	une dizaine
h	hecto	10^2	= 100	une centaine
k	kilo	10^3	= 1 000	un millier
M	méga	10^6	= 1 000 000	un million
G	giga	10^9	= 1 000 000 000	un milliard

Inverses

L'écriture scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme scientifique : $a \times 10^n$

Où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10, 10 non inclus.

a s'appelle la **mantisse** du nombre.

10^1 10^{-1}

$10^9 \longrightarrow$ 1 234 567 809,012 345 678 9 $\longleftarrow 10^{-9}$

10^0 10^{-2}

Exemples :

$2\,020 = 2{,}02 \times 10^3$ $1\,234\,567\,890 = 1{,}23456789 \times 10^9$ $-0{,}000\,001\,23 = -1{,}23 \times 10^{-6}$

$0{,}007\,8 = 7{,}8 \times 10^{-3}$ $-5 = -5 \times 10^0$ $15\,900 \times 10^5 = 1{,}59 \times 10^9$

Problème :

Une molécule d'eau, H_2O est constituée de un atome d'oxygène pour de deux atomes d'hydrogène.
Voici les masses de ces atomes :

- Un atome d'hydrogène : 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 67 kg;
- Un atome d'oxygène : 0,000 000 000 000 000 000 000 000 026 72 kg.

Un litre d'eau à une masse de 1 kg à 20°C, combien de molécules d'eau contient 1 L d'eau ?

On peut écrire les masses atomiques en écriture scientifique.
La masse de l'atome d'hydrogène : $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.
La masse de l'atome d'oxygène : $2{,}672 \times 10^{-26}$ kg soit $26{,}72 \times 10^{-27}$ kg. Ceci n'est pas une écriture scientifique, cela permet de montrer que l'oxygène est beaucoup plus lourd que l'hydrogène !
Une molécule d'eau a donc une masse de : $2 \times 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg} + 2{,}672 \times 10^{-26}\,\text{kg}$
Soit $3{,}34 \times 10^{-27}\,\text{kg} + 26{,}72 \times 10^{-27}\,\text{kg} = 30{,}06 \times 10^{-27}\,\text{kg} \approx 30 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ă $\approx 3 \times 10^{-26}\,\text{kg}$
Reste à effectuer $\dfrac{1\,\text{kg}}{3 \times 10^{-26}\,\text{kg}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1 \times 10^{-26}} \approx 0{,}33 \times 1 \times 10^{26} \approx 3{,}3 \times 10^{-1} \times 1 \times 10^{26} \approx 3{,}3 \times 10^{25}$
Il y a $3{,}3 \times 10^{25}$ atomes d'eau dans 1 L soit 33 000 000 000 000 000 000 000 000 atomes.

Arithmétique

La division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$,
Alors il existe un unique couple de nombres entiers naturels q et r tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende** , b le **diviseur** , q le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** .

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 2021 & 15 \\ \hline 52 & 134 \\ 71 & \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2022 & 56 \\ \hline 342 & 36 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2021 & 43 \\ \hline 301 & 47 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2022 & 6 \\ \hline 22 & 337 \\ 42 & \\ 0 & \end{array}$$

$2021 = 15 \times 134 + 11$ $\quad$ $2022 = 56 \times 36 + 6$ $\quad$ $2021 = 43 \times 47$ $\quad$ $2022 = 6 \times 337$

Remarques : un nombre entier est toujours divisible par 1 et par lui-même.
2 est le seul nombre premier pair. Tous les nombres impairs ne sont pas premiers, $9 = 3 \times 3$.

Vocabulaire

Si le reste de la **division euclidienne** est nul, comme quand on divise 2021 par 43, on dit que 2021 est un **multiple** de 43 ou que 2021 est **divisible** par 43 ou encore que 43 est un **diviseur** de 2021.

Exemples :
Un **nombre entier pair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut zéro.
Ainsi tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2 \times n$ où n est un entier naturel.

Un **nombre entier impair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut un.
Ainsi tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2 \times n + 1$ où n est un entier naturel.

Critères de divisibilité

— Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
— Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
— Un entier est divisible par **4** si le nombre formé par le chiffre de ses dizaines et celui de ses unités est un multiple de 4.
— Un entier est divisible par **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
— Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
— Un entier est divisible par **10** si son chiffre des unités est 0.

Nombres premiers

Un nombre entier est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs.
Un nombre entier est **premier** s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même !

Exemple : voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 91 ; 97

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples : $2021 = 43 \times 47$; $2022 = 2 \times 3 \times 337$; $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Fraction irréductible

Une **fraction est irréductible** si elle n'est pas simplifiable. Cela signifie que 1 est le seul diviseur commun à son numérateur et son dénominateur.

Applications :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ $\qquad$ $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Ainsi $2 \times 2 = 4$ est un diviseur de 360 ; $3 \times 3 \times 5 = 45$ est un diviseur de 540 ...

$\dfrac{360}{540} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} = \dfrac{2}{3}$. On a simplifié par $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$.

180 est le plus grand diviseur commun à 360 et 540. On a $360 = 2 \times 180$ et $540 = 3 \times 180$.

Si nous avons à notre disposition 360 fleurs rouges et 540 fleurs jaunes, nous pouvons au maximum réaliser 180 bouquets tous identiques composés chacun de 2 fleurs rouges et 3 fleurs jaunes.

Calcul littéral

La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.
Plus précisement, si a, b et k sont des nombres alors

$$\underbrace{k \times (a+b)}_{\text{Produit}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme}}$$

Développer $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ Factoriser

Réduire une expression :

Cela revient à effectuer les sommes des termes de même nature en factorisant.

$A = 3x - 2x^2 + 7 - 6x + 10x^2 + 9$

$A = x^2 \times (-2+10) + x \times (3-6) + 7 + 9$ (on n'écrit pas cette étape)

$\boxed{A = 8x^2 - 3x + 16}$

Exemples :

Développer et réduire :

$B = 3x(5x-1) - 3(-2x+5) - 5x^2$

$B = 15x^2 - 3x + 6x - 15 - 5x^2$

$\boxed{B = 10x^2 + 3x - 15}$

(somme de trois termes)

Factoriser :

$C = 15x + 10x^2$

$C = 5x \times 3 + 5x \times 2x$

$\boxed{C = 5x(3+2x)}$

(produit de deux facteurs)

La « double »distributivité

En utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition on peut développer des expressions plus complexes.
Si a, b, c, d sont des nombres alors

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

On a distribué deux fois : le a puis le b.
Cette formule n'est pas à apprendre... mais à comprendre !
On pourrait imaginer la « triple » ou la « quintuple » distributivité !

Développer et réduire des expressions complexes :

$D = (x-3)(2x-1) + (5x+3)(4x+1)$

$D = (2x^2 - x - 6x + 3) + (20x^2 + 5x + 12x + 3)$

$D = 2x^2 - 7x + 3 + 20x^2 + 17x + 3$

$\boxed{D = 22x^2 + 10x + 6}$

$E = (3x+7)(5x-2) - (3x+8)(1-2x)$

Le signe $-$ entre les deux produits !

$E = (15x^2 - 6x + 35x - 14) - (3x - 6x^2 + 8 - 16x)$

$E = 15x^2 + 29x - 14 - 3x + 6x^2 - 8 + 16x$

$\boxed{E = 21x^2 + 42x - 22}$

Factoriser des expressions complexes :

$F = (3x-7)(5x-1) - (3x-7)(2x+1)$

$F = (3x-7)\,[(5x-1) - (2x+1)]$

$F = (3x-7)(5x-1-2x-1)$

$\boxed{F = (3x-7)(3x-2)}$

$G = (5x-3)^2 + (5x-3)$

$G = (5x-3)(5x-3) + (5x-3) \times 1$

$G = (5x-3)\,[(5x-3) + 1]$

$G = (5x-3)(5x-3+1)$

$\boxed{G = (5x-3)(5x-2)}$

Les identités remarquables

Si a et b sont des nombres alors

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Développer $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ Factoriser

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}\right\} \textit{Hors programme}$$

Usage des identités remarquables :

Développer et réduire :

$H = (x+5)(x-5)$

$\boxed{H = x^2 - 25}$

$I = (6x+3)(6x-3)$

$\boxed{I = 36x^2 - 9}$

$J = (x+4)^2$

$\boxed{J = x^2 + 8x + 16}$

$K = (5x-3)^2$

$\boxed{K = 25x^2 - 30x + 9}$

Factoriser

$L = 25x^2 - 36$

$L = (5x)^2 - 6^2$

$\boxed{L = (5x+6)(5x-6)}$

$M = (3x-2)^2 - (7x+5)^2$

$M = [(3x-2) + (7x+5)]\,[(3x-2) - (7x+5)]$

$M = (3x-2+7x+5)(3x-2-7x-5)$

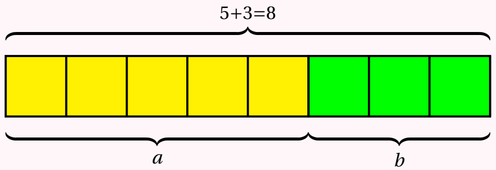
$\boxed{M = (10x+3)(-4x-7)}$

Ratio

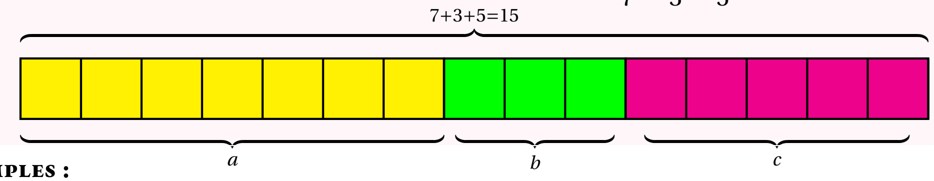
Définition sur un exemple générique

On dit que deux nombres a et b sont dans **le ratio** $5:3$ si $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{3}$.

On a aussi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$, ce qui explique le choix de l'expression « être dans le ratio **5** pour **3** ».



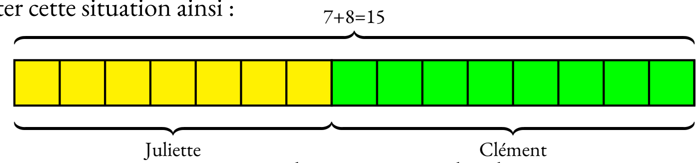
On dit que trois nombres a, b et c sont dans **le ratio** $7:3:5$ si $\dfrac{a}{7}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{5}$.



Exemples :

1. Juliette et Clément ont partagé un sachet de 135 bonbons selon le ratio $7:8$.
Combien chacun a-t-il reçu ?

Notons j et c le nombre de bonbons reçus par chacun. On a $\dfrac{j}{7}=\dfrac{c}{8}$.
On peut représenter cette situation ainsi :



Il y a donc 15 parts en tout. Un part correspond à $135\div 15=9$ bonbons.
Juliette a reçu $9\times 7=63$ bonbons et Clément $9\times 8=72$ bonbons.

On a bien $\dfrac{63}{7}=\dfrac{72}{8}=9$ et même $\dfrac{63}{72}=\dfrac{9\times 7}{9\times 8}=\dfrac{7}{8}$.
On peut aussi représenter ces informations dans un tableau en ajoutant une colonne pour le total :

	Juliette	Clément	Total
Bonbons	$\dfrac{135\times 7}{15}=\dfrac{945}{15}=63$	$\dfrac{135\times 8}{15}=\dfrac{1080}{15}=72$	135
Ratio	7	8	15

2. Le **sexe-ratio** est un indicateur démographique qui permet d'exprimer le nombre de mâles par rapport au nombre de femelles d'une population donnée.
En France on dit que le sexe-ratio est de $105:100$ parce qu'il naît environ 105 garçons pour 100 filles.
En 2022, il y a eu 723 000 naissances.
En partageant 723 000 en $105+100=205$ parts on arrive à $723\,000\div 205\approx 3526{,}83$.
Il est né environ $3526{,}83\times 105=370\,317$ garçons pour $3526{,}83\times 100=352\,683$ filles à l'unité près.

3. Un plan à **l'échelle** $1:10\,000$ signifie que les mesures sur le plan p et les mesures réelles r sont dans un ratio $1:10\,000$.
On a ainsi $\dfrac{p}{1}=\dfrac{r}{10\,000}$ soit $p=\dfrac{r}{10\,000}$.
Les mesures sur le plan sont 10 000 fois plus petites que celles de la réalité.

4. Un écran de télévision est au **format** $16:9$.
Cela signifie que sa longueur L et sa largeur l vérifient $\dfrac{L}{16}=\dfrac{l}{9}$ ou que $\dfrac{L}{l}=\dfrac{16}{9}$.

5. Les mesures d'un pavé droit sont au ratio $2:5:7$.
Si la plus grande mesure vaut 91 cm, combien valent les deux autres ?

Comme $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{91}{7}$ on peut utiliser la règle de trois :

$$x=\frac{2\times 91\,\text{cm}}{7}=\frac{182\,\text{cm}}{7}=26\,\text{cm et } y=\frac{5\times 91\,\text{cm}}{7}=65\,\text{cm}.$$

6. Dans une classe de 30 élèves, le ratio de garçons filles est de $40:60$. On a donc $\dfrac{g}{f}=\dfrac{40}{60}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Ce ratio est donc équivalent à $4:6$ et $2:3$.
De plus la somme $40+60=100$, il y a donc 40 % de garçons et 60 % de filles soit 12 garçons et 18 filles.

7. Pour produire un béton classique il faut du ciment, du sable, du gravier et de l'eau suivant le ratio $1:2:3:6$

8. Le fameux gateau quatre quarts est constitué d'un quart de lait, un quart de farine, un quart de sucre et un quart d'oeufs.
Ces ingrédients sont donc dans le ratio $1:1:1:1$.

Probabilités

Vocabulaire et exemples :

— Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu. Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle une épreuve ;
Lancer un dé à six faces ou lancer une pièce de monnaie sont des expériences aléatoires à une épreuve.
Lancer deux dés à six faces ou deux pièces de monnaie sont des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Le hasard n'a pas de mémoire : quand on répéte une expérience aléatoire, les résultats obtenus dans le passé n'influencent pas les futurs résultats.
Le tirage du Loto obtenu la semaine dernière a la même probabilité de survenir cette semaine !

— Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat de cette expérience. Un événement est constitué d'une ou plusieurs issues de cette expérience.
« Obtenir trois avec un dé cubique »ou « Obtenir face en lancant une pièce »sont des issues.
« Obtenir un nombre pair en lancant un dé »ou « Obtenir 7 en faisant la somme de deux dés sont des événements ».

— La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence d'apparition d'un résultat. On peut l'exprimer en pourcentage, en fraction ou sous forme décimale.
Il y a 1 chance sur 6 soit environ $16,7$ % d'obtenir 4 avec un dé cubique équilibré. Il y a 50 % de faire pile avec une pièce non truquée.

— Un événement est impossible quand sa probabilité vaut 0 ;
L'événement « Obtenir 13 en faisant la somme de deux dés cubiques »est impossible.

— Un événement est certain quand sa probabilité vaut 1 ;
L'événement « Obtenir un nombre positif avec un dé cubique »est certain.

— Deux événements sont contraires quand l'un ou l'autre se produit de manière certaine. Cela signifie que la somme de leurs probabilités est égale à 1.
Les événements « Obtenir une carte noire »et « Obtenir une carte rouge »sont contraires quand on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Approche fréquentiste :

Lorsqu'on répéte une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'un événement approche la probabilité de cet événement.
Quand on lance une pièce de monnaie 10 fois, on peut obtenir 10 fois la même face. Si la pièce n'est pas truquée, plus on répéte cette expérience, plus la fréquence d'apparition de Pile et de Face s'approche de $\frac{1}{2} = 0,5$ ou 50 %

Loi de probabilité et équiprobabilité :

— La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est la connaissance des probabilités de toutes les issues possibles de cette expérience.

— Il est souvent difficile de trouver la loi de probabilité d'une expérience aléatoire. Parfois on se contente d'une approche fréquentiste qui en répétant l'expérience donne une valeur approchée de la probabilité cherchée.
Quand on lance une punaise à tête plate, il est difficile de déterminer la probabilité qu'elle tombe à plat ou sur le côté.
La probabilité de gagner au Loto la semaine prochaine est difficile à calculer et demande des compétences de lycée.

— Si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité de se réaliser, on dit que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. On parle aussi de loi de probabilité uniforme. Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\text{Probabilité de l'événement} = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à cet événement}}{\text{Nombre d'issues totales}}$$

Le lancer d'une pièce de monnaie non truquée, d'un dé cubique équilibré, la prise d'une boule non discernable au toucher... sont autant d'expériences aléatoires dont les issues sont équiprobables.

Expérience aléatoire à deux épreuves :

— Une expérience aléatoire à deux épreuves est constituée de deux épreuves indépendantes de deux expériences aléatoires à une épreuve.
On lance deux dés cubiques pour en faire la somme, on lance deux pièces de monnaies équilibrée, on fait tourner une roue et on pioche une boule... voici des expériences aléatoires à deux épreuves.

— Il faut bien choisir la définition des issues en veillant à ce qu'elles soient équiprobables. On utilise souvent pour cela un tableau à deux entrées ou un arbre.
On lance deux dés équilibrés et on fait la somme. Voici les issues possibles sous forme de tableau :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 36 issues équiprobables.
La probabilité d'obtenir un 7 est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ soit environ $16,7$ %.
La probabilité d'obtenir un nombre premier est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ soit environ $41,7$ %.
La probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 9 vaut $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ soit environ $27,8$ %

Statistiques

Vocabulaire

Une **série statistique** est une liste de valeurs obtenues en étudiant une **population** (des élèves, des plantes, des factures...). Pour chaque **individu** de la population étudiée on peut observer un ou plusieurs **caractères** (tailles, masse, âge, prix, couleur...), c'est à dire une information. Un caractère peut être **qualitatif** (couleur, difficulté, goût...) ou **quantitatif** (quantité, nombre, prix...).
On connaît parfois toutes les valeurs d'une série statistique. Quelquefois on ne connaît que la **répartition** des valeurs étudiées.
L'effectif total d'une série désigne le nombre total d'individus étudiés. Dans un tableau de répartition on utilise le mot **effectif** pour le nombre d'individus concernés par une valeur du caractère.
La fréquence d'une valeur du caractère étudié correspond au quotient de l'effectif de ce caractère sur l'effectif total. Une fréquence peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un pourcentage ou d'un nombre décimal approché ou non.

Exemples :

Voici une première série qualitative : la couleur des yeux de 10 personnes :
Bleu – Bleu – Vert – Vert – Vert – Marron – Marron – Marron – Marron – Noir
Voici une seconde série quantitative : les notes d'un groupe de 9 élèves au diplôme de fin d'année :
10 – 05 – 15 – 20 – 11 – 15 – 15 – 03 – 17
Voici une troisième série quantitative : la répartition des notes sur les 156 élèves de dernière année :

Notes	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20]$
Effectif	26	54	60	16

Moyenne arithmétique et pondérée

La **moyenne** ou **moyenne arithmétique** de la série de n valeurs : $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ est :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

La **moyenne pondérée** de la série de n valeurs $x_1, x_2, x_2, \dots x_n$ pondérées par leurs effectifs respectifs $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ est :

$$\frac{a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + \dots + a_n \times x_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

La moyenne d'une série statistique est un nombre qui correspond à un partage équitable de toutes les valeurs de la série.

Exemples :
La première série est qualitative, la moyenne n'a pas de sens pour cette série.
La seconde série a pour moyenne :

$$\frac{10+5+15+20+11+15+15+3+17}{9} = \frac{111}{9} \approx 12{,}33 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

Pour la troisième série, il faut calculer la moyenne des centres des intervalles pondérée par l'effectif.

$$\frac{2{,}5 \times 26 + 7{,}5 \times 54 + 12{,}5 \times 60 + 17{,}5 \times 16}{26+54+60+16} = \frac{1500}{156} \approx 9{,}62 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

Étendue

L'étendue d'une série statistique est l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale de cette série.
L'étendue donne une information sur la dispersion des valeurs de la série : plus l'étendue est petite moins la série est dispersée.

Exemple :
L'étendue de la deuxième série est $20 - 3 = 17$
Pour la deuxième série on peut seulement dire que l'étendue est inférieure ou égale à 20.

Médiane

La **médiane** d'une série statistique est un nombre qui partage la série en deux séries ayant le même effectif.
La moitié des valeurs sont inférieures à la médiane, l'autre moitié sont supérieures.
La médiane donne une information sur la dispersion des valeurs de la série. Son écart avec la moyenne est souvent intéressant.

Méthode :
Pour calculer la médiane d'une série statistique il faut classer les valeurs du caractère dans l'ordre croissant puis déterminer la valeur centrale.

— si l'effectif est impair, $2n+1$, la médiane est la $n+1^{e}$ valeur;

— si l'effectif est pair, $2n$, la médiane est la moyenne de la n^{e} et $n+1^{e}$ valeur.
Tout nombre compris entre la n^{e} et la $n+1^{e}$ valeur est une médiane dans ce cas.

Exemples :
Pour la deuxième série, l'effectif total est impair : $9 = 2 \times 4 + 1$, la médiane est la $4+1 = 5^{e}$ valeur soit 15.
Pour la troisième série, l'effectif total est pair : $156 = 2 \times 78$, la médiane est la moyenne de la 78^{e} et 79^{e} valeurs.
D'après le tableau cette médiane se situe dans l'intervalle $[5;10[$.

Généralités sur les fonctions

Définition et vocabulaire

Une **fonction** est un programme de calcul qui à un nombre de départ associe un unique résultat.

On note $f : x \to f(x)$ la fonction f qui à un nombre de départ x associe $f(x)$.

On dit que :

— $f(x)$ est l'**image** du nombre x par la fonction f ;

— x a pour **image** le nombre $f(x)$ par la fonction f ;

— x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f ;

— $f(x)$ a pour **antécédent** x par la fonction f.

Exemple :

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre;

— ajouter 1;

— multiplier par le nombre de départ;

— enlever 23;

— écrire le résultat.

On note x le nombre de départ.
On obtient successivement :

— x;

— $x+1$;

— $x(x+1)$;

— $x(x+1)-23$.

f la fonction correspondante :

$$f : x \to f(x) = x(x+1)-23$$

En prenant $x=5$ au départ, on obtient $5\times(5+1)-23 = 5\times 6-23 = 30-23 = 7$.

On note $f(5)=7$.

On dit que :

— 7 est l'image de 5 par la fonction f ;

— 5 a pour image 7 par la fonction f ;

— 5 est un antécédent de 7 par la fonction f ;

— 7 a pour antécédent 5 par la fonction f.

Remarque :
Un nombre peut posséder plusieurs antécédents par une fonction.
Par exemple, $f(-6) = (-6)\times((-6)+1)-23 = (-6)\times(-5)-23 = 30-23 = 7$.
5 et -6 sont deux antécédents de 7 par la fonction f.

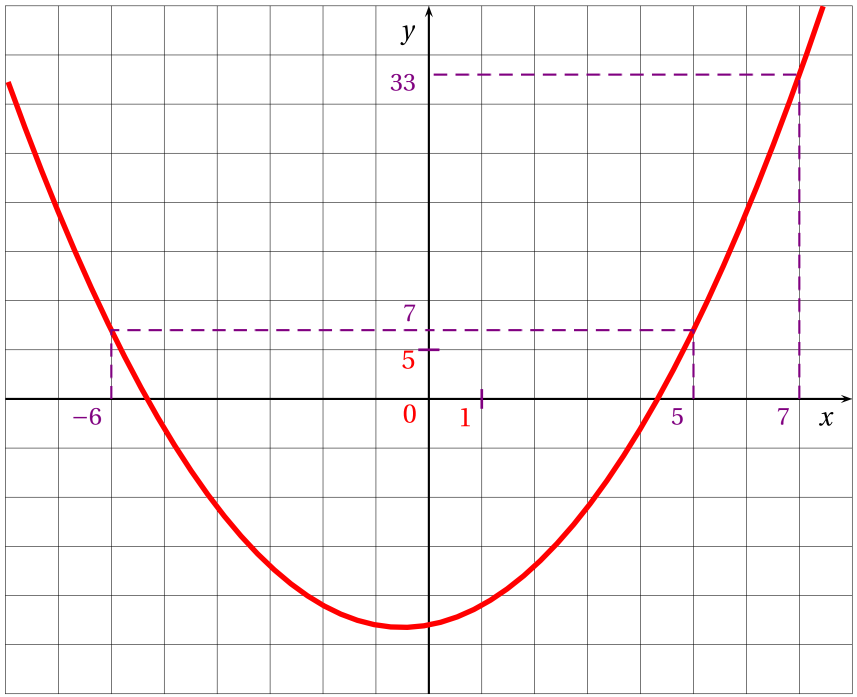
On représente souvent une fonction par un tableau contenant certaines de ses valeurs.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	19	7	-3	-11	-17	-21	-23	-23	-21	-17	-11	-3	7	19	33

On voit par exemple que 33 est l'image de 7, que -1 et 0 sont deux antécédents de -23.

Représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique de la fonction f est la figure de géométrie constituée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un nombre quelconque.



Remarque :

Une fonction peut-être définie sous plusieurs formes :

— Un programme de calcul;

— Une expression littérale;

— Un tableau de valeurs;

— Une représentation graphique.

Pourcentages et fonctions linéaires

Augmentation et diminution en pourcentage

x est un nombre positif.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $1+\dfrac{x}{100}$;

Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $1-\dfrac{x}{100}$.

Coefficient d'agrandissement-réduction :

Quand on multiplie une grandeur par un nombre supérieur à 1 on augmente la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par 1 on ne change pas la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par un nombre inférieur à 1 on diminue la grandeur.

Exemple :

Un commerçant diminue tous les prix de 30 % puis un peu plus tard il augmente tous les prix de 30 %. Les prix ont-ils retrouvé le niveau de départ ?

Prenons pour exemple un prix $\mathrm{P} = 67$ €.

Diminuer ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1-\dfrac{30}{100}=1-0,30=0,70$

Le prix diminué est donc $\mathrm{D} = 0,70\times \mathrm{P} = 0,70\times 67$ € $= 46,90$ €.

Augmenter ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1+\dfrac{30}{100}=1+0,30=1,30$.

Le prix augmenté est donc $\mathrm{A} = 1,30\times \mathrm{D} = 1,30\times 46,90$ € $= 60,97$ €.

On constate que le prix final est plus bas que le prix initial. L'augmentation de 30 % ne suffit pas à remonter jusqu'au prix initial.

De manière plus littérale on a : $\mathrm{A} = 1,30\times \mathrm{D} = 1,30\times 0,70\times \mathrm{P}$ or $1,30\times 0,70 = 0,91$. Ainsi $\mathrm{A} = 0,91\times \mathrm{P}$.

Comme $0,91 = 1-0,09$ car $1-0,91 = 0,09$, on a $0,91 = 1-\dfrac{9}{100}$. $\boxed{\text{Il s'agit d'un baisse de 9 \%}}$.

On peut se demander quel pourcentage d'augmentation aurait permis de remonter au prix initial.
Cela revient à résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est k :

$$\begin{aligned} 0,70\times k\times \mathrm{P} &= \mathrm{P}\\ 0,70\times k &= 1\\ k &= \frac{1}{0,70}\\ k &\approx 1,43 \end{aligned}$$

Comme $1,43 = 1+\dfrac{43}{100}$, $\boxed{\text{il aurait fallu augmenter le prix de 43 \%}}$.

La fonction linéaire

a un nombre quelconque fixé.
La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \to f(x) = ax$$

Exemples :

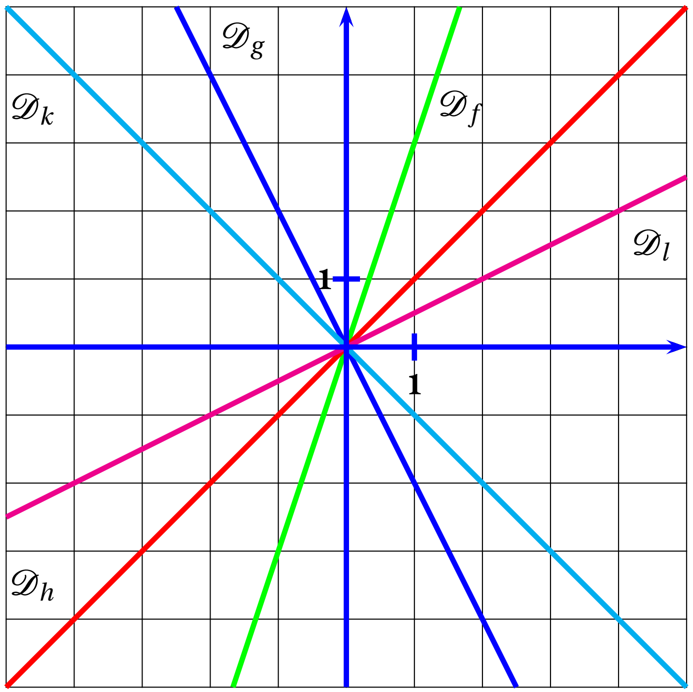
- $f(x) = 3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3 ;
- $g(x) = -2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2 ;
- $h(x) = x$ est la fonction linéaire de coefficient 1 ;
- $k(x) = -x$ est la fonction linéaire de coefficient -1 ;
- $l(x) = \dfrac{x}{2}$ est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$;
- $m(x) = 0$ est la fonction linéaire de coefficient 0 ;

Propriétés de la fonction linéaire

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau constitué de deux grandeurs proportionnelles dont le coefficient de proportionnalité est celui de la fonction.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

Exemples :



Les fonctions affines

Définition

a et b deux nombres quelconques fixés.

La fonction affine de paramètres a et b est la fonction définie ainsi :

$$f(x) = ax + b$$

a s'appelle le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété

Une fonction **linéaire** est une fonction **affine** particulière.

Exemple :

- $f(x) = 5x + 3$ est une fonction affine avec $a = 5$ et $b = 3$;
- $g(x) = -5x - \frac{1}{3}$ est une fonction affine avec $a = -5$ et $b = -\frac{1}{3}$;
- $h(x) = \frac{x}{6} + 1$ est une fonction affine avec $a = \frac{1}{6}$ et $b = 1$;
- $k(x) = -7x$ est une fonction affine avec $a = -7$ et $b = 0$, elle est aussi **linéaire** ;
- $l(x) = 2022$ est une fonction affine avec $a = 0$ et $b = 2022$, elle est **constante** ;
- $p(x) = 7 - 8x$ est une fonction affine avec $a = -8$ et $b = 7$.

Propriété

f une fonction affine de paramètres a et b.

L'image de zéro est égale à b, c'est-à-dire $f(0) = b$.

Sa représentation graphique est une droite passant par le point M$(0; b)$

Si $b = 0$, la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Remarque :

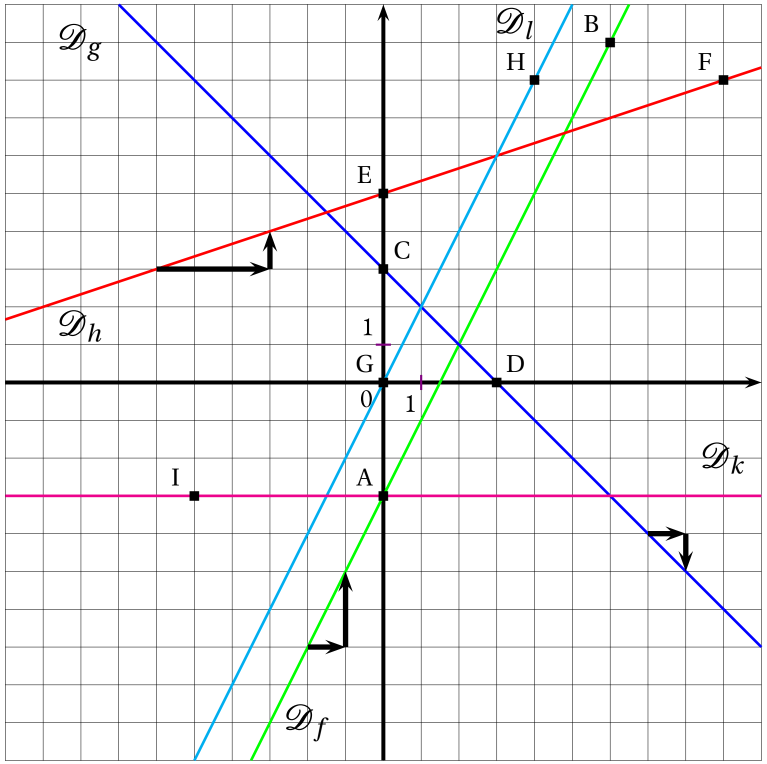
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine f, il suffit de connaître deux points pour tracer la droite. Voici comment obtenir ces deux points :

- On calcule l'image de zéro, $f(0) = b$,
  la droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$;
- On calcule l'image d'un autre nombre $f(w)$,
  la droite passe par le point de coordonnées $\big(w; f(w)\big)$.

Exemples :

Représentons graphiquement : $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -x + 3$, $h(x) = \frac{x}{3} + 5$, $l(x) = 2x$ et $k(x) = -3$

- $f(0) = -3$ et $f(6) = 9$, la droite représentant f passe par A$(0; -3)$ et B$(6; 9)$;
- $g(0) = 3$ et $g(3) = 0$, la droite représentant g passe par C$(0; 3)$ et D$(3; 0)$;
- $h(0) = 5$ et $h(9) = 8$, la droite représentant h passe par E$(0; 5)$ et F$(9; 8)$;
- $l(0) = 0$ et $l(4) = 8$, la droite représentant l passe par G$(0; 0)$ et H$(4; 8)$;
- $k(0) = -3$ et $k(-5) = -3$, la droite représentant k passe par A$(0; -3)$ et I$(-5; -3)$.



Interprétation graphique :

- l'ordonnée à l'origine b se lit à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ;
- le coefficient directeur a correspond à la pente de la droite :
  - ce coefficient correspond à la variation des ordonnées entre deux points de la droite dont les abscisses varient d'une unité ;
  - il est positif quand « la droite monte » ;
  - il est négatif quand « la droite descend » ;
  - il est nul quand « la droite est horizontale » ;
  - deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.
- le point d'intersection des droites représentant deux fonctions f et g a pour abscisse la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Périmètres et aires

Définition

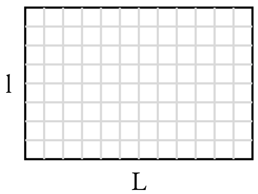
La **périmètre** d'une figure plane est la **longueur** de son contour.
Pour un polygone, il s'agit de la somme des longueurs de ses côtés.

L'**aire** est une grandeur qui correspond à la **surface** d'une figure.

On mesure le **périmètre** en **mètre** (m) et l'**aire** en **mètre carré** (m^2).

Exemples fondamentaux :

Le rectangle



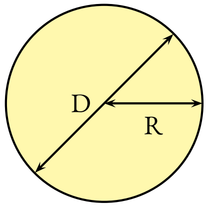
Le périmètre est égal à la somme :

$$L + l + L + l = 2L + 2l = 2(L + l)$$

L'aire est égale au nombre de carrés unités :

$$L \times l$$

Le cercle et le disque



Le périmètre est égal à : πD ou $2\pi R$

L'aire est égale à : πR^2 où $\pi \approx 3,14$

Le périmètre du cercle est proportionnel au double du rayon.
L'aire du disque est proportionnel au carré du rayon.

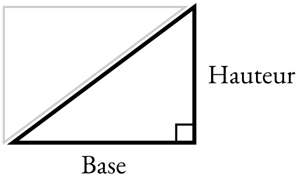
Dans les deux cas, le coefficient de proportionnalité est π.

Méthode de calcul

On peut calculer la plupart des aires polygonales par addition ou soustraction d'aires de polygones simples.
Il est souvent inutile d'apprendre des formules complexes par coeur !

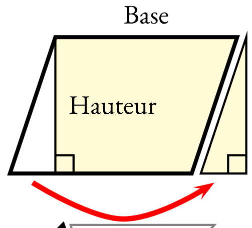
Exemples :

Le triangle rectangle



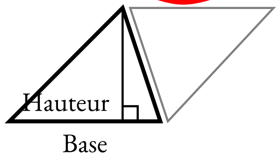
Il s'agit de la moitié d'un rectangle. L'aire est égale à : $\dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$

Le parallélogramme



On peut le découper pour obtenir un rectangle. L'aire est égale à : Base $\times$ Hauteur

Le triangle



On peut en assembler deux pour former un parallèlogramme.
L'aire est égale à : $\dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$

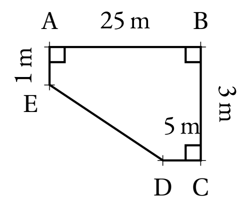
Unités de mesure

L'unité de mesure des longueurs est le **mètre : m**
1 m=10 dm=100 cm=1000 mm
1 km=10 hm=100 dam=1000 m

L'unité de mesure des aires est l'aire d'un carré de 1 m de côté, le **mètre carré : m^2**
1 m^2=100 dm^2=10 000 cm^2=1 000 000 mm^2
1 km^2=100 hm^2=10 000 dam^2=1 000 000 m^2

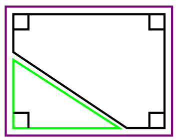
Exemple complexe :

On veut calculer le périmètre et l'aire du polygone suivant :



Pour calculer le périmètre, il faut faire la somme des quatre mesures et obtenir la grandeur manquante en utilisante le théorème de Pythagore.
On obtient $34 + \sqrt{404}\ \text{m} \approx 54,1\ \text{m}$

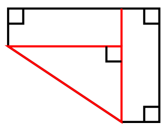
Pour calculer l'aire, on peut utiliser deux méthodes :



$\text{Aire} = 25\,\text{m} \times 3\,\text{m} - \dfrac{20\,\text{m} \times 2\,\text{m}}{2}$

$\text{Aire} = 75\,\text{m}^2 - 20\,\text{m}^2$

$\text{Aire} = 55\,\text{m}^2$



$\text{Aire} = \dfrac{20\,\text{m} \times 2\,\text{m}}{2} + 20\,\text{m} \times 1\,\text{m} + 5\,\text{m} \times 3\,\text{m}$

$\text{Aire} = 20\,\text{m}^2 + 20\,\text{m}^2 + 15\,\text{m}^2$

$\text{Aire} = 55\,\text{m}^2$

Solides et volumes

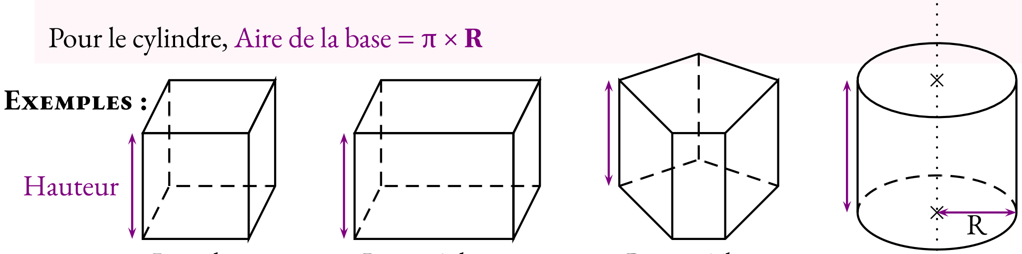
Les prismes droits et le cylindre

Un **prisme droit** est un polyèdre constitué par deux faces polygonales parallèles et superposables reliées par des faces rectangulaires.
Un **cylindre** est un solide constitué par deux disques parallèles, de même rayon, reliés par une surface de révolution.
Les deux faces parallèles sont **les bases** du solide.
La distance entre les bases est **la hauteur** du solide.
Le volume d'un cylindre ou d'un prisme droit est donné par la formule :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

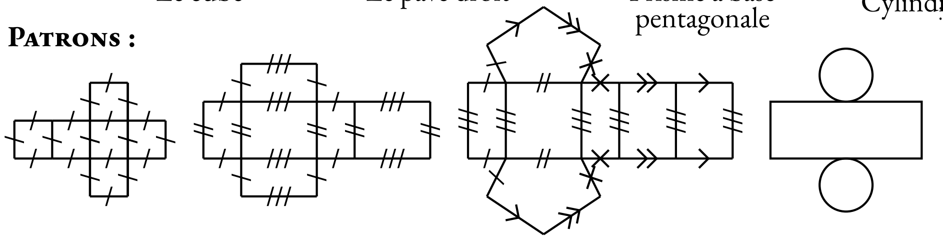
Pour le cylindre, Aire de la base $= \pi \times \mathbf{R}$

Exemples :



Le cube — Le pavé droit — Prisme à base pentagonale — Cylindre droit

Patrons :



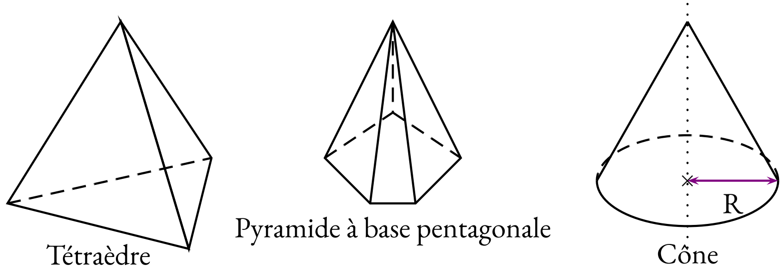
Les pyramides et le cône

Une **pyramide** est un polyèdre constitué d'une base polygonale et d'un sommet principal reliés par des faces triangulaires.
Un **cône** est un solide constitué d'une base circulaire et d'un sommet principal reliés par une surface de révolution.
La **hauteur** est la distance entre la base et le sommet principal.
Dans un cône, un segment reliant le sommet principal et un point du cercle de base s'appelle **une génératrice** .

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

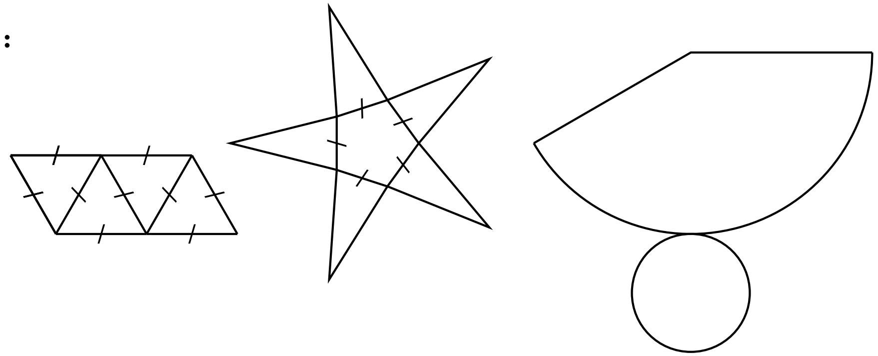
Dans le cas du cône, Aire de la base $= \pi \times \mathbf{R}$.

Exemples :



Tétraèdre — Pyramide à base pentagonale — Cône

Patrons :



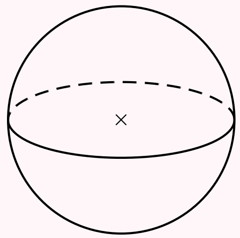
La sphère et la boule

Une **sphère** de centre O et de rayon R est une surface constituée des points situés exactement à la distance R du centre O.
Une **boule** de centre O et de rayon R est un solide constitué des point situées à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

La boule ne possède pas de patron.

$$\text{Aire de la sphère} = \mathbf{4\pi R^2}$$

$$\text{Volume de la boule} = \mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



Unités et conversion

Un mètre cube ($1\,m^3$) est le volume d'un cube de 1 m de côté.

$1\,m^3$=1000 dm^3	1 L=1 dm^3	1 L=1000 mL
$1\,m^3$=1 000 000 cm^3	1 L=1000 cm^3	1 cm^3=1 mL
$1\,m^3$=1 000 000 000 mm^3	$1\,m^3$=1000 L	1 mL=1000 mm^3

Coefficient d'agrandissement/réduction

Si on multiplie les longueurs d'une figure par un nombre $k > 0$ alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Cercle, disque, sphère et boule

Le plan : cercle et disque

R un nombre positif ou nul, O un point du plan.

Le cercle de centre O et de rayon R est un **courbe** constituée de tous les points du plan situés à exactement la distance R du centre O.

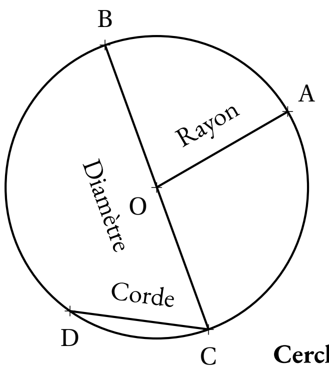
Le disque de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points du plan situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

Vocabulaire

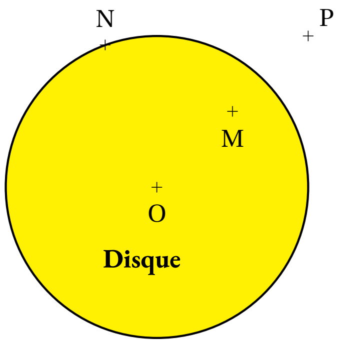
Un **rayon** est un segment joignant le centre à un point quelconque du cercle.
Une **corde** est un segment joignant deux points du cercle.
Un **diamètre** est une corde passant par le centre du cercle.

La longueur d'un rayon s'appelle **le rayon du cercle** , on utilise le même nom pour le segment et sa longueur.
Le diamètre a une longueur égale au double du rayon du cercle.
La longueur maximale d'une corde est égale au diamètre du cercle.

Illustrations :



Cercle



OM < R

ON = R

OP > R

Périmètre et aire

Le **périmètre** d'un cercle de rayon R ou de diamètre D mesure sa longueur, il vaut : $\pi \times \mathbf{D} = \mathbf{2}\pi \times \mathbf{R}$.
L'**aire** d'un disque de rayon R mesure sa surface, elle vaut : $\pi \times \mathbf{R}^2$

L'espace : sphère et boule

R un nombre positif ou nul, O un point de l'espace.

La **sphère** de centre O et de rayon R est une **surface** constituée de tous les points de l'espace situés à exactement la distance R du centre O.

La **boule** de centre O et de rayon R est un **solide** constitué de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R du centre O.

Aire et volume

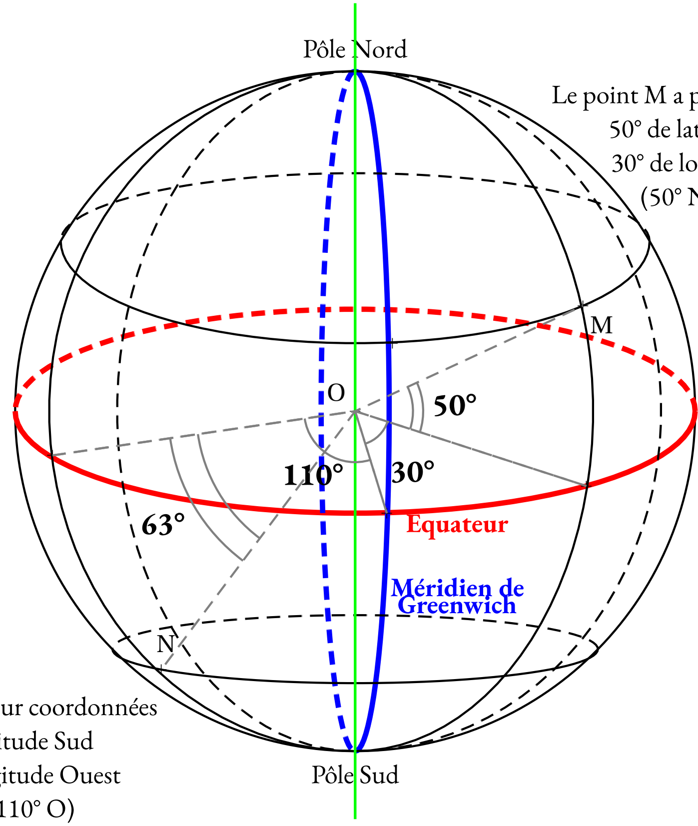
L'**aire** d'une sphère R mesure sa surface, elle vaut : $\mathbf{4\pi R^2}$.

Le **volume** d'une boule de rayon R mesure son « intérieur », il vaut : $\mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Coordonnées géographiques

Soit une sphère de rayon R et de centre O.
Un **grand cercle** de la sphère est un cercle de rayon R et de centre O.
Un grand cercle partage la sphère en deux **hémisphères** .
Sur la **sphère terrestre** , l'**équateur** et les **méridiens** sont des grands cercles.
Un **parallèle** est un cercle de la sphère terrestre situé à l'intersection avec un plan parallèle au plan équatorial.
Tout les points de la sphère situés sur un même parallèle sont à la même **latitude** .
Un **méridien** est un cercle de la sphère terrrestre passant par les pôles Nord et Sud.
Tous les points de la sphère situés sur un même méridien sont à la même **longitude** .

Exemples :



Le point M a pour coordonnées
50° de latitude Nord
30° de longitude Est
(50° N; 30° E)

Le point N a pour coordonnées
63° de latitude Sud
110° de longitude Ouest
(63° S; 110° O)

Grandeurs simples et composées

Les grandeurs simples

Il y a sept grandeurs simples qui correspondent à des propriétés des objets de la nature. On peut les mesurer ou les calculer. À chacune de ses grandeurs correspond une unité de mesure :

La longueur mesurée en mètre (m).
Le temps mesuré en seconde (s).
La masse mesurée en gramme (g).
La température mesurée en kelvin (K).
Le courant électrique mesuré en ampère (A).
La quantité de matière mesurée en mole (mol).
L'intensité lumineuse mesurée en candela (cd).

Remarque :
Au collège, en mathématique, on utilise le plus souvent les quatre premières grandeurs.
La température est habituellement mesurée en degré Celsius, $T(°C) = T(K) - 273,15$

Multiples et sous-multiples d'une grandeur simple

On utilise les préfixes et les abréviations suivantes pour désigner les multiples et sous-multiples d'une unité simple :

giga — **G** — milliard — $10^9 = 1\,000\,000\,000$;
mega — **M** — million — $10^6 = 1\,000\,000$;
kilo — **k** — mille — $10^3 = 1000$;
hecto — **h** — cent — $10^2 = 100$;
deca — **da** — dix — $10^1 = 10$;
nano — **n** — milliardième — $10^{-9} = 0,000\,000\,001$;
micro — **µ** — millionième — $10^{-6} = 0,000\,001$;
milli — **m** — millième — $10^{-3} = 0,001$;
centi — **c** — centième — $10^{-2} = 0,01$;
deci — **d** — dixième — $10^{-1} = 0,1$;

Les grandeurs composées

Ce sont des grandeurs obtenues par produit ou quotient de grandeurs simples. Voici les plus courantes au collège :

— la superficie mesurée en mètre carré (m^2)
  $1\,m^2$ est la superficie d'un carré de 1 m de côté.
— le volume mesuré en mètre cube (m^3)
  $1\,m^3$ est le volume d'un cube de 1 m de côté.
— la vitesse mesurée en mètre par seconde ($m\,s^{-1}$)
  $1\,m\,s^{-1}$ correspond à la distance de 1 m parcourue en 1 s
— la masse volumique mesurée en kilogramme par mètre cube ($kg\,m^{-3}$)
  $1\,kg\,m^{-3}$ correspond à une masse de 1 kg pour un volume de $1\,m^3$.
— l'énergie mesurée en kilowatt-heure (kW h)
  1 kW h correspond à une puissance de 1 kW utilisée pendant 1 h.
— le débit volumique mesuré en mètre cube par seconde ($m^3\,s^{-1}$)
  $1\,m^3\,s^{-1}$ correspond à un transfert de $1\,m^3$ de matière en 1 s.

Remarques importantes :
$1\,mm^3$ ne vaut pas un millième de $1\,m^3$. Ce n'est vrai que pour les unités simples !
Il est conseillé de faire les conversions avec des unités simples.
Par exemple, 1 m=1000 mm.
Ainsi $1\,m^3 = 1\,m \times 1\,m \times 1\,m = 1000\,mm \times 1000\,mm \times 1000\,mm = 1\,000\,000\,000\,mm^3$.
$1\,m^2 = 100\,dm^2$ ou encore $1\,km^2 = 1\,000\,000\,m^2$.
Par définition : un hectare — $1\,ha = 10\,000\,m^2$: un carré de 100 m de côté.
$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1\,000\,000\,cm^3$.
Définition du litre : $1\,L = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$ ou encore $1\,m^3 = 1000\,L$
Il est utile de se souvenir que 1 h=60 min, que 1 min=60 s ou encore 1 h=3600 s.
Une année ordinaire dure 365 jours, une année bissextile 366 jours. Un jour dure 24 h.
Pour les masses : la tonne : 1 t=1000 kg
La notation $km\,h^{-1}$ peut aussi s'écrire km/h ce qui signifie kilomètre par heure.
$m\,s^{-1}$ peut s'écrire m/s ce qui signifie mètre par seconde.
De même $kg\,m^{-3}$ peut s'écrire kg/m^3.

Exemple d'usage des vitesses :
J'ai mis 37 min pour venir au collège ce matin à la vitesse moyenne de $58\,km\,h^{-1}$. Au retour je n'ai mis que 28 min. Quelle a été ma vitesse au retour et ma vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

Quand on utilise une vitesse moyenne, on considère que le temps et la distance sont des grandeurs proportionnelles.

Distance	58 km	$\dfrac{37\,min \times 58\,km}{60\,min} \approx 35,767\,km$
Temps	1 h=60 min	37 min

La distance entre le collège est chez moi est d'environ 35,767 km.

Distance	35,767 km	$\dfrac{35,767\,km \times 60\,min}{28\,min} \approx 76,64\,km$
Temps	28 min	1 h=60 min

J'ai roulé à environ la vitesse de $77\,km\,h^{-1}$ au retour.

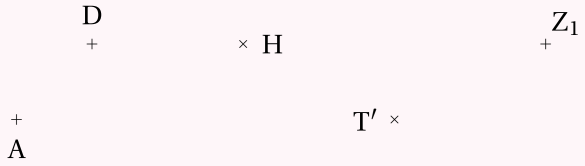
Distance	$2 \times 35,767\,km = 71,534\,km$	$\dfrac{71,534\,km \times 60\,min}{65\,min} \approx 66,03\,km$
Temps	28 min+37 min=65 min	1 h=60 min

J'ai roulé à environ la vitesse de $66\,km\,h^{-1}$ au retour.

Premiers éléments de géométrie

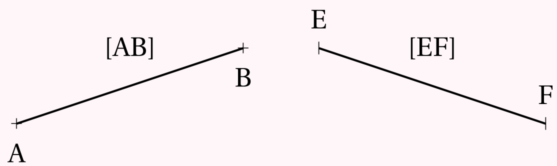
Point

Un **point** géométrique désigne en emplacement.
On le représente par une croix et on le nomme avec une lettre majuscule.



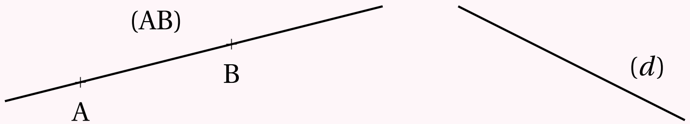
Segment

Un **segment** est la ligne la plus courte reliant deux points.
Ces deux points sont les **extrémités** du segment.
On note [AB] le segment dont les points A et B sont les extrémités.
On note AB la longueur de ce segment.



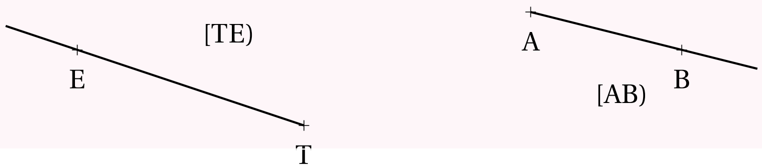
Droite

Une **droite** est constituée de tous les points alignés avec deux points.
On note (AB) la droite passant par les points A et B.
On note aussi (d) une droite quand on ne s'interesse pas à certains points particuliers.



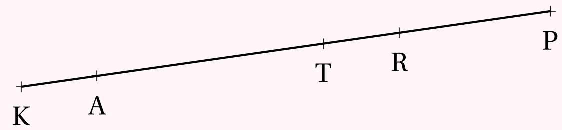
Demi-droite

Une **demi-droite** est une partie de droite limitée d'un seul côté son **origine** .
On note [AB) la demi-droite d'origine A passant par B.



Points alignés

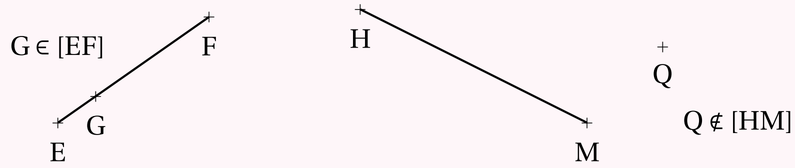
Des points sont **alignés** s'ils se situent tous sur le segment dont les extrémités sont deux d'entre eux.



Appartient, n'appartient pas

Quand un point se situe sur un segment, une droite ou une demi-droite, on dit qu'il **appartient à** un de ces objets géométriques.
On note A ∈ (CG) pour dire que A **appartient** à la droite (CG).

Quand un point ne se situe pas sur un objet géométrique, on dit qu'il **n'appartient pas à** un de ces objets géométriques.
On note C ∉ [TY] pour dire que C **n'appartient pas** au segment [TY].



Relations entre les droites

Deux droites qui se rencontrent ne le font qu'une fois, elles ont un **point d'intersection** . On dit que ces droites sont **sécantes** . (*Figure n° 2*)

Deux droites qui ne sont pas sécantes n'ont aucun point d'intersection. On dit qu'elles sont **parallèles** . Quand deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles on note $(d_1)//(d_2)$. (*Figure n° 1*)

Deux droites sécantes qui se rencontrent en formant quatre angles égaux sont **perpendiculaires** . On dit que ces angles sont **droits** . Quand deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires on note $(d) \perp (d')$. (*Figure n° 3*)

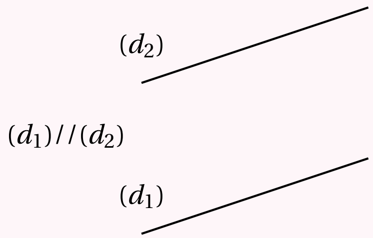


Figure n° 1

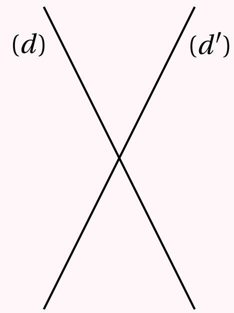


Figure n° 2

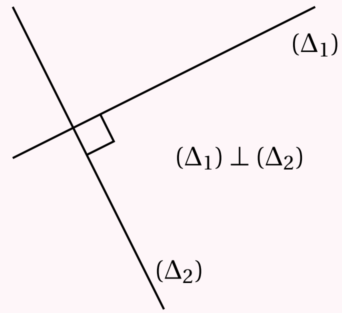
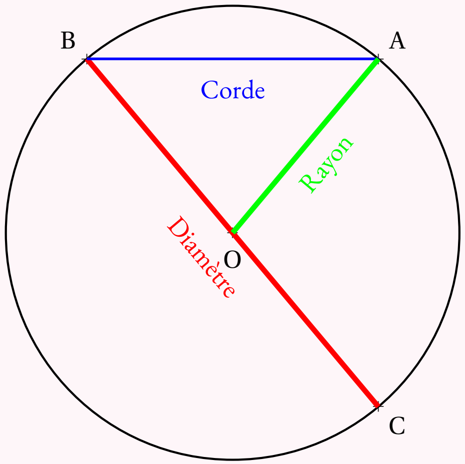


Figure n° 3

Distance et cercle

Le cercle

Le **cercle** de **centre** O et de **rayon** R est une figure de géométrie constituée de tous les points dont la distance avec le centre O est **exactement** égale au rayon R.
Un **rayon** du cercle est un segment reliant le centre à un des points du cercle.
Une **corde** est un segment reliant deux points du cercle.
Un **diamètre** est une corde passant par le centre. Les mots diamètre et rayon désignent à la fois les segments et leurs longueurs. Le diamètre vaut le double du rayon.



Régionnement du plan

Un cercle est caractérisé par son centre et son rayon. Il permet de définir trois régions :

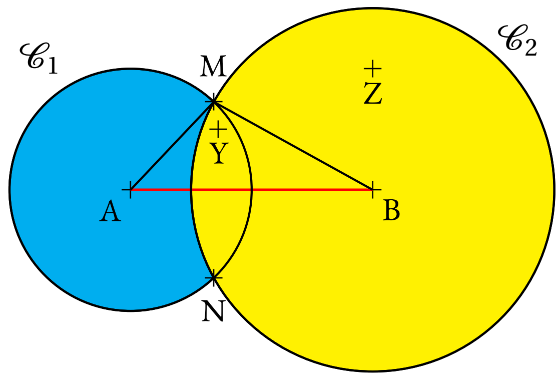
- **L'intérieur du cercle** :
  les points dont la distance avec le centre est **strictement inférieure** au rayon ;
- **Le cercle** :
  les points dont la distance avec le centre est exactement **égale** au rayon ;
- **L'extérieur du cercle** :
  les points dont la distance avec le centre est **strictement supérieure** au rayon.

Remarque :
Un **disque** est la surface constituée par l'intérieur du cercle et par le cercle.
Il s'agit des points dont la distance avec le centre est inférieure ou égale au rayon.

Exemple :
Voici un segment [AB] de longueur 4 cm et les cercles :

- $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon 2 cm ;
- $\mathscr{C}_2$ de centre B et de rayon 3 cm.

Les points M et N sont les points d'intersection des deux cercles.

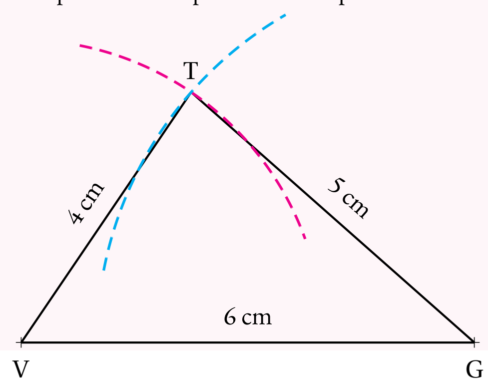


- Z est situé à plus de 2 cm de A, il est à l'extérieur du cercle de centre A et de rayon 2 cm ;
- Z est situé à moins de 3 cm de B, il est à l'intérieur du cercle de centre B et de rayon 3 cm ;
- Y est situé à moins de 2 cm de A et à moins de 3 cm de B, il est à l'intérieur des deux cercles ;
- M et N sont situés à exactement 2 cm de A et à 3 cm de B ;
- le triangle ABM mesure donc exactement 2 cm, 3 cm et 4 cm.

Construction de triangles

Pour tracer un triangle connaissant les mesures de ses trois côtés, par exemple le triangle TGV dont les côtés mesurent TG = 5 cm, TV = 4 cm et VG = 6 cm :

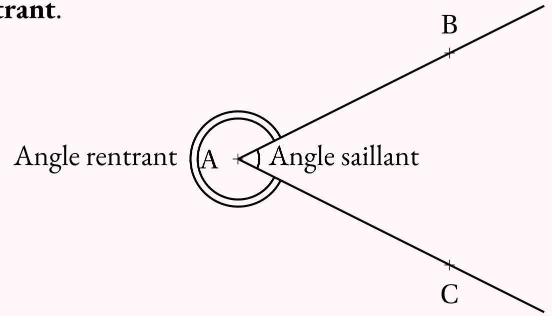
- on trace un premier côté, souvent le plus long, le côté [VG] ;
- on trace le cercle de centre V et de rayon 4 cm ;
- on trace le cercle de centre G et de rayon 5 cm ;
- ces deux cercles se coupent en deux points dont le point T.



Les angles

Définition

Deux demi-droites ayant la même origine définissent deux angles, l'un **saillant**, l'autre **rentrant**.



On ne s'intéresse au collège, qu'aux angles saillants. Cet angle se note $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$.
A est le **sommet** de l'angle. Dans la notation $\widehat{BAC}$, il s'agit de la lettre centrale. Ainsi, cet angle ne peut pas être nommée $\widehat{ACB}$ ou $\widehat{ABC}$.
[AB) et [AC) sont les **côtés** de l'angle.

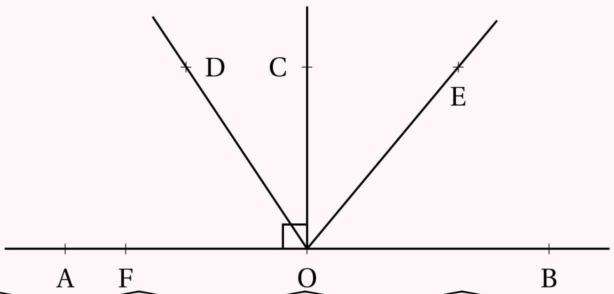
Définition et vocabulaire

Notons $\widehat{BAC}$ un angle de sommet A.

Si (AB) $\perp$ (AC), on dit que **l'angle est droit** .
Si A $\in$ [BC], on dit que **l'angle est plat** . Si C $\in$ [AB), on dit que **l'angle est nul** .

Un angle est associé à une grandeur qui correspond à « l'ouverture »de l'angle.

Un angle dont « l'ouverture »est comprise entre celle d'un **angle nul** et celle d'un **angle droit** est **aigu** .
Un angle dont « l'ouverture »est comprise entre celle d'un **angle droit** et celle d'un **angle plat** est **obtus** .



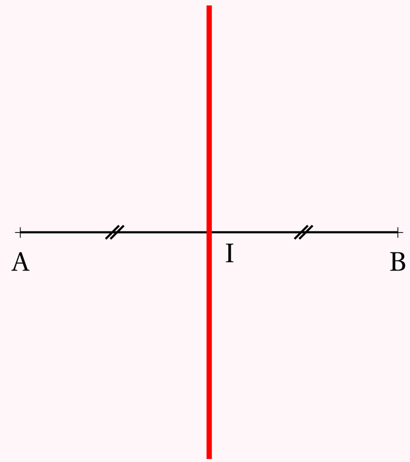
$\widehat{AOB}$ est plat, $\widehat{AOF}$ est nul, $\widehat{AOC}$ est droit, $\widehat{AOD}$ est aigu, $\widehat{AOE}$ est obtus.

Mesure des angles

Les angles se mesurent en **degrés** .
Par définition, un angle droite mesure 90°.
Un angle plat mesure 180° et un angle nul 0°.
Un angle aigu mesure entre 0° et 90°. Un angle obtus mesure entre 90° et 180°.

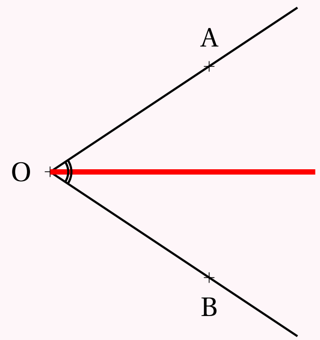
Médiatrice d'un segment

La **médiatrice** d'un segment est l'unique droite perpendiculaire à ce segement passant par son milieu.
La **médiatrice** d'un segment est également un axe de symétrie.
La **médiatrice** d'un segment est constituée des points situés à égale distance des extrémités du segment.



Bissectrice d'un angle

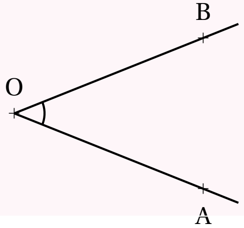
La **bissectrice** d'un angle est l'unique droite qui partage cet angle en deux.
La **bissectrice** d'un angle est également un axe de symétrie.



Angles et triangles

Définition

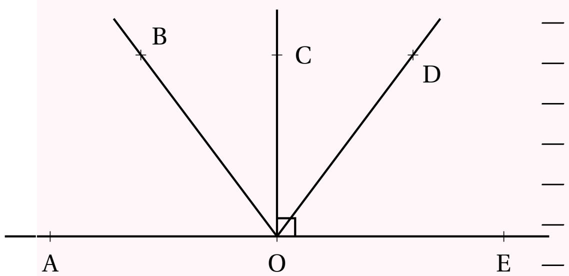
Deux demi-droites ayant la même origine définissent **un angle** .
L'origine commune est **le sommet** de l'angle et les demi-droites sont **les côtés** .



- (O est le sommet de l'angle;
- ([OA) et [OB) sont des côtés de l'angle
- on note cet angle $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA}$ ou $\hat{O}$.

Vocabulaire

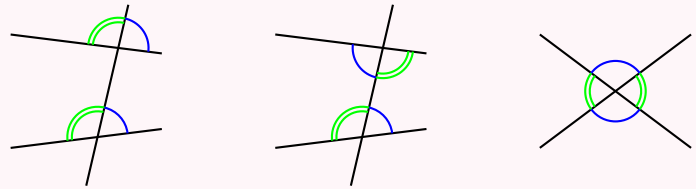
- Un **un angle droit** a ses côtés perpendiculaires, il mesure 90°;
- un **angle plat** est constitué de deux angles droits, il mesure 180°;
- un **angle nul** est constitué de deux côtés superposés, il mesure 0°;
- un **angle aigu** est inférieur à un angle droit, il mesure entre 0° et 90°;
- un **angle obtus** est supérieur à un angle droit, il mesure entre 90° et 180°;
- deux angles sont **complémentaires** quand leur somme vaut un angle droit;
- deux angles sont **supplémentaires** quand leur somme vaut un angle plat;
- deux angles ayant un côté et le sommet en commun sont **adjacents** .



- $\widehat{EOE}$ est nul;
- $\widehat{EOD}$ est aigu;
- $\widehat{EOC}$ est droit;
- $\widehat{EOB}$ est obtus;
- $\widehat{EOA}$ est plat;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOC}$ sont complémentaires;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOA}$ sont supplémentaires;
- $\widehat{EOD}$ et $\widehat{DOA}$ sont adjacents.

Définitions et propriétés

Soient d, d' deux droites et Δ une droite sécante avec d et d'.

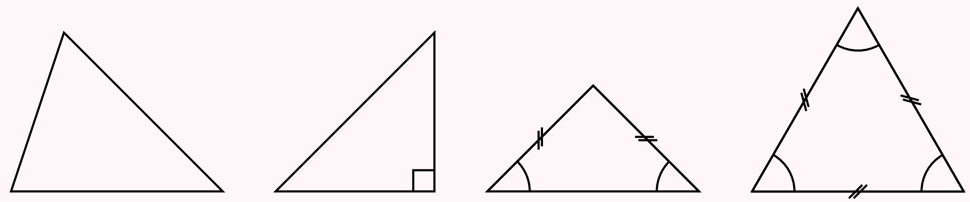


Angles correspondants Angles alternes-internes Angles opposés par le sommet

- **Si** $(d)//(d')$ **alors** les angles correspondants sont égaux. La réciproque est vraie.
- **Si** $(d)//(d')$ **alors** les angles alternes-internes sont égaux. La réciproque est vraie.
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Définitions et propriétés

Un **triangle** est un polygone a trois côtés.
Un triangle est **rectangle** si un de ses angles est droit.
Un triangle est **isocèle** si deux côtés sont égaux.
Un triangle est **équilatéral** si les trois côtés sont égaux.



Triangle quelconque Triangle rectangle Triangle isocèle Triangle équilatéral

Propriété

Dans un triangle, la somme des trois angles vaut un angle plat soit 180°.

Conséquences :

- Les trois angles d'un triangle équilatéraux sont égaux à 60°.
- Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
- Dans un triangle rectangle isocèle, les deux angles aigus sont égaux à 45°.
- Un triangle ne peut possèder qu'un seul angle obtus.

Les quadrilatères

Définition

Un **quadrilatère** est un polygone ayant quatre côtés.
Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.
Un **trapèze rectangle** est un trapèze ayant un angle droit (et donc deux !).
Un **parallèlogramme** est un quadrilatère ayant des côtés opposés parallèles.
Un **rectangle** est un quadrilatère ayant quatre angles droits.
Un **losange** est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.
Un **carré** est un quadrilatère rectangle et losange.

Propriétés du parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors :
— ses diagonales se coupent en leur milieu ;
— ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
— ses côtés opposés sont égaux deux à deux.

Propriétés du losange

Si un quadrilatère est un losange alors :
— c'est un parallélogramme ;
— ses diagonales sont perpendiculaires ;
— ses côtés sont égaux.

Propriétés du rectangle

Si un quadrilatère est un **rectangle** alors :
— c'est un parallélogramme ;
— ses diagonales sont de même longueur ;
— il a quatre angles droits.

Propriétés du carré

Si un quadrilatère est un **carré** alors :
— c'est un parallélogramme, c'est rectangle, c'est un losange ;
— ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur ;
— il a quatre angles droits et quatre côtés égaux.

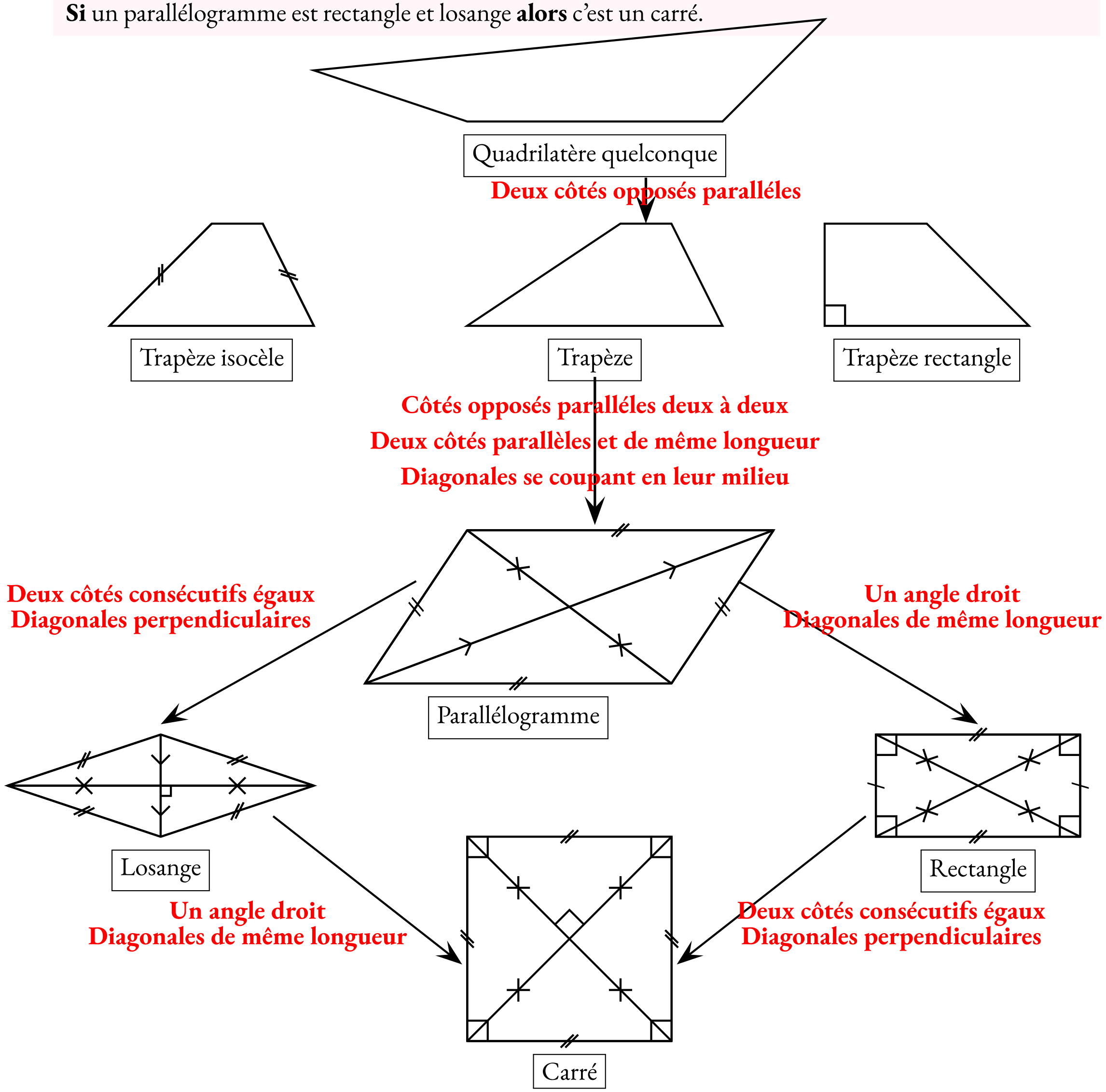
Propriétés caractéristiques

Dans cette propriété, les quadrilatères sont supposés non croisés.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.
Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles deux à deux **alors** c'est un parallélogramme.
Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux deux à deux **alors** c'est un parallélogramme.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur **alors** c'est un rectangle.
Si un parallélogramme a un angle droit **alors** c'est un rectangle.
Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires **alors** c'est un losange.
Si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme sont égaux **alors** c'est un losange.

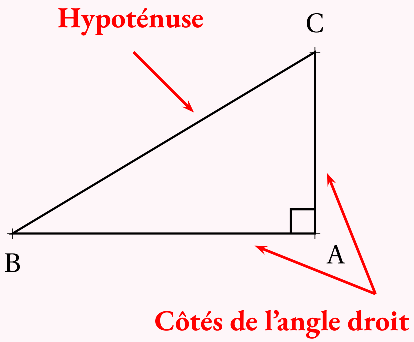
Si un parallélogramme est rectangle et losange **alors** c'est un carré.



Égalité de Pythagore

Vocabulaire du triangle rectangle

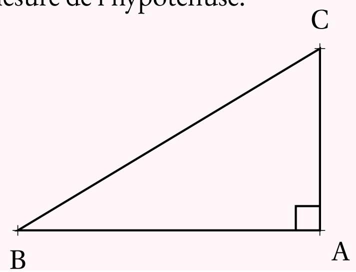
Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** désigne le côté qui n'est pas adjacent à l'angle droit. L'**hypoténuse** est le plus long côté d'un triangle rectangle.



Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle

alors la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.



Si ABC est rectangle en A

alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Contraposée du théorème de Pythagore

Si un dans un triangle la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés **n'est pas égale** au carré de la mesure du plus grand côté

alors ce triangle n'est pas rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore

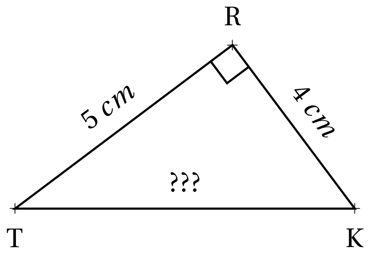
Si un dans un triangle la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés **est égale** au carré de la mesure du plus grand côté

alors ce triangle est rectangle.

Calculer la mesure de l'hypoténuse :

Dans le triangle TKR rectangle en R, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

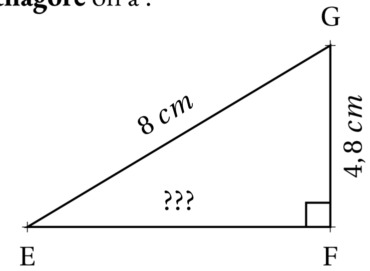
$$RT^2 + RK^2 = TK^2$$
$$5^2 + 4^2 = TK^2$$
$$25 + 16 = TK^2$$
$$TK^2 = 41$$
$$TK = \sqrt{41}$$
$$\boxed{TK \approx 6,4\ cm}$$



Calculer la mesure d'un côté de l'angle droit :

Dans le triangle EFG rectangle en F, d'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$FG^2 + FE^2 = GE^2$$
$$4,8^2 + FE^2 = 8^2$$
$$23,04 + FE^2 = 64$$
$$FE^2 = 64 - 23,04$$
$$FE^2 = 40,96$$
$$FE = \sqrt{40,96}$$
$$\boxed{FE = 6,4\ cm}$$



Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

MNO un triangle tel que :

- $MN = 78\ mm$
- $MO = 103\ mm$
- $NO = 130\ mm$

MNO **est-il rectangle ?**

[NO] est le plus grand côté, comparons $MN^2 + MO^2$ et NO^2

$MN^2 + MO^2$	NO^2
$78^2 + 103^2$	130^2
$6\,084 + 10\,609$	$16\,900$
$16\,693$	

$$MN^2 + MO^2 \neq NO^2$$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle MNO n'est pas rectangle}}$.

Démontrer qu'un triangle est rectangle :

LKU un triangle tel que :

- $LK = 11,7\ m$
- $KU = 10,8\ m$
- $LU = 4,5\ m$

LKU **est-il rectangle ?**

[LK] est le plus grand côté, comparons $UK^2 + UL^2$ et LK^2

$UL^2 + UK^2$	LK^2
$4,5^2 + 10,8^2$	$11,7^2$
$20,25 + 116,64$	$136,89$
$136,89$	

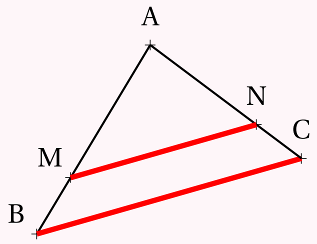
$$UK^2 + UL^2 = LK^2$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LKU est rectangle en U}}$.

Le théorème de Thalès

Version quatrième

Le théorème



Si dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN)//(BC)
Alors

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

Remarque :
Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

La règle de trois et égalité des produits en croix

Les produits en croix

Deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

a, b, c et d des nombres non nuls.

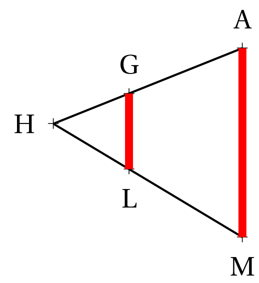
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

La règle de trois

a, b et c des nombres connus non nuls.

Le nombre x vérifiant $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ est $x = \frac{b \times c}{a}$

Exemple :



On sait que :

- G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
- (GL)//(AM)
- HL = 4 cm, HA = 12 cm,
- GL = 3 cm, AM = 15 cm

On veut calculer HG **et** HM**.**

Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{HM}} = \frac{\mathrm{HG}}{\mathrm{HA}} = \frac{\mathrm{LG}}{\mathrm{MA}}$$

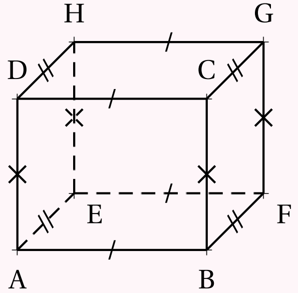
$$\frac{4\ cm}{\mathrm{HM}} = \frac{\mathrm{HG}}{12\ cm} = \frac{3\ cm}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{4\ cm}{\mathrm{HM}}$ on a $\mathrm{HM} = \frac{4\ cm \times 15\ cm}{3\ cm} = \frac{60}{3}\ cm = \boxed{20\ cm}$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{\mathrm{HG}}{12\ cm}$ on a $\mathrm{HG} = \frac{12\ cm \times 3\ cm}{15\ cm} = \frac{36}{15}\ cm = \boxed{2{,}4\ cm}$

Repérage dans le pavé droit

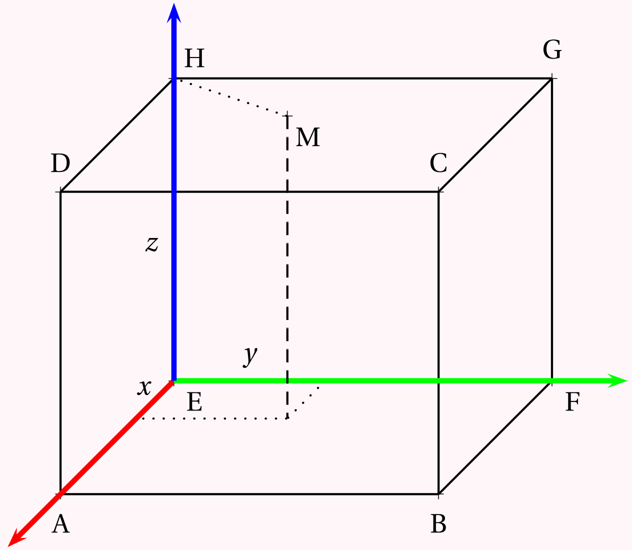
Le pavé droit



Le **pavé droit** ou **parallélépipède rectangle** est un solide de la famille des **prismes droits** .

Il possède 6 **faces** rectangulaires superposables deux à deux, 8 **sommets** , 12 **arêtes** .

Repérage dans le pavé droit



On choisit un repère dans le pavé droit, par exemple :

— E est l'origine du repère;

— (EA) est l'**axe des abscisses** ;

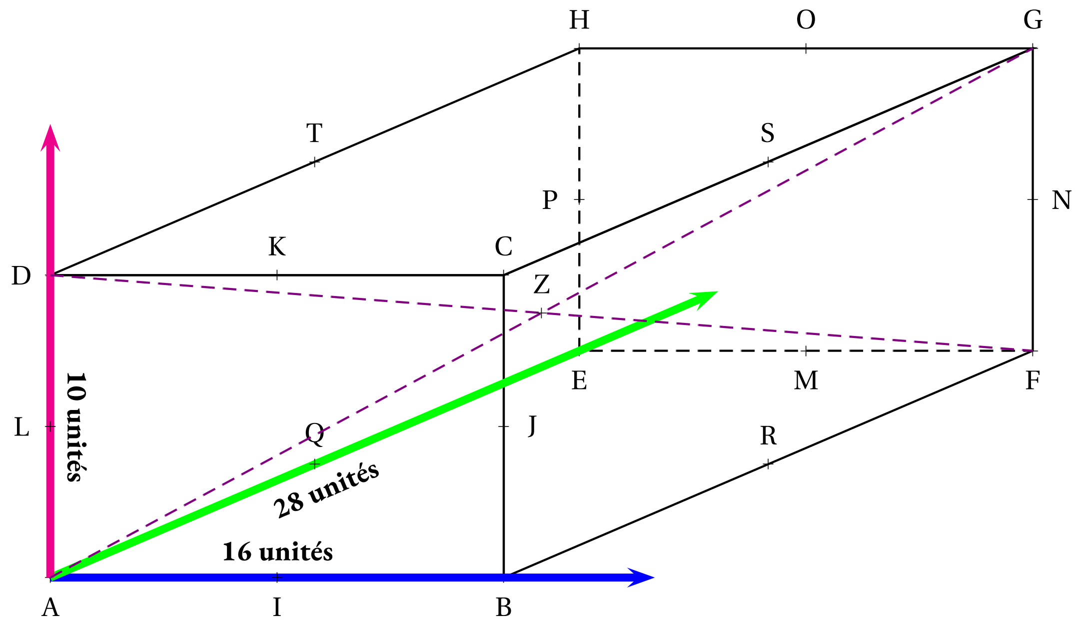
— (EF) est l'**axe des ordonnées** ;

— (EH) est l'**axe des altitudes ou des côtes** .

Un point M situé dans le pavé droit peut être repéré par ses coordonnées $M(x;y;z)$ où x est l'abscisse, y l'ordonnée et z l'altitude du point M.

Exemple :

ABCDEFGH est un pavé droit. On considère le repère (A; (AB); (AE); (AD)).
(AB) est l'axe des abscisses.
(AE) est l'axe des ordonnées.
AD) est l'axe des côtes.
I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T sont les milieux des arêtes.



Voici les coordonnées des points tels que placés ci-dessus :

A(0; 0; 0)	F(16; 28; 0)	K(8; 0; 5)	P(0; 28; 5)
B(16; 0; 0)	G(16; 28; 10)	L(0; 0; 5)	Q(0; 14; 0)
C(16; 0; 10)	H(0; 28; 10)	M(8; 28; 0)	R(16; 14; 0)
D(0; 0; 10)	I(8; 0; 0)	N(16; 28; 5)	S(16; 14; 10)
E(0; 28; 0)	J(16; 0; 5)	O(8; 28; 5)	T(0; 14; 10)

Considérons le points Z intersection des grandes diagonales du pavé, par exemple des segments [AG] et [DF].

Les coordonnées du points Z sont : Z(16; 14; 5)

Triangles égaux et semblables

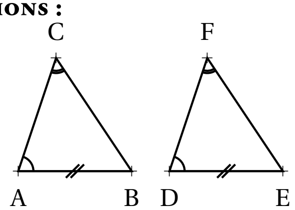
Définition : triangles égaux

Deux triangles sont égaux s'ils sont superposables.
Cela signifie que leurs trois côtés et leurs trois angles sont égaux.

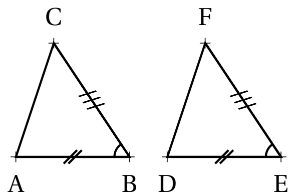
Propriétés

Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté de même longueur et deux angles de même mesure.
Deux triangles sont égaux quand ils ont deux côtés de même longueur et l'angle formé par ces côtés de même mesure.

Illustations :



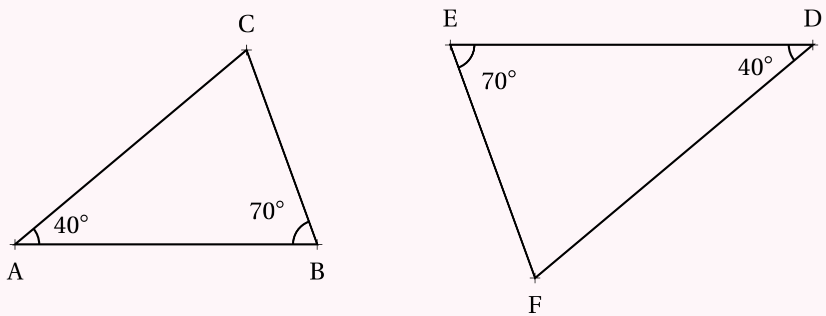
$AB = DE$, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$
Les triangles ABC et DEF sont égaux.



$AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$
Les triangles ABC et DEF sont égaux.

Définition : triangles semblables

On dit que **deux triangles sont semblables** quand leurs trois angles sont égaux deux à deux.



Dans ce cas, les côtés sont associés deux à deux, on dit qu'ils sont **homologues** .
Par exemple ci-dessus, [AB] et [ED] sont homologues, ainsi que [BC] et [EF] ou [AC] et [FD].

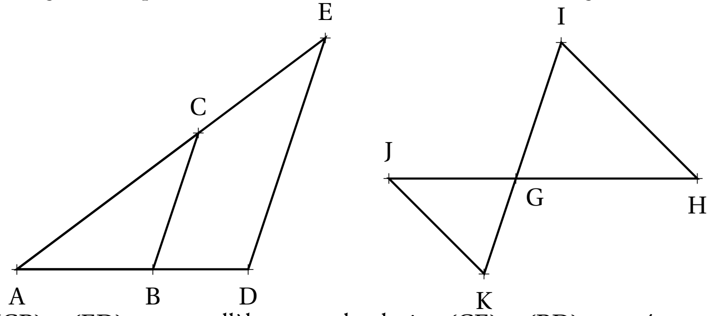
Propriétés

Si deux triangles ont deux angles égaux deux à deux alors ils sont **semblables**.
Si deux triangles sont semblables alors l'un est l'**agrandissement** de l'autre.
Si deux triangles sont semblables alors l'un est la **réduction** de l'autre.
Si deux triangles sont **égaux** alors ils sont **semblables**.
Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont **proportionnels**.

Exemples fondamentaux :

Thalès

Dans une configuration géométrique relevant du théorème de Thalès, les triangles sont semblables.

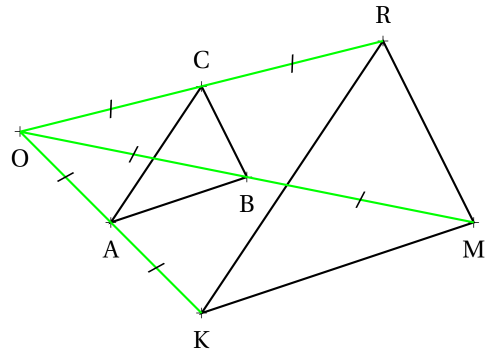


Comme les droites (CB) et (ED) sont parallèles et que les droites (CE) et (BD) sont sécantes,
les triangles ACB **et** AED **sont semblables.**

Comme les droites (JK) et (IH) sont parallèles et que les droites (JH) et (KI) sont sécantes,
les triangles GIH **et** GJK **sont semblables.**

Homothétie

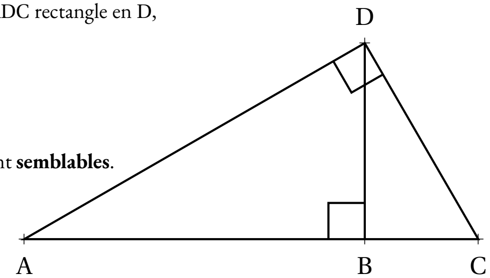
Deux triangles images l'un de l'autre par une **homothétie** sont **semblables**.
On dit aussi qu'ils sont **homothétiques** . Deux triangles dans une situation de Thalès sont **homothétiques** .



ABC est l'image du triangle KMR par l'homothétie de centre O et de coefficient $\frac{1}{2}$.
Ces triangles sont semblables.

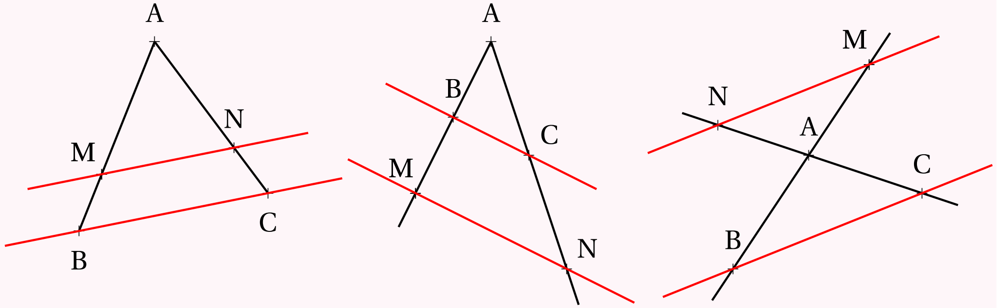
Un grand classique :

Notons $\alpha = \widehat{DAB}$.
Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, dans le triangle ADC rectangle en D, $\widehat{DCB} = 90° - \alpha$.
On dit souvent que $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ sont **complémentaires** .
Dans le triangle ADB rectangle en B, pour la même raison $\widehat{ADB} = 90° - \alpha$.
Dans le triangle DBC rectangle en B, de même, $\widehat{BDC} = \alpha$
Les triangles ADC, ABD et DBC ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont **semblables**.
Ces trois triangles ont donc des côtés proportionnels.
Ils sont des agrandissements/réductions les uns des autres.



Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès



Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si (MN)//(BC)
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Théorème de Thalès contraposé

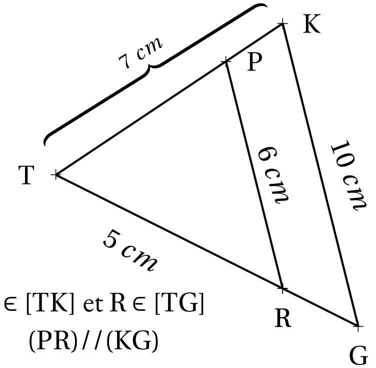
Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A avec A, B et M dans le même ordre que A, C et N et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



P ∈ [TK] et R ∈ [TG]
(PR)//(KG)

Calculer TG **et** TP**.**

Les droites (PK) et (RG) sont sécantes en T.
Les droites (PR) et (KG) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

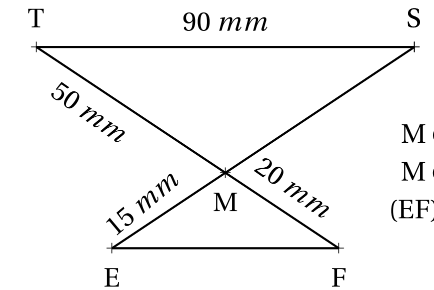
$$\frac{TP}{TK} = \frac{TR}{TG} = \frac{PR}{KG}$$

$$\frac{TP}{7\,cm} = \frac{5\,cm}{TG} = \frac{6\,cm}{10\,cm}$$

On utilise la règle de trois :

$$TP = \frac{7\,cm \times 6\,cm}{10\,cm} = 4,2\,cm$$

$$TG = \frac{5\,cm \times 10\,cm}{6\,cm} \approx 8,3\,cm$$



M ∈ (ES)
M ∈ (TF)
(EF)//(TS)

Calculer MS **et** EF**.**

Les droites (ES) et (TF) sont sécantes en M.
Les droites (EF) et (TS) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

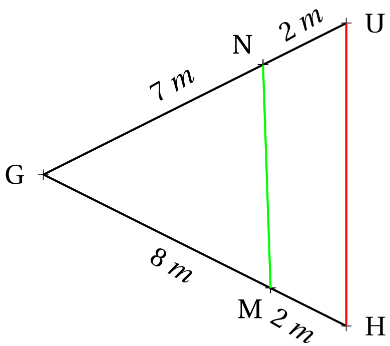
$$\frac{ME}{MS} = \frac{MF}{MT} = \frac{EF}{ST}$$

$$\frac{15\,mm}{MS} = \frac{20\,mm}{50\,mm} = \frac{EF}{90\,mm}$$

On utilise la règle de trois :

$$MS = \frac{50\,mm \times 15\,mm}{20\,mm} = 37,5\,mm$$

$$EF = \frac{90\,mm \times 20\,mm}{50\,mm} = 36\,mm$$



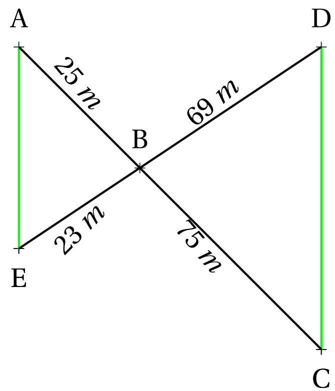
(NM) **et** (HU) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{GN}{GU}$ et $\frac{GM}{GH}$

$\frac{GN}{GU} = \frac{7\,m}{9\,m} \approx 0,78$ et $\frac{GM}{GH} = \frac{8\,m}{10\,m} = 0,8$

Comme $\frac{GN}{GU} \neq \frac{GM}{GH}$ d'après **le théorème de Thalès (contraposé)**, les droites (NM) et (HU) sont sécantes.

On pouvait aussi comparer les produits en croix :
$7 \times 10 = 70$ et $9 \times 8 = 72$ pour conclure au fait que les quotients ne sont pas égaux.



(AE) **et** (DC) **sont-elles parallèles ?**

Comparons $\frac{BA}{BC}$ et $\frac{BE}{BD}$

$\frac{BA}{BC} = \frac{25\,m}{75\,m} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ et $\frac{BE}{BD} = \frac{23\,m}{69\,m} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

Comme $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD}$ et comme les points B, A et C sont alignés et dans le même ordre que les points alignés B, E et D.
D'après **la réciproque du théorème de Thalès** les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

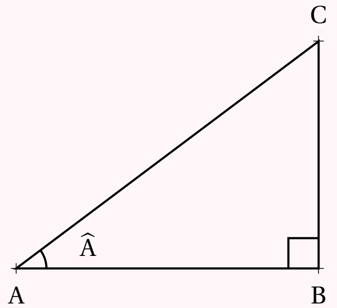
Pour comparer les fractions ont peut utiliser la valeur exacte ou la valeur approchée. Le plus pratique est souvent de comparer les produits en croix :
$75 \times 23 = 1725$ et $25 \times 69 = 1725$

Trigonométrie

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en B :

— le plus long côté du triangle, opposé à l'angle droit est l'hypoténuse ;
— le côté de l'angle droit étant un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
— le côté de l'angle droit n'étant pas un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.



— [AC] est l'hypoténuse du triangle ;
— [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
— [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$;
— [BC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$;

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en B, il existe trois grandeurs qui ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$ que l'on nomme cosinus, sinus et tangente de l'angle $\widehat{A}$. La connaissance de l'une de ces grandeurs permet de retrouver la mesure de l'angle $\widehat{A}$ ou la longueur d'un côté du triangle ABC.
On les définit ainsi :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}$$

Moyen mnémotechnique :

L'acronyme suivant permet de se souvenir facilement de ces trois définitions :

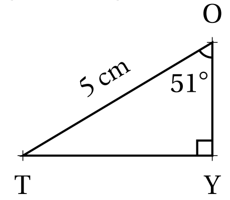
C A H S O H T O A

C pour cosinus, S pour sinus et T pour tangente.
A pour adjacent, O pour opposé et H pour hypoténuse.

Usages :

Pour calculer la longueur d'un côté connaissant un côté et un angle

TOY un triangle rectangle en T.



Calculons la longueur OY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 51°. On utilise donc le **cosinus**.

$\cos 51° = \frac{OY}{5\ cm}$ soit $\boxed{OY = 5\ cm \times \cos 51°}$

Finalement $OY \approx 3,15\ cm$

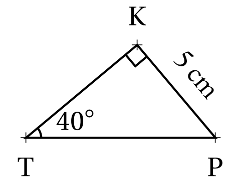
Calculons la longueur TY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté opposé à l'angle à 51°. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 51° = \frac{TY}{5\ cm}$ soit $\boxed{TY = 5\ cm \times \sin 51°}$

Finalement $TY \approx 3,89\ cm$

KPT un triangle rectangle en K.



Calculons la longueur TP :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle de l'hypoténuse. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 40° = \frac{5\ cm}{TP}$ soit $\boxed{TP = \frac{5\ cm}{\sin 40°}}$

Finalement $TP \approx 7,78\ cm$

Calculons la longueur TK :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 40°. On utilise donc la **tangente**.

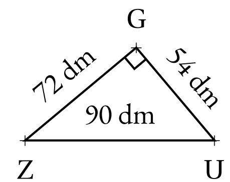
$\tan 40° = \frac{5\ cm}{TK}$ soit $\boxed{TK = \frac{5\ cm}{\tan 40°}}$

Finalement $TK \approx 5,96\ cm$

Pour résoudre une équation du type $5 = \frac{x}{7}$ ou $8 = \frac{7}{x}$, on écrit chaque membre comme une fraction, $\frac{5}{1} = \frac{x}{7}$ et $\frac{8}{1} = \frac{7}{x}$ puis on utilise la règle de trois !

Pour calculer la mesure d'un angle connaissant deux côtés

ZUG un triangle rectangle en G.



Calculons la mesure des angles $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$.

On peut calculer au choix soit le cosinus, le sinus ou la tangente de chacun de ces angles.

Ainsi $\cos\widehat{UZG} = \frac{72\ dm}{90\ dm} = 0,8$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{UZG} \approx 36,87°}$

Il faut saisir seconde cos 0,8

Comme $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$ sont complémentaires, $\widehat{GUZ} = 90° - 36,87° = 53,13°$

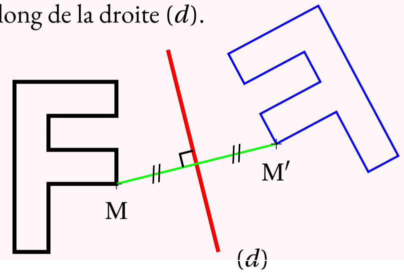
Les transformations

La symétrie axiale

(d) une droite et M un point du plan.

L'image du point M par la **symétrie d'axe** la droite (d) est l'unique point M′ vérifiant :
$(d) \perp (MM')$ et (d) coupe $[MM']$ en son milieu.
Cela revient à dire que (d) est la **médiatrice** de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **pliage** le long de la droite (d).

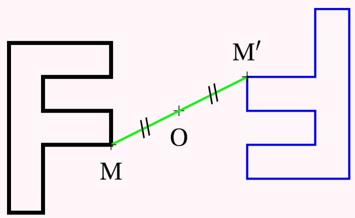


La symétrie centrale

O et M deux points du plan.

L'image du point M par la **symétrie de centre** O est l'unique point M′ vérifiant O est le milieu de $[MM']$.

C'est le résultat d'un **demi-tour** autour du point O.

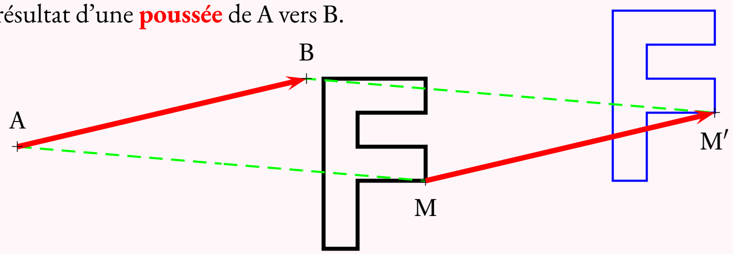


La translation

A, B et M trois points du plan.

L'image du point M par la **translation** qui transforme A en B est l'unique point M′ vérifiant ABM′M est un parallélogramme.

C'est le résultat d'une **poussée** de A vers B.

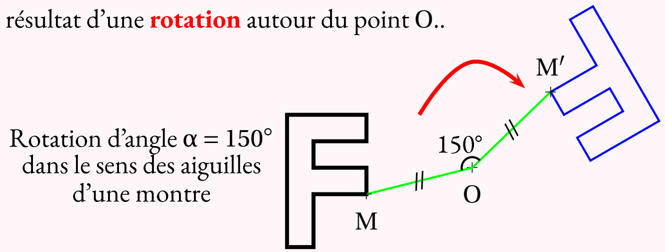


La rotation

O, et M deux points du plan.

L'image du point M par la **rotation** d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre l'unique point M′ vérifiant $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

C'est le résultat d'une **rotation** autour du point O..

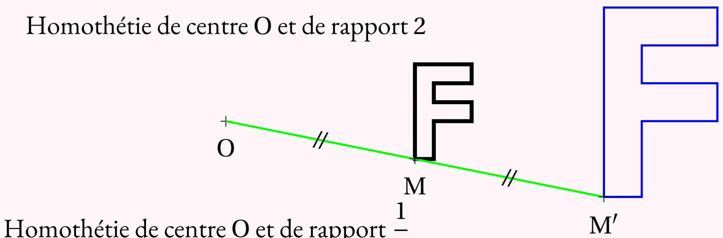


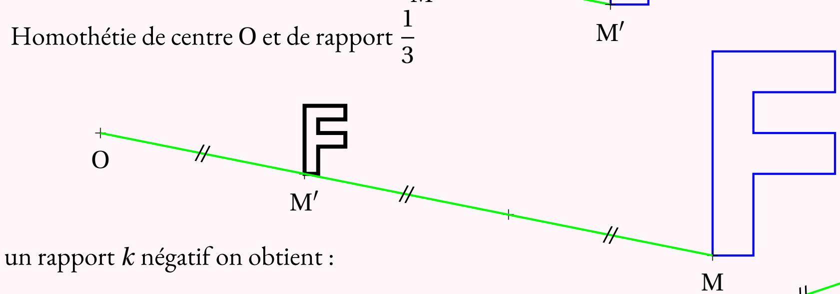
L'homothétie

O, et M deux points du plan.

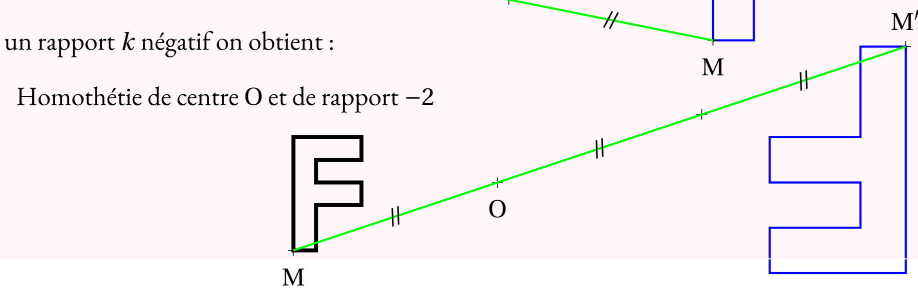
L'image du point M par l'**homothétie** de centre O et de rapport $k > 0$ est l'unique point M′ vérifiant $OM = kOM'$ et $M' \in [OM)$.

C'est le résultat d'un **agrandissement/réduction** de rapport k depuis le point O.





Pour un rapport k négatif on obtient :



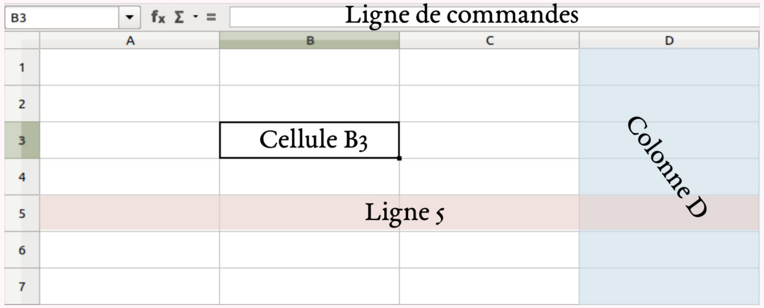
Propriétés

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et la rotation sont des **isométries** : elles ne modifient pas les angles et les longueurs.
L'homothétie ne modifie pas les angles. Elle agrandit ou réduit les longueurs.

Tableur

Description générale

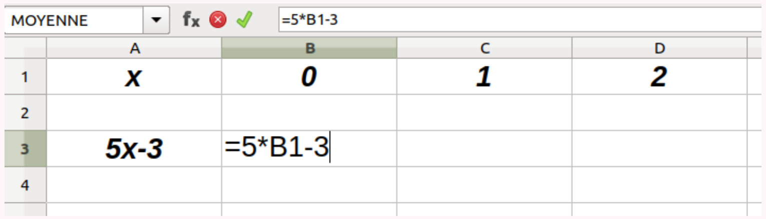
Un **tableur** est logiciel capable de manipuler des **feuilles de calcul**. Une feuille de calcul est un tableau constitué de lignes numérotées par un nombre et de colonnes reperées par une lettre.



Une case d'une feuille de calcul s'appelle une **cellule**.
Une cellule est repérée par la lettre de la colonne et le nombre de la ligne.
Dans une case on peut saisir une information numérique ou textuelle.
On peut aussi saisir une formule de calcul qu'il est possible de recopier dans d'autres cases. La ligne de commande permet de saisir des informations.

Les formules

Pour programmer une cellule d'une feuille de calcul, il faut saisir une formule qui permet par exemple de modéliser une fonction ou une expression littérale.



Dans une feuille de calcul, une formule s'écrit en commençant par le symbole =.
Une formule s'exprime en utilisant les coordonnées de la cellule, par exemple B1.
Les opérations mathématiques peuvent être codées d'une manière différente :

— addition, soustraction : + et −;

— multiplication : ∗;

— division : ;

— parenthèses : ( );

Exemple :
On considère le programme de calcul suivant :

— Choisir un nombre;
— Ajouter 5;
— Mettre ce résultat au carré;
— Enlever 16.

On note f la fonction qui a x un nombre de départ associe $f(x)$ le résultat final du programme.
Voici une feuille de calcul obtenue à partir de ce programme de calcul et la fonction f.
Analysons cette feuille de calcul :

E8 =E1^2+10*E1+9

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Étape n°1	2	3	4	5	6	7	8
3	Étape n°2	4	9	16	25	36	49	64
4	Étape n°3	-12	-7	0	9	20	33	48
5								
6	f(x)	-12	-7	0	9	20	33	48
7								
8	g(x)	-12	-7	0	9	20	33	48

Notons x le nombre de départ, à l'étape 1 on obtient $x+5$.
Dans la cellule B2 on a saisi la formule : $=\mathrm{B1}+5$.
À l'étape 2 on obtient $(x+5)^2$.
Dans la cellule B3 on a saisi la formule $=\mathrm{B2}*\mathrm{B2}$ ou $=\mathrm{B2}^2$ ou $=\mathrm{B2}^2$
À l'étape 3 on obtient $(x+5)^2-16$.
Dans la cellule B4 on a saisi la formule $=\mathrm{B3}-16$.

La fonction f s'exprime donc sous la forme $f(x)=(x+5)^2-16$
Dans la cellule B6 on a saisi la formule $=(\mathrm{B1}+5)^2-16$ ou $=(\mathrm{B1}+5)*(\mathrm{B1}+5)-16$

On remarque que dans la case E8 a été saisi $=\mathrm{E1}^2+10*\mathrm{E1}+9$
En effet si on développe $f(x)=(x+5)^2-16$
$f(x)=(x+5)(x+5)-16$
$f(x)=x^2+5x+5x+25-16$
$f(x)=x^2+10x+9$ cela correspond bien à la formule saisie en E8!

Programmer avec des blocs

Contexte nº 1 : Programme de calcul

```
1 Quand ⚑ est cliqué
2 Quel est le nombre de départ ?
3 Mettre [Nombre ▾] à (Réponse)
4 Programme de calcul
5 Dire (Regrouper (Le nombre final est) (Nombre))
```

```
1 Programme de calcul
2 Mettre [Nombre ▾] à ((Nombre) + 10)
3 Mettre [Nombre ▾] à ((Nombre) * 4)
4 Mettre [Nombre ▾] à ((Nombre) - 12)
5 Mettre [Nombre ▾] à ((Nombre) / 2)
```

Quand ⚑ est cliqué : Un programme par blocs commencent toujours un événement.

Réponse : Quand on pose une question à l'utilisateur, ce bloc contient la réponse l'utilisateur.

Programme de calcul : Il est habituel d'utiliser un sous-programme pour clarifier le code.

Nombre : Les variables servent à modéliser les lettres du calcul littéral.

Les opérations : + l'addition, - la soustraction, * la multiplication, / la division.

Testons ce programme avec le nombre -3, ce nombre se situe dans Réponse en **Ligne 3**.

La variable Nombre prend la valeur -3.

En **Ligne 4**, on passe au sous-programme Programme de calcul.

En **Ligne 2**, la variable Nombre devient (Nombre + 10), soit $-3+10=7$.

En **Ligne 3**, la variable Nombre devient (Nombre * 4), soit $7\times 4=28$.

En **Ligne 4**, la variable Nombre devient (Nombre - 12), soit $28-12=16$.

En **Ligne 5**, la variable Nombre devient (Nombre / 2), soit $16\div 2=8$.

En **Ligne 5** du programme principal, le programme affiche « *Le nombre final est 8.* »

Contexte nº 2 : Probabilité

```
1 Quand ⚑ est cliqué
2 Pile ou face
3 Dire (Regroupe (La pièce est tombée sur) (Quel côté))
```

```
1 Pile ou face
2 Mettre [Nombre aléatoire ▾] à (Nombre aléatoire entre (0) et (1))
3 Si <(Nombre aléatoire) = (0)>
4     Mettre [Quel côté ▾] à (PILE)
5 sinon
6     Mettre [Quel côté ▾] à (FACE)
```

Nombre aléatoire entre (0) et (1) : choisit un nombre entier au hasard entre 0 et 1

On remarque la boucle **Si... Alors** qui permet de faire un choix en fonction d'un critère.

Contexte nº 3 : Construction géométrique

```
1 Quand ⚑ est cliqué
2 Aller à x : (-200) y : (0)
3 S'orienter à (90) degrés
4 Répéter (3) fois
5     Stylo en position d'écriture
6     Tracer un carré
7     Relever le stylo
8     Avancer de (20) pas
```

```
1 Tracer un carré
2 Répéter (4) fois
3     Avancer de (100) pas
4     Touner ↺ de (90) degrés
```

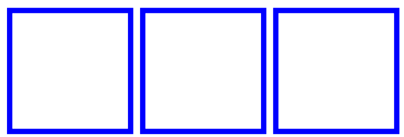
Aller à x : (-200) y : (0) : l'écran est repéré par des coordonnées : x pour les abscisses (horizontalement) et y pour les ordonnées (verticalement).

S'orienter à (90) degrés : oriente le lutin qui dessine. Cela a de l'importance quand on veut ensuite tourner à droite ou à gauche car le mouvement est **relatif** à la position du lutin. S'il est orienté à 0°, tourner à droite va le diriger vers le bas !

On remarque la boucle **Répéter** qui permet de répéter une action un certain nombre de fois.

Relever le stylo : permet de gérer la couleur, le tracé, ou le choix de dessiner ou pas.

Ici on obtient :



Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 16 juin 2024 à 18:10

Ce document a été écrit pour LATEXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Noble Numbat 24.04 avec la distribution TeX Live 2023.20240207-101 et LuaHBTex 1.17.0

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Compilation.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 16 juin 2024 à 18:10.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : **`https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college`**.