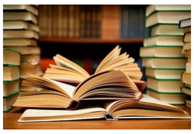


Culture

Le nombre d'or
Quatrième

✧✧✧

Voici un programme de calcul :

— **Choisir un nombre ;**
— **Calculer son inverse ;**
— **Ajouter 1.**

1. Tester ce programme de calcul avec les nombres 1 ; 2 ; $\frac{3}{2}$ puis $\frac{5}{3}$. Donner la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Classer dans l'ordre croissant, en justifiant la réponse par des calculs, les nombres 1 ; 2 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{5}$.

En partant du nombre $\frac{3}{2}$ on obtient $\frac{5}{3}$. En repartant de $\frac{5}{3}$ on obtient $\frac{8}{5}$.

3. Poursuivre ainsi en partant de $\frac{8}{5}$ puis en recommençant avec le résultat obtenu. Répeter cela 5 fois supplémentaires.

4. En utilisant des valeurs approchées des quotients calculées à la calculatrice, classer dans l'ordre croissant, les 10 résultats obtenus.

5. En écrivant $1 = \frac{1}{1}$ et $2 = \frac{2}{1}$, faire la liste des **dénominateurs** des 10 fractions précédentes.

6. Peut-on faire une conjecture sur les cinq fractions suivantes en observant attentivement les nombres entiers obtenus à la question **5.**.

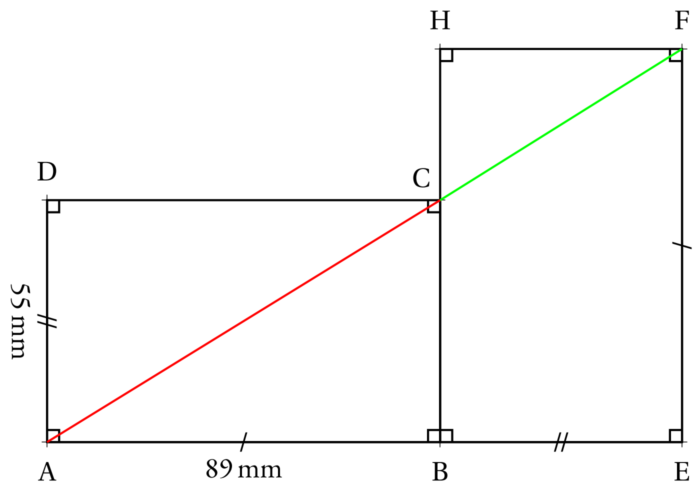
7. Donner une valeurs approchée au dix-millième près des deux dernières fractions obtenues.

Comparer ce résultat avec le nombre $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

*Le nombre ϕ « phi » s'appelle le **nombre d'or** ou **divine proportion**. On le retrouve dès les **Éléments d'Euclide** vers 300 avant notre ère où il correspond à un partage harmonieux d'un segment. À la Renaissance, vers 1480, Luca Pacioli en fait une proportion venue du ciel qui va marquer l'esthétique en peinture et en architecture. Cette manière un peu mystique de voir ce nombre se renforce encore au XVIII ᵉet XIXᵉsiècle. Ce nombre a cependant quelques propriétés mathématiques intéressantes. Par exemple, quand on lui ajoute 1 on obtient son carré. Quand on lui retire 1 on obtient son inverse !*

*La suite de nombres précédentes, 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ... s'appelle **suite de Fibonacci** en homage au mathématicien italien du XII ᵉsiècle Léonardo Fibonacci dit Léonard de Pise. On retrouve cette suite dans d'autres œuvres artistiques, comme dans des films où on lui associe des propriétés magiques !*

Voici une figure géométrique constitué de deux rectangles parfaitement identiques.



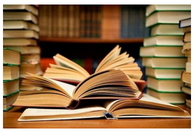
Luca Pacioli et son élève
Jacopi de Barbari — (1495) — Musée de Naples

8.a. Calculer en justifiant la réponse, la mesure des segments [AC], [CF] et [AF].

8.b. Les points A, C et F sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

8.c Pour les plus téméraires, recommencer les deux questions précédentes avec 233 cm et 144 cm.

*Pour que les points A, C et F soient exactement alignés, il faut que le quotient de la longueur et la largeur du rectangle soit exactement égale au nombre d'or. Plus on choisit deux nombres grands nombres consécutifs de la suite de Fibonacci, plus on approche d'une proportion égale au nombre d'or. On parle alors de **rectangle doré**. Ce format de rectangle, par exemple pour la toile d'un tableau, a été souvent choisie pour cette raison. Cette proportion serait la plus harmonieuse !*



Le nombre d'or — Correction

✧✧✧

Culture

1. En partant du nombre 1, on obtient successivement $\frac{1}{1}=1$ puis $1+1=2$. En partant de 1 on arrive à 2.

En partant du nombre 2, on obtient successivement $\frac{1}{2}$ puis $\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$. En partant de 2 on arrive à $\frac{3}{2}$.

En partant du nombre $\frac{3}{2}$, on obtient successivement $\frac{2}{3}$ puis $\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$. En partant de $\frac{3}{2}$ on arrive à $\frac{5}{3}$.

En partant du nombre $\frac{5}{3}$, on obtient successivement $\frac{3}{5}$ puis $\frac{3}{5}+1=\frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{8}{5}$. En partant de $\frac{5}{3}$ on arrive à $\frac{8}{5}$.

2. On peut écrire $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{5}$ avec le même dénominateur $2\times3\times5=30$.

$\frac{3}{2}=\frac{3\times15}{2\times15}=\frac{45}{30}$

$\frac{5}{3}=\frac{5\times10}{3\times10}=\frac{50}{30}$

$\frac{8}{5}=\frac{8\times6}{5\times6}=\frac{48}{30}$.

Finalement $1<\frac{3}{2}<\frac{8}{5}<\frac{5}{3}<2$

3. En partant du nombre $\frac{8}{5}$, on obtient successivement $\frac{5}{8}$ puis $\frac{5}{8}+1=\frac{5}{8}+\frac{8}{8}=\frac{13}{8}$. En partant de $\frac{8}{5}$ on arrive à $\frac{13}{8}$.

En partant du nombre $\frac{13}{8}$, on obtient successivement $\frac{8}{13}$ puis $\frac{8}{13}+1=\frac{8}{13}+\frac{13}{13}=\frac{21}{13}$. En partant de $\frac{13}{8}$ on arrive à $\frac{21}{13}$.

En partant du nombre $\frac{21}{13}$, on obtient successivement $\frac{13}{21}$ puis $\frac{13}{21}+1=\frac{13}{21}+\frac{21}{21}=\frac{34}{21}$. En partant de $\frac{21}{13}$ on arrive à $\frac{34}{21}$.

En partant du nombre $\frac{34}{21}$, on obtient successivement $\frac{21}{34}$ puis $\frac{21}{34}+1=\frac{21}{34}+\frac{34}{34}=\frac{55}{34}$. En partant de $\frac{34}{21}$ on arrive à $\frac{55}{34}$.

En partant du nombre $\frac{55}{34}$, on obtient successivement $\frac{34}{55}$ puis $\frac{34}{55}+1=\frac{34}{55}+\frac{55}{55}=\frac{89}{55}$. En partant de $\frac{55}{34}$ on arrive à $\frac{89}{55}$.

4. $\frac{3}{2}=1,5$; $\frac{5}{3}\approx1,6667$; $\frac{8}{5}=1,6$; $\frac{13}{8}=1,625$; $\frac{21}{13}\approx1,6154$; $\frac{34}{21}\approx1,619$; $\frac{55}{34}\approx1,6176$ et $\frac{89}{55}\approx1,6182$

$1<\frac{3}{2}<\frac{8}{5}<\frac{21}{13}<\frac{55}{34}<\frac{89}{55}<\frac{34}{21}<\frac{13}{8}<\frac{5}{3}<2$

5. Voici la liste des dénominateurs : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55

6. On peut conjecturer un règle qui permet de passer d'un nombre à l'autre.
Ainsi :
$1+1=2$; $1+2=3$; $2+3=5$; $3+5=8$; $8+5=13$; $13+8=21$; $21+13=34$ et $21+34=55$.

Si cette conjecture est vraie, les termes suivants sont :

$55+34=89$; $89+55=144$; $144+89=233$; $233+144=377$; $377+233=610$ et enfin $610+377=987$

Les cinq fractions suivantes sont : $\frac{144}{89}$; $\frac{233}{144}$; $\frac{377}{233}$; $\frac{610}{377}$ et $\frac{987}{610}$.

7. À la calculatrice on arrive à $\frac{610}{377}\approx1,61804$ et $\frac{987}{610}\approx1,61803$.

8.a. Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$89^2 + 55^2 = AC^2$$
$$7921 + 3025 = AC^2$$
$$AC^2 = 10\,946$$
$$AC = \sqrt{10\,946}$$
$$AC \approx 104{,}62$$

$\boxed{AC \approx 104{,}62\,\text{mm}}$

Dans le triangle CHF rectangle en H,
$HC = HB - BC = 89\,\text{mm} - 55\,\text{mm} = 34\,\text{mm}$
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HC^2 + HF^2 = CF^2$$
$$55^2 + 34^2 = CF^2$$
$$3025 + 1156 = CF^2$$
$$CF^2 = 4181$$
$$CF = \sqrt{4181}$$
$$CF \approx 64{,}66$$

$\boxed{CF \approx 64{,}66\,\text{mm}}$

Dans le triangle AEF rectangle en E,
$AE = AB + BE = 89\,\text{mm} + 55\,\text{mm} = 144\,\text{mm}$
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

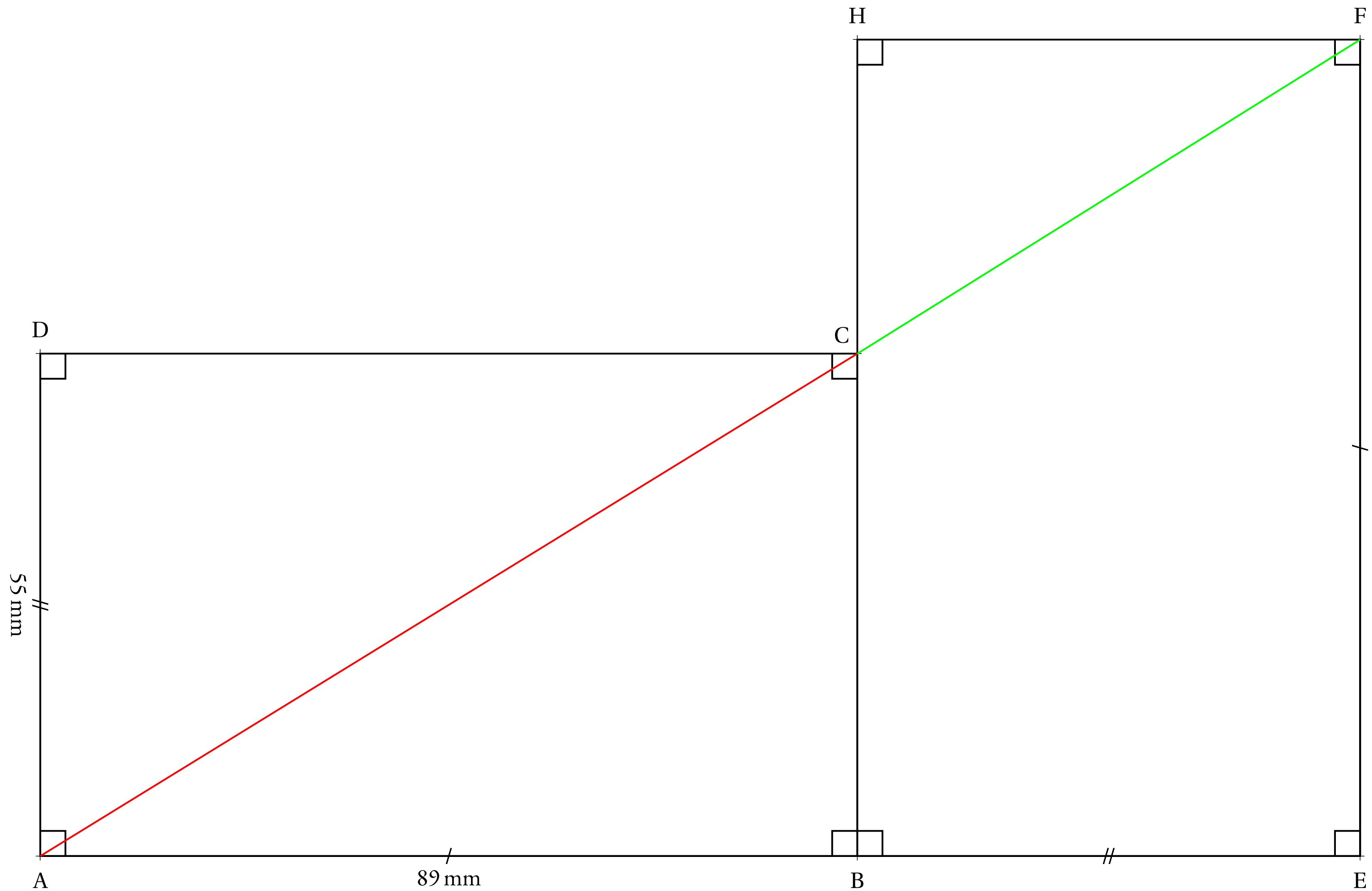
$$EA^2 + EF^2 = AF^2$$
$$144^2 + 89^2 = AF^2$$
$$20\,736 + 7921 = AF^2$$
$$AF^2 = 28\,657$$
$$AF = \sqrt{28\,657}$$
$$AF \approx 169{,}28$$

$\boxed{AF \approx 169{,}28\,\text{mm}}$

8.b. $AC + CF = 104{,}62\,\text{mm} + 64{,}66\,\text{mm} = 169{,}28\,\text{mm}$
Avec les arrondis au centième près, on voit que $AC + CF = AF$.

En revanche $\sqrt{10946} + \sqrt{4181} \approx 169{,}283\,785\,8$ et $\sqrt{28657} \approx 169{,}2837854$.
Au dix-millionième près , $AC + CF \neq AF$!

Les points A, C et F ne sont pas alignés, même si c'est invisible à l'oeil nu ! On peut tester en construisant cette figure en vraie grandeur !


H
F
D
C
55 mm
A
89 mm
B
E

8.c On peut reprendre les calculs précédents avec AB = 233 cm et AD = 144 cm, on a alors CH = 89 cm et AE = 377 cm
On arrive ainsi à :

$$233^2 + 144^2 = AC^2$$

$$AC^2 = 75\,025$$

$$AC = \sqrt{75\,025}$$

$$144^2 + 89^2 = CF^2$$

$$CF^2 = 28\,657$$

$$CF = \sqrt{28\,657}$$

$$377^2 + 233^2 = AF^2$$

$$AF^2 = 196\,418$$

$$AF = \sqrt{196\,418}$$

La calculatrice ordinaire est incapable de différencier AC + CF et AF.
Il faut utiliser un outil plus puissant comme le site en ligne **wolframalpha.com**.
On obtient :
$\sqrt{75025} + \sqrt{28657} \approx 443{,}190\,703\,89$
$\sqrt{196418} \approx 443{,}190\,703\,87$

Impressionant, non ?

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 30 avril 2026 à 12:51

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.967
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Questing Quokka (Le Quokka en quête) 25.10 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TEX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux!
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir!