CHAPITRE V

Le théorème de Thalès

Sommaire

Chapitre 5

Le théorème de Thalès

Version triangle

Objectifs d'apprentissage :

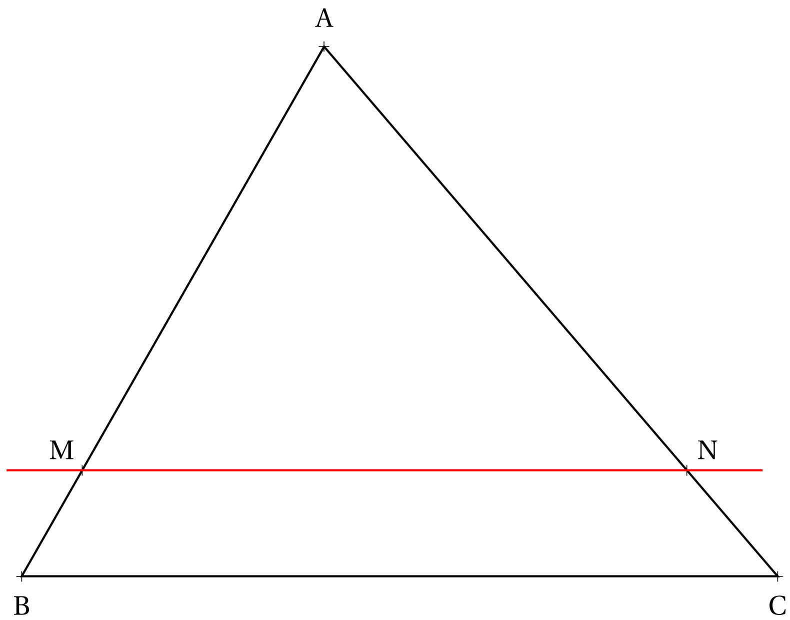
- **Théorème de Thalès**
  - ☐ *Reconnaître une configuration de Thalès dans le triangle* 🐣
  - ☐ *Calculer une mesure manquante dans une configuration de Thalès dans le triangle* 🐦
- **Réciproque du théorème de Thalès**
  - ☐ *Démontrer que deux droites sont parallèles dans la configuration triangle* 🐦
  - ☐ *Démontrer que deux droies sont sécantes dans la configuration triangle* 🐦
- **Figures complexes**
  - ☐ *Mobiliser le théorème de Thalès ou le théorème de Pythagore pour résoudre un problème* 🦅

La leçon — Version prof

Les textes écrit en violet sont destinés à l'enseignant, ils ne font pas partie de ce qu'on appelle la trace écrite.
Les démonstrations sont aussi en violet, elles sont le plus souvent présentée à l'oral.

I — Le théorème de Thalès

Théorème 5.1 : Théorème de Thalès



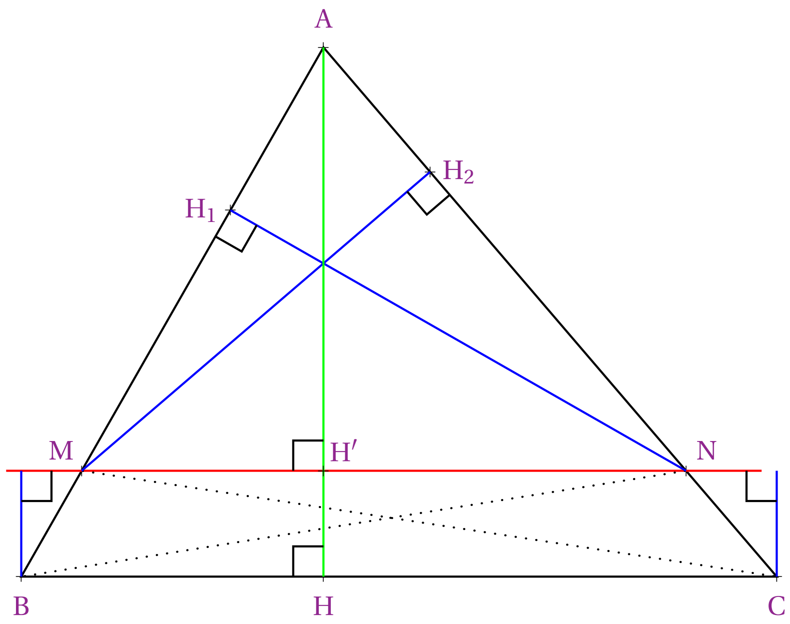
Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$

Si $(MN)//(BC)$ **alors** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Démonstration :

Voici une version de la preuve dans le cas d'un triangle acutangle.

Si le triangle possède un angle obtus, la démonstration est tout à fait identique.



Les triangles MNB et MNC ont un côté en commun, [MN].
Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, ils ont la même hauteur, la distance entre ces droites parallèles.
Par conséquent, ces deux triangles ont la même aire : Aire(MNB) = Aire(MNC).

En ajoutant le triangle AMN on arrive à Aire(ANB) = Aire(AMC).

H_1N est la hauteur qui correspond à la base AB dans le triangle ANB.
H_2M est la hauteur qui correspond à la base AC dans le triangle AMC

Comme ces triangles ont la même aire, $H1_N \times AB = H_2M \times AC$ ce qui, en utilisant les produits en croix, est équivalent à $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AC}{AB}$.

On peut aussi calculer de deux manières l'aire du triangles AMN, en considérant la base AM et la hauteur H_1N ou en considérant la base AN et la hauteur H_2M.

Ainsi, on arrive à $H_1N \times AM = H_2M \times AN$ ou encore de manière équivalente, $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AN}{AM}$.

Par conséquent $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AC}{AB}$.

Par égalité des produits en croix, on obtient $AN \times AB = AM \times AC$ puis à nouveau avec les produits en croix on conclut à $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Ce qui nous donne la première partie de l'égalité !

On peut reprendre le raisonnement précédent dans les triangles ABH et AHC.

On arrive de la même manière à $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$

Les triangles NH′C et NH′H ont la même base NH′ et la même hauteur puisque (MN)//(BC), ils ont donc la même aire.
En ajoutant le triangle AH′N on arrive au fait que les triangles AH′C et AHN ont la même aire.
Comme H′N est la hauteur de la base HA du triangle AHN et que HC est la hauteur de la base AH′ du triangle AH′C, on arrive à :

$H'N \times AH = HC \times AH'$ d'où $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$.

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Ainsi $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ d'où $H'M \times HC = H'N \times HB$.

Or on sait que $MN = H'M + H'N$ et $BC = HB + HC$.
Il suffit d'ajouter le terme $H'N \times HC$ aux deux termes de $H'M \times HC = H'N \times HB$.
On arrive à :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$

$$HC(H'M + H'N) = H'N(HB + HC)$$

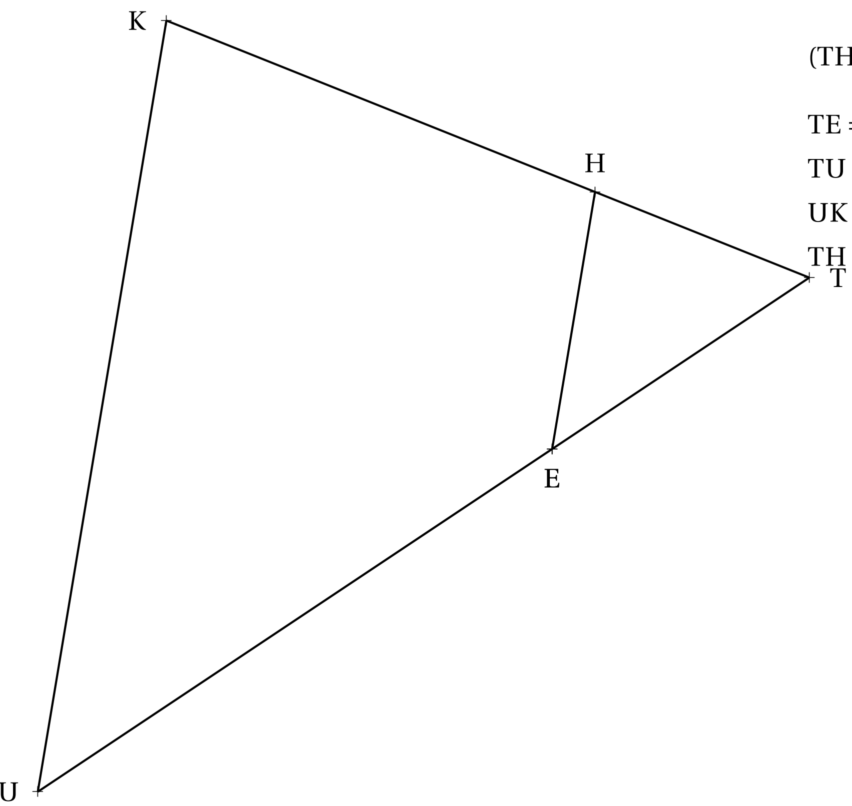
$$HC \times MN = H'N \times BC$$

On arrive péniblement à $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$ c'est à dire $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AH'}{AH}$ ou encore $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

MÉTHODE 5.1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

(TH)//(UK)

$TE = 3\ cm$
$TU = 10\ cm$
$UK = 15\ cm$
$TH = 4\ cm$

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\dfrac{\text{TE}}{\text{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\dfrac{\text{TH}}{\text{TK}}$

Nous en sommes à : $\dfrac{\text{TE}}{\text{TU}} = \dfrac{\text{TH}}{\text{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\dfrac{\text{EH}}{\text{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\dfrac{\text{TE}}{\text{TU}} = \dfrac{\text{TH}}{\text{TK}} = \dfrac{\text{EH}}{\text{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur ; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$$

Comme $\dfrac{3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{4\ cm}{\text{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{TK} = \dfrac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \dfrac{40}{3}\ cm \approx 13{,}3\ cm$

Comme $\dfrac{3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{\text{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{EK} = \dfrac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{45}{10}\ cm = 4{,}5\ cm$

Ainsi $\boxed{\text{TK} \approx 13{,}3\ cm}$ et $\boxed{\text{EK} = 4{,}5\ cm}$.

*En pratique, quand on rédige seule la partie **3.** doit apparaître sur une copie !*

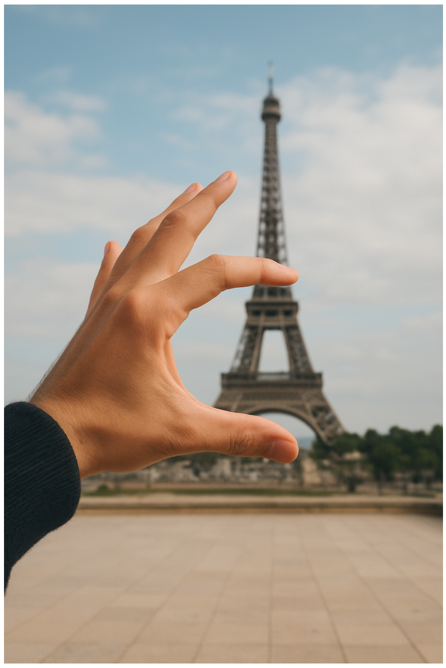
III — Réciproque du théorème de Thalès

La Tour Eiffel

Quatrième

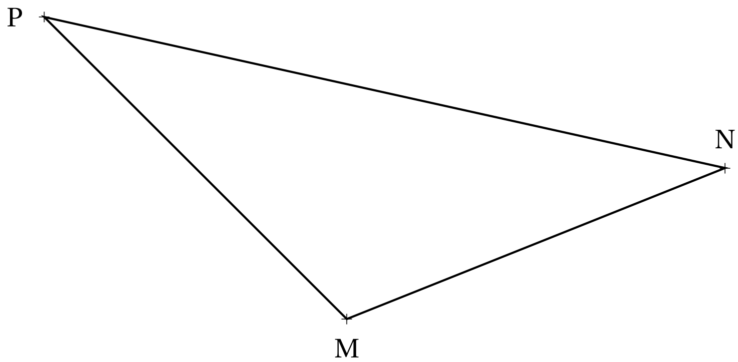
Cette photo a été prise à Paris, certainement sur le parvis du Trocadéro, en face de la Tour Eiffel. Il s'agit d'un jeu avec la perspective. La Tour Eiffel, située en arrière plan, semble d'une taille comparable à celle de la main. C'est une situation que l'on retrouve dans de nombreuses illusions d'optiques. Il est facile d'imaginer que si la photo avait été prise beaucoup plus près, la Tour Eiffel aurait paru beaucoup plus grande.

L'objectif de cette activité consiste à déterminer à quelle distance approximative du pied de la Tour Eiffel cette photo a été prise.



1. À main levée modéliser cette situation sous la forme d'une figure de géométrie.

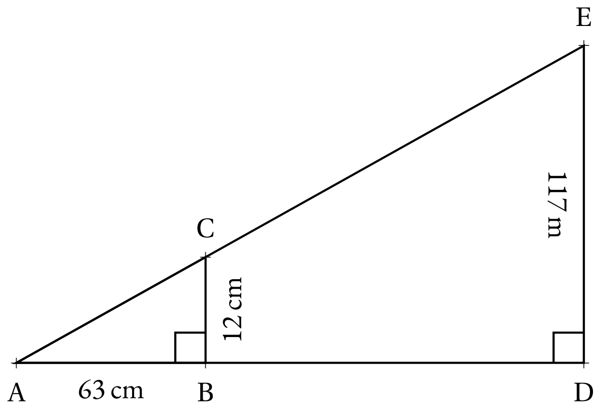
2. Voici un triangle quelconque. Tracer ses trois hauteurs.



3. Comment calcule-t-on l'aire d'un triangle quelconque ?

Voici une manière de modéliser cette photo en faisant quelques hypothèses simplificatrices :

- le sol est horizontal ;
- la Tour Eiffel et la main sont parfaitement verticales ;
- la main entre le bas du pouce et le haut de l'index mesure 12 cm ;
- la distance entre l'appareil photo et la main mesure 63 cm ;
- entre le sol et le deuxième étage de la Tour Eiffel vaut 117 m ;
- tout est bien aligné...



4. Tracer en rouge les trois hauteurs du triangle BCD. Tracer en vert les trois hauteurs du triangle BCE.

5. Expliquer pourquoi les triangles BCD et BCE ont exactement la même aire.

6. En déduire que les triangles ACD et ABE ont exactement la même aire.

7. Expliquer pourquoi [BC] est une hauteur de ACD et que [ED] est une hauteur de ABE.

8.a. Écrire une expression utilisant la longueur AD pour calculer l'aire de ACD.
8.b. Écrire une expression utilisant la longueur AB pour calculer l'aire de ABE.

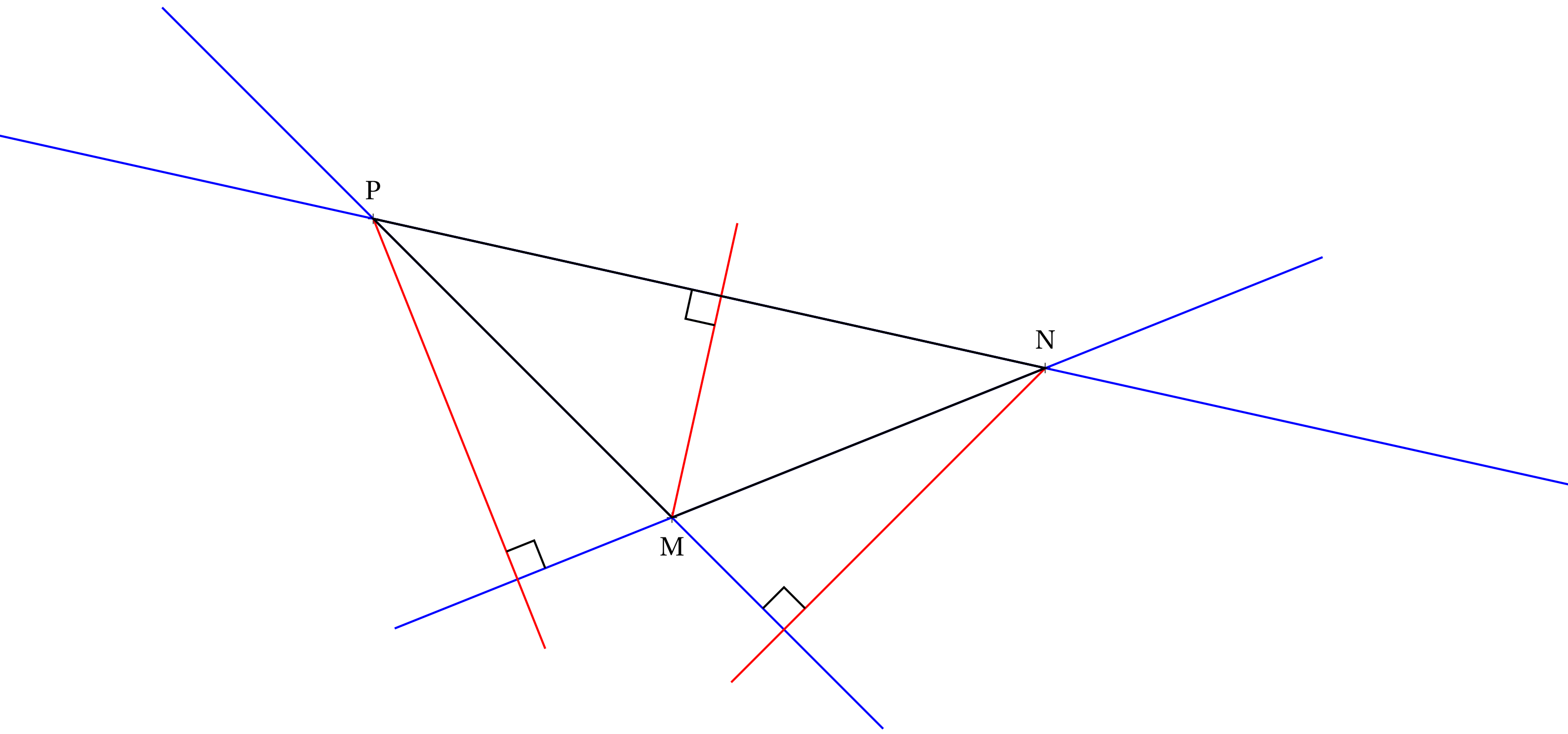
9. Montrer finalement que AC × 12 cm = 63 cm × 117 m.

10. En déduire la valeur de AC.

11.a. Le deuxième étage de la Tour Eiffel est « combien de fois plus grand »que la main ouverte ?
11.b. La distance entre le photographe et la Tour Eiffel est « combien de fois plus grande »que la distance entre l'appareil photo et la main ?

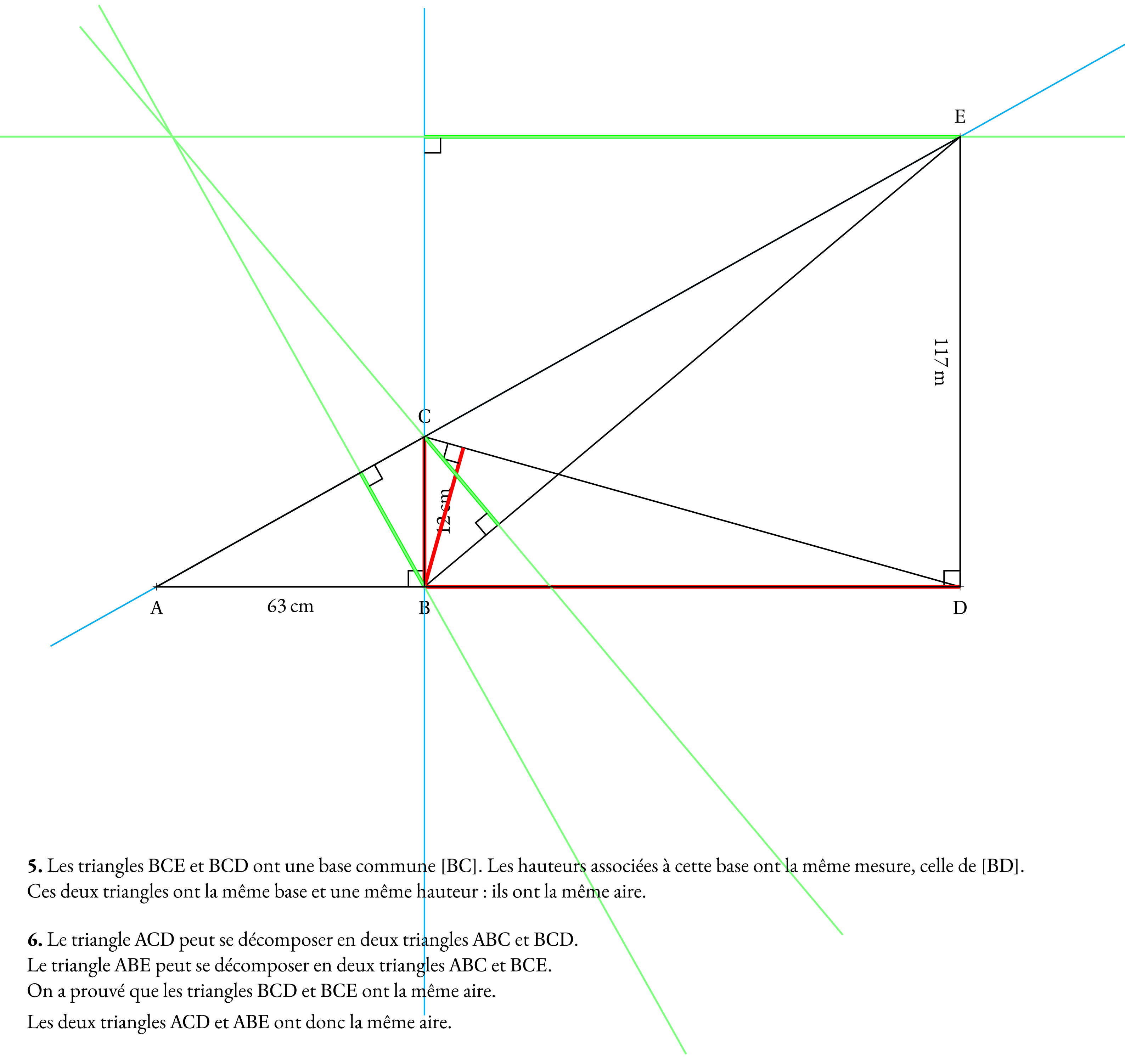
1. Il est amusant d'observer les modélisations proposées par les élèves !!

2. Voici un triangle quelconque. Tracer ses trois hauteurs.



3. $\boxed{\text{Pour déterminer l'aire d'un triangle il faut calculer Base} \times \text{Hauteur} \div 2.}$

4.



5. Les triangles BCE et BCD ont une base commune [BC]. Les hauteurs associées à cette base ont la même mesure, celle de [BD].
Ces deux triangles ont la même base et une même hauteur : ils ont la même aire.

6. Le triangle ACD peut se décomposer en deux triangles ABC et BCD.
Le triangle ABE peut se décomposer en deux triangles ABC et BCE.
On a prouvé que les triangles BCD et BCE ont la même aire.
Les deux triangles ACD et ABE ont donc la même aire.

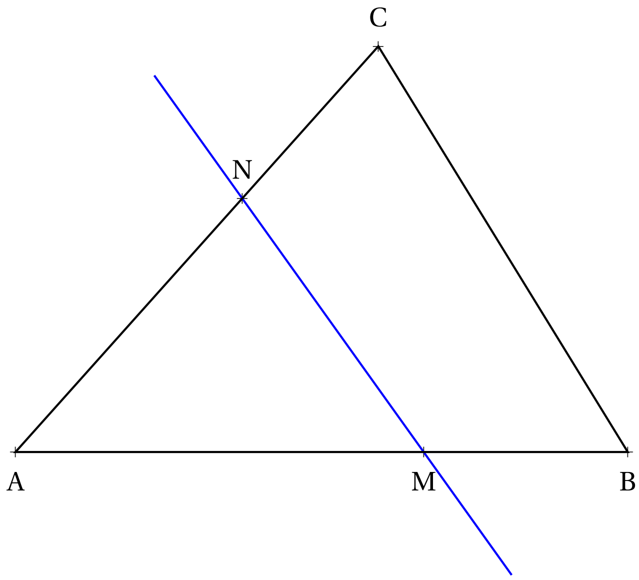
Parallèles et longueurs

Quatrième

✧✧

Situation Initiale

Voici deux triangles égaux, ABC et DEF dont les mesures sont AB = DE = 81 mm, BC = EF = 72 mm et AC = DF = 63 mm :



Situation Initiale

Parallèles et longueurs — Correction

Situation initiale : La droite des milieux, la droite des tiers

La droite des milieux

1. Tracer sur une feuille blanche le triangle ABC tel que AB = 8 cm, AC = 12 cm et BC = 14 cm.
Placer M le milieu de [AB] puis la droite parallèle à la droite (BC) passant par M.
Cette droite coupe le segment [AC] en N.

2. Mesurer le segment [MN]. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur la position du point N et sur la longueur MN ?

Nous allons démontrer que N est le milieu du segment [AC] et quelques petites choses en plus...

3. Placer N′ le symétrique du point N par rapport au point M.

4. Que dire du quadrilatère AN′BN ? Démontrer cette conjecture.

5. Que dire du quadrilatère NN′BC ? Démontrer cette conjecture.

6. Expliquer pourquoi AN = N′B et N′B = NC. Que pouvez-vous dire du point N ?

7. Expliquer pourquoi NN′ = BC. Que dire de la longueur MN par rapport la longueur BC ?

8. Calculer les quotients : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$, $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ et $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Quelle est votre conclusion ?

La droite des tiers

1. Tracer sur une feuille blanche un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 9 cm et BC = 12 cm.
Placer M sur le segment [AB] tel que AM = 2 cm.
Tracer la parallèle à (BC) passant par M, elle coupe le segment [AC] en N.

2. En mesurant AM et MN calculer les trois quotients comme à la question **8.** de la première partie.
Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Évaluation de mathématiques

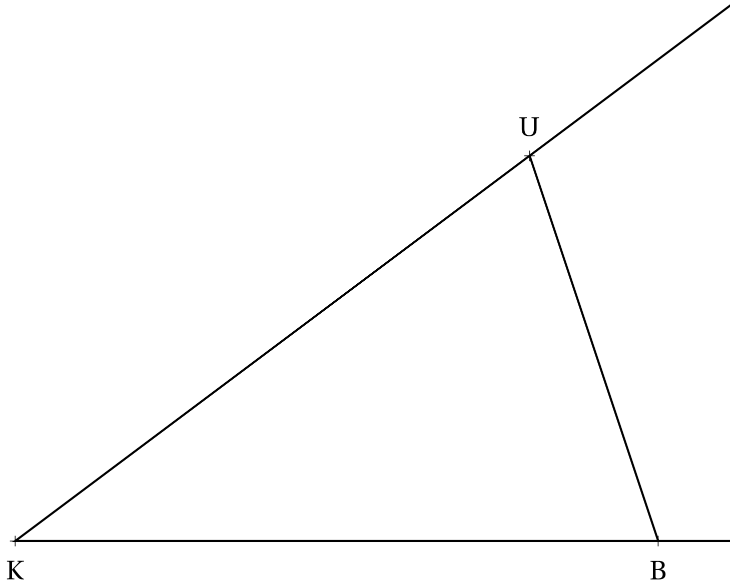
Exercice n° 1 : *8 points*

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

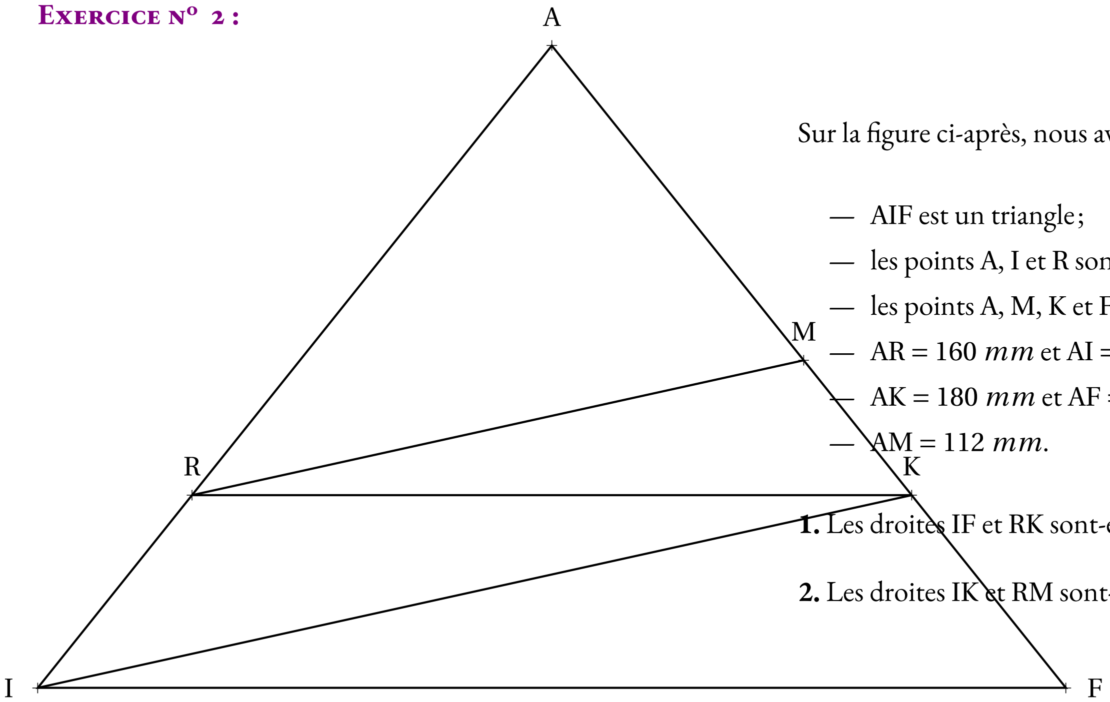
— KTR est un triangle ;
— K, B et R sont alignés ;
— K, U et T sont alignés ;
— KU = 12 cm ;
— KT = 15 cm ;
— KB = 14 cm ;
— UB = 8 cm.

1. Calculer TR et KR.

2. Le triangle KUB est-il rectangle ?



Exercice n° 2 : *6 points*



Sur la figure ci-après, nous avons les informations suivantes :

— AIF est un triangle ;
— les points A, I et R sont alignés ;
— les points A, M, K et F sont alignés ;
— AR = 160 mm et AI = 256 mm ;
— AK = 180 mm et AF = 288 mm ;
— AM = 112 mm.

1. Les droites IF et RK sont-elles parallèles ?

2. Les droites IK et RM sont-elles parallèles ?

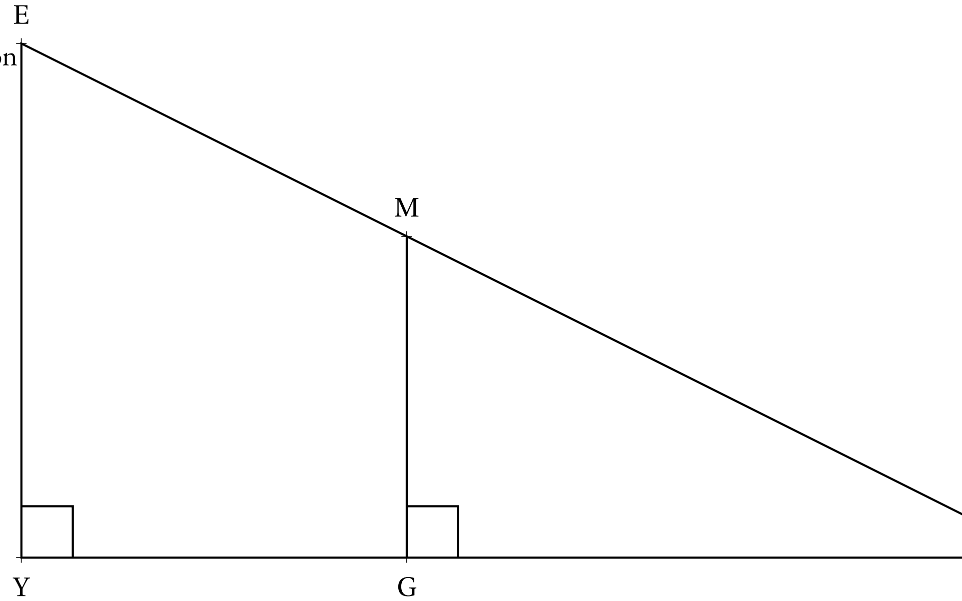
Exercice n° 3 : *6 points*

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

— DYE et DGM sont des triangles rectangles ;
— DG = 48 dm et DM = 60 dm ;
— YE = 54 dm

1. Montrer que MG = 36 dm.

2. Calculer YG et EM.

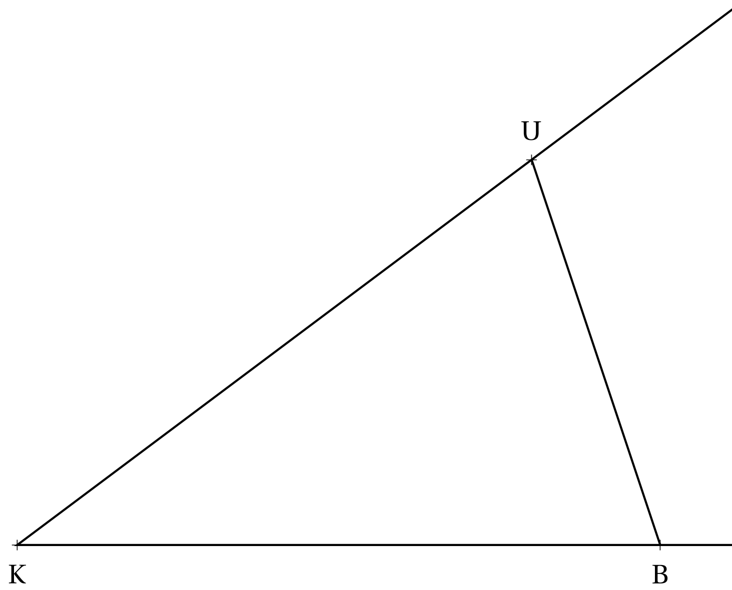


Évaluation de mathématiques

EXERCICE N° 1 : *8 points* ☆☆

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

— KTR est un triangle ;
— K, B et R sont alignés ;
— K, U et T sont alignés ;
— KU = 12 cm ;
— KT = 15 cm ;
— KB = 14 cm ;
— UB = 8 cm.



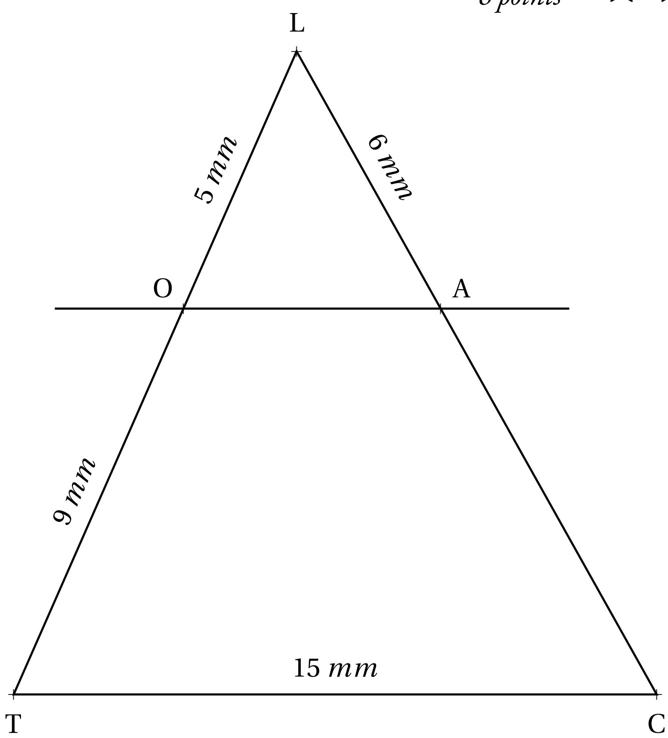
1. Calculer TR et KR.

2. Le triangle KUB est-il rectangle ?

EXERCICE N° 2 : *6 points* ☆☆

Sur la figure ci-après, qui n'est pas représentée en vraies grandeurs, nous savons que :

— les points L, O et T sont alignés ;
— les points L, A et C sont alignés ;
— les droites (OA) et (TC) sont parallèles.



Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.

Exercice n° 3 :

6 points

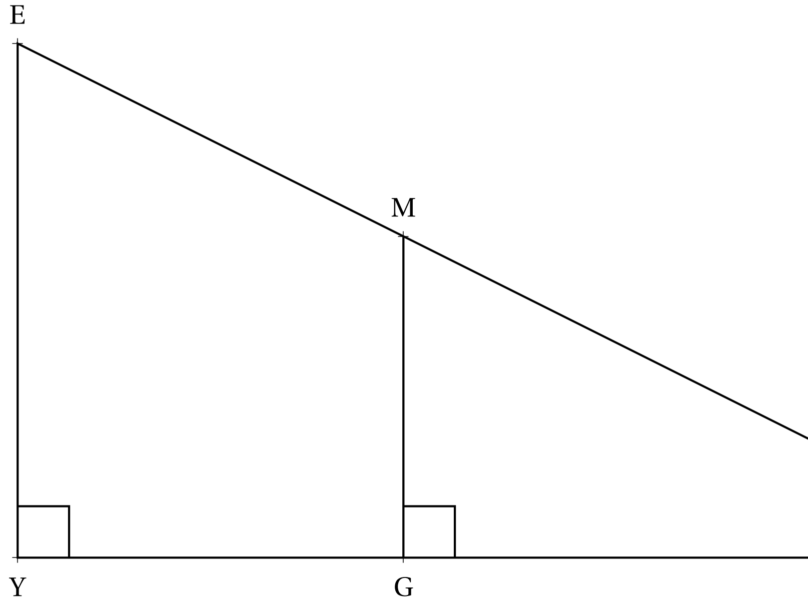
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

- DYE et DGM sont des triangles rectangles ;
- DG = 48 dm et DM = 60 dm ;
- YE = 54 dm

1. Montrer que MG = 36 dm.

2. Expliquer pourquoi les droites (MG) et (EY) sont parallèles.

3. Calculer YG et EM.



Évaluation

Quatrième

Exercice n° 1 :

8 points

1. Placer les points suivants dans le repère ci-contre :

A$(-1;7)$ — B$(-2;3)$ — C$(-1;-3)$

(D$(2;-4)$ — E$(5;-3)$ — F$(6;3)$

G$(5;7)$ — H$(4;3)$ — I$(2;4)$ — J$(0;3)$

Relier ces points dans l'ordre alphabétique

2. Placer les points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1$ obtenus en appliquant les règles suivantes :

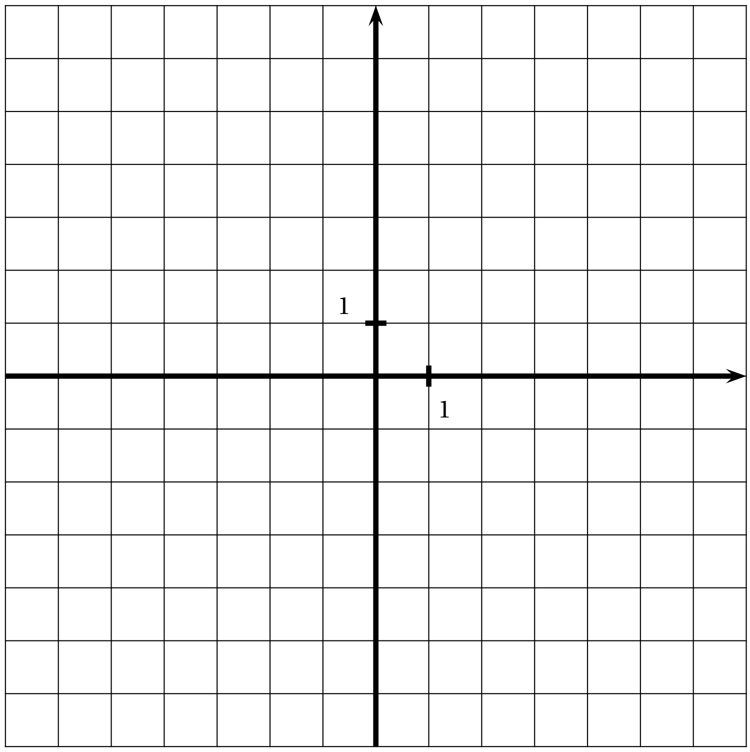
— L'abscisse de A_1 est égale à 2 moins l'abscisse de A;

— L'ordonnée de A_1 est égale à -3 plus l'ordonnée de A.

En suivant cette règle le point A_1 a pour coordonnées $A_1(3;4)$.

Écrire sur votre copie les coordonnées de ces points et placer les dans un repère.

Relier ces points dans l'ordre alphabétique.

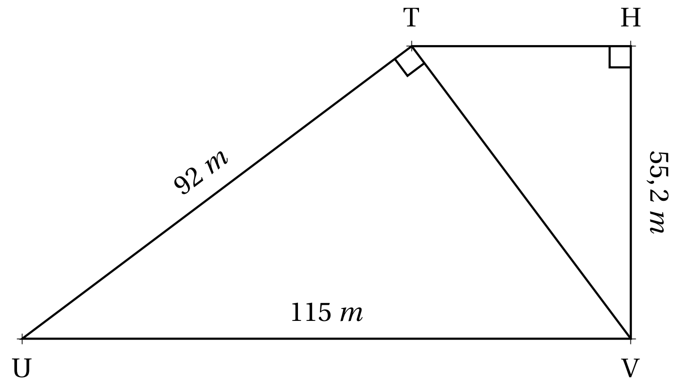


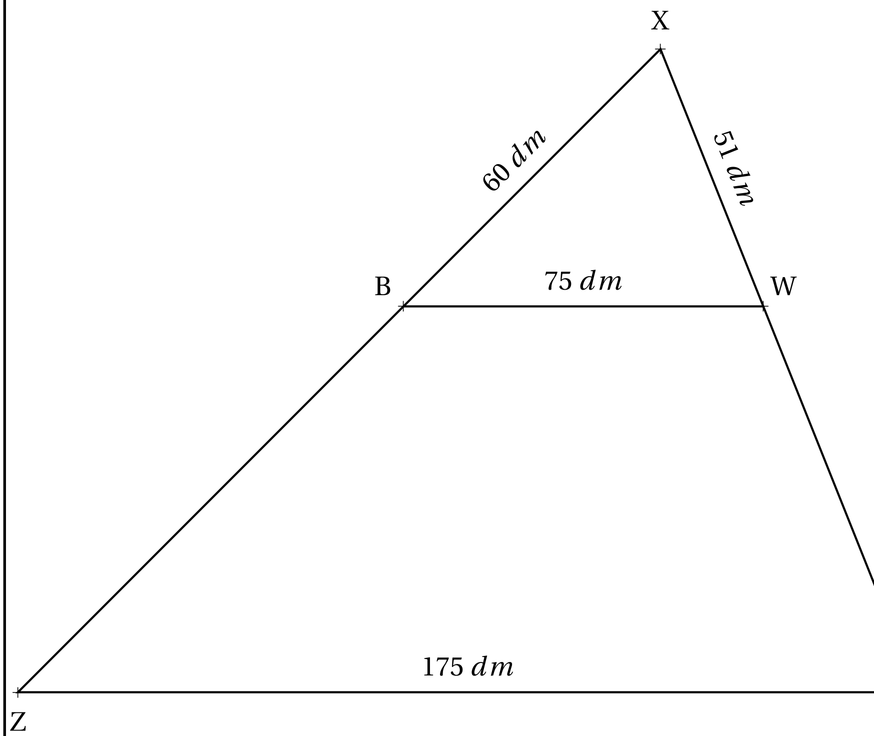
Exercice n° 2 :

6 points

Calculer et simplifier en détaillant votre démarche :

Exercice n° 3 : *6 points*





1. Calculer en détaillant votre raisonnement les longueurs TV et TH.

2. Calculer en détaillant votre raisonnement les longueurs ZX et XA.

Fractions, repère et Thalès — Correction

Exercice n° 1 : Repère

Repère orthonormé

1. Placer les points suivants dans le repère ci-contre :

A(−1;7) — B(−2;3) — C(−1;−3)

(D(2;−4) — E(5;−3) — F(6;3)

G(5;7) — H(4;3) — I(2;4) — J(0;3)

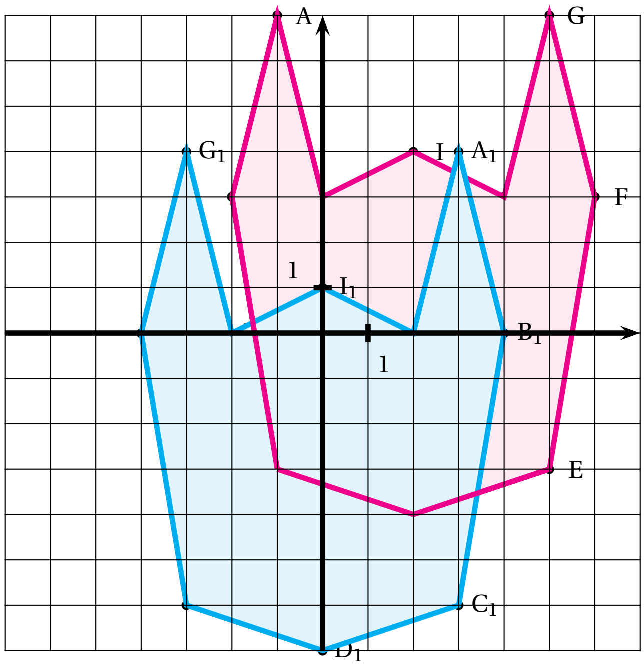
Relier ces points dans l'ordre alphabétique

2. Placer les points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1$ obtenus en appliquant les règles suivantes :

$A_1(3;4)$ — $B_1(4;0)$ — $C_1(3;-6)$

$D_1(0;-7)$ — $E_1(-3;-6)$ — $F_1(-4;0)$

$G_1(-3;4)$ — $H_1(-2;0)$ — $I_1(0;1)$ — $J_1(2;0)$



Correction

Exercice n° 2 : Fractions

Correction

Fractions

Calculer et simplifier en détaillant votre démarche :

$$A = 2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} + \frac{11}{15}$$

$$A = \frac{2}{1} - \frac{1\times 10}{3\times 10} + \frac{2\times 6}{5\times 6} - \frac{7}{30} + \frac{11\times 2}{15\times 2}$$

$$A = \frac{2\times 30}{1\times 30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} - \frac{7}{30} + \frac{22}{30}$$

$$A = \frac{60}{30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} - \frac{7}{30} + \frac{22}{30}$$

$$\boxed{A = \frac{77}{30}}$$

$$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{7}{6} - \frac{13}{12}\right)$$

$$B = \left(\frac{3\times 3}{4\times 3} - \frac{4\times 4}{3\times 4}\right) - \left(\frac{7\times 2}{6\times 2} - \frac{13}{12}\right)$$

$$B = \left(\frac{9}{12} - \frac{16}{12}\right) - \left(\frac{14}{12} - \frac{13}{12}\right)$$

$$B = -\frac{7}{12} - \frac{1}{12}$$

$$B = -\frac{8}{12}$$

$$\boxed{B = -\frac{2}{3}}$$

$$C = 3 - \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(3 + \frac{7}{4}\right)$$

$$C = 3 - \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{1} + \frac{7}{4}\right)$$

$$C = 3 - \left(\frac{1\times 7}{1\times 7} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3\times 4}{1\times 4} + \frac{7}{4}\right)$$

$$C = 3 - \left(\frac{7}{7} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{12}{4} + \frac{7}{4}\right)$$

$$C = \frac{3}{1} - \frac{5}{7} + \frac{19}{4}$$

$$C = \frac{3\times 28}{1\times 28} - \frac{5\times 4}{7\times 4} + \frac{19\times 7}{4\times 7}$$

$$C = \frac{84}{28} - \frac{20}{28} + \frac{133}{28}$$

$$\boxed{C = \frac{197}{28}}$$

Exercice n° 3 : Thalès et Pythagore

Correction

Thalès et Pythagore

1.

Dans le triangle TUV rectangle en T,

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TU^2 + TV^2 = UV^2$$
$$92^2 + TV^2 = 115^2$$
$$8\,464 + TV^2 = 13\,225$$
$$TV^2 = 13\,225 - 8\,464$$
$$TV^2 = 4\,761$$
$$TV = \sqrt{4\,761}$$
$$TV = 69$$

Dans le triangle THV rectangle en H,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HT^2 + HV^2 = TV^2$$
$$HT^2 + 55,2^2 = 69^2$$
$$HT^2 + 3\,047,04 = 4\,761$$
$$HT^2 = 4\,761 - 3\,047,04$$
$$HT^2 = 1\,713,96$$
$$HT = \sqrt{1\,713,96}$$
$$HT = 41,4$$

$\boxed{TV = 69\ m \text{ et } HT = 41,4\ m}$

2.
Dans le triangle ZAX, les droites (BW) et (ZA) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{XB}{XZ} = \frac{XW}{XA} = \frac{BW}{ZA}$$
$$\frac{60\ dm}{XZ} = \frac{51\ dm}{XA} = \frac{75\ dm}{175\ dm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$XZ = \dfrac{60\ dm \times 175\ dm}{75\ dm}$ d'où $XZ = \dfrac{10\,500\ dm^2}{75\ dm}$ et $XZ = 140\ dm$
$XA = \dfrac{51\ dm \times 175\ dm}{75\ dm}$ d'où $XA = \dfrac{8\,725\ dm^2}{75\ dm}$ et $XA = 119\ dm$

$\boxed{XZ = 140\ dm \text{ et } XA = 119\ dm}$

Entraînement

Le théorème de Thalès dans le triangle

Quatrième

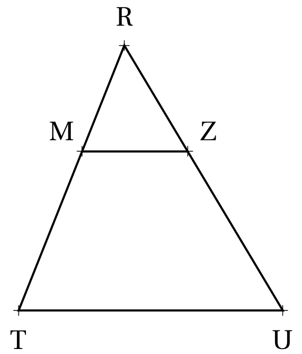
Exercice n° 1 : Théorème de Thalès — Épisode 1

Situation n° 1

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

— $M \in [RT]$, $Z \in [RU]$ et $(MZ)//(TU)$;

— $RM = 8\ m$, $RT = 20\ m$, $RZ = 6,4\ m$ et $TU = 18\ m$



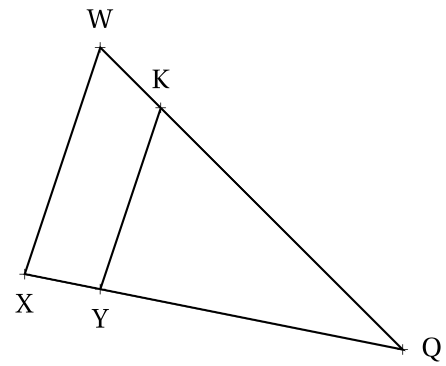
Calculer les valeurs exactes de RU et MZ.

Situation n° 2

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas tracée en vraie grandeur on sait que :

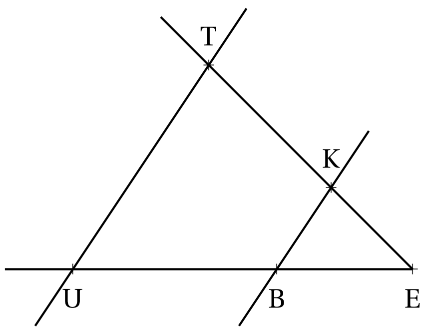
— $Y \in [XQ]$, $K \in [WQ]$ et $(YK)//(XW)$;

— $KQ = 13\ mm$, $WQ = 17\ mm$, $YQ = 11\ mm$ et $WX = 21\ mm$



Calculer les valeurs exactes puis approchée au centième près de XY et YK.

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès — Épisode 2



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

— (TK) et (UB) sont sécantes en E ;

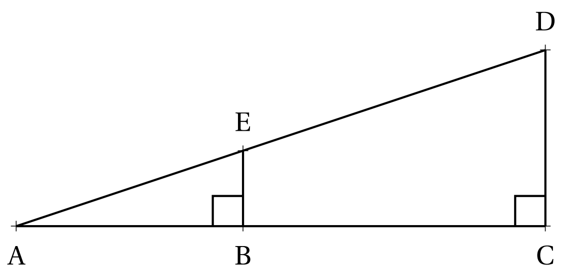
— $BE = 6\ m$, $UB = 9\ m$, $BK = 4\ m$ et $TE = 10\ m$;

— $(UT)//(BK)$

Calculer les valeurs exactes de UT et TK et, le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

Exercice n° 3 : Un soupçon de Thalès et un peu de Pythagore

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



— ABE est rectangle en B ;

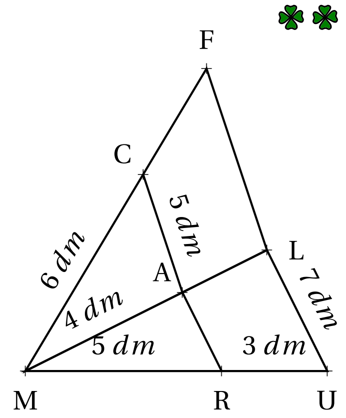
— ACD est rectangle en C ;

— $AB = 36\ m$, $AE = 60\ m$, $DC = 72\ m$.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

EXERCICE N° 4 : Deux fois plus de Thalès

Sur la figure ci-après, qui n'est pas représentée en vraies grandeurs, nous savons que :



— les points M, R et U sont alignés;

— les points M, A et L sont alignés;

— les points M, C et F sont alignés;

— les droites (RA) et (UL) sont parallèles;

— les droites (CA) et (FL) sont parallèles;

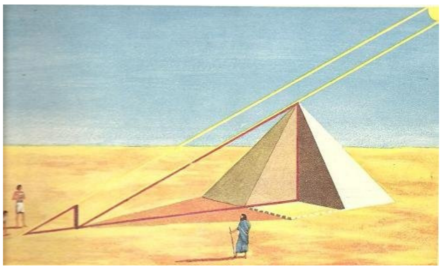
Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au dixième près des longueurs AR, AL, FL et CF.

EXERCICE N° 5 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.

Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :

« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».



Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

— la canne de Thalès mesurait 3 coudées;

— l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées;

— la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide;

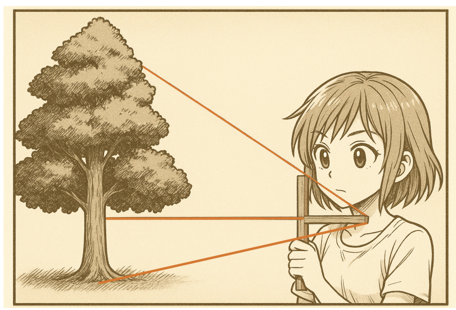
— une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Modéliser cette situation sous forme d'une figure de géométrie. Indiquer les mesures et coder les angles droits.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

EXERCICE N° 6 : La croix du bucheron

La dendrométrie désigne pour le sylviculteur, l'opération qui consiste à mesurer le diamètre et la hauteur des arbres. C'est un travail indispensable d'intérêt économique qui permet de mesurer l'état de conservation du milieu et planifier la gestion forestière.
La croix du bucheron est un dendromètre simplifié qui permet de mesurer la hauteur d'un arbre. Il est constitué de deux batons de même longueur.



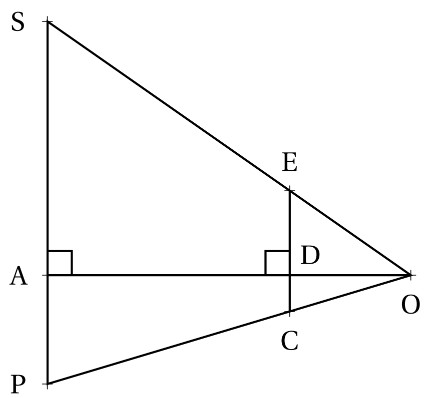
Voici une modélisation géométrique qui illustre l'usage de la croix du bucheron.

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— $E \in [SO]$, $C \in [PO]$ et $D \in [AO]$;

— $(EC) \perp (AO)$ et $(PS) \perp (AO)$;

— EC = DO



Un cas particulier

Dans cette partie on a AO = 40 m et EC = DO = 20 cm.

1. Montrer que $\dfrac{OE}{OS} = 0,005$ et que $\dfrac{OC}{OP} = 0,005$

2. En déduire que $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{EC}{SP}$

3. Conclure en calculant PS.

Le cas général

En s'inspirant de la première partie, démontrer que AO = SP.

EXERCICE N° 1

CORRECTION

Théorème de Thalès — Épisode 1

Situation n° 1

Dans le triangle TRU, M ∈ [RT] et Z ∈ [RU]
Les droites (MZ) et (TU) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{RM}{RT} = \frac{RZ}{RU} = \frac{MZ}{TU}$$

$$\frac{8\,\text{m}}{20\,\text{m}} = \frac{6{,}4\,\text{m}}{RU} = \frac{MZ}{18\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$RU = \frac{6{,}4\,\text{m} \times 20\,\text{m}}{8\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad RU = \frac{128\,\text{m}^2}{8\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{RU = 16\,\text{m}}$$

$$MZ = \frac{18\,\text{m} \times 8\,\text{m}}{20\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad MZ = \frac{144\,\text{m}^2}{8\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{MZ = 18\,\text{m}}$$

Situation n° 2

Dans le triangle QXW, K ∈ [QW] et Y ∈ [QX]
Les droites (KY) et (WX) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QY}{QX} = \frac{QK}{QW} = \frac{YK}{XW}$$

$$\frac{11\,\text{mm}}{QX} = \frac{13\,\text{mm}}{17\,\text{mm}} = \frac{YK}{21\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$QX = \frac{11\,\text{mm} \times 17\,\text{mm}}{13\,\text{mm}} \quad \text{d'où} \quad QX = \frac{187\,\text{mm}^2}{13\,\text{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QX \approx 14{,}38\,\text{mm au centième près.}}$$

$$YK = \frac{21\,\text{mm} \times 13\,\text{mm}}{17\,\text{mm}} \quad \text{d'où} \quad YK = \frac{273\,\text{mm}^2}{17\,\text{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{YK \approx 16{,}06\,\text{mm au centième près.}}$$

EXERCICE N° 2

CORRECTION

Théorème de Thalès — Épisode 2

Dans le triangle UET, B ∈ [UE] et K ∈ [TE]
Les droites (TU) et (KB) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EB}{EU} = \frac{EK}{ET} = \frac{BK}{UT}$$

$$\frac{6\,\text{m}}{6\,\text{m} + 9\,\text{m}} = \frac{EK}{10\,\text{m}} = \frac{4\,\text{m}}{TU}$$

$$\frac{6\,\text{m}}{15\,\text{m}} = \frac{\text{EK}}{10\,\text{m}} = \frac{4\,\text{m}}{\text{TU}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{EK} = \dfrac{10\,\text{m} \times 6\,\text{m}}{15\,\text{m}}$ d'où $\text{EK} = \dfrac{60\,\text{m}^2}{15\,\text{m}}$ et $\text{EK} = 4\,\text{m}$

Comme $\boxed{\text{TK} = \text{TE} - \text{EK} = 10\,\text{m} - 4\,\text{m} = 6\,\text{m}}$

$\text{TU} = \dfrac{4\,\text{m} \times 15\,\text{m}}{6\,\text{m}}$ d'où $\text{TU} = \dfrac{60\,\text{m}^2}{6\,\text{m}}$ et $\boxed{\text{TU} = 10\,\text{m}}$

Exercice n° 3 — Correction

Un soupçon de Thalès et un peu de Pythagore

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\begin{aligned}
\text{BE}^2 + \text{BA}^2 &= \text{EA}^2\\
\text{BE}^2 + 36^2 &= 60^2\\
\text{BE}^2 + 1296 &= 3600\\
\text{BE}^2 &= 3600 - 1296\\
\text{BE}^2 &= 2304\\
\text{BE} &= \sqrt{2304}\\
\text{BE} &= 48
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{BE} = 48\,\text{m}}$

Comme ABE est rectangle en E et ACD est rectangle en C, les droites (EB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AC).

On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Ainsi (EB)//(CD).

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD]
Les droites (EB) et (CD) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{AE}}{\text{AD}} = \frac{\text{BE}}{\text{CD}}$$

$$\frac{36\,\text{m}}{\text{AC}} = \frac{60\,\text{m}}{\text{AD}} = \frac{48\,\text{m}}{72\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{AC} = \dfrac{36\,\text{m} \times 72\,\text{m}}{48\,\text{m}}$ d'où $\text{AC} = \dfrac{2592\,\text{m}^2}{48\,\text{m}}$ et $\boxed{\text{AC} = 54\,\text{m}}$

$\text{AD} = \dfrac{60\,\text{m} \times 72\,\text{m}}{48\,\text{m}}$ d'où $\text{AD} = \dfrac{4320\,\text{m}^2}{48\,\text{m}}$ et $\boxed{\text{AD} = 90\,\text{m}}$

Exercice n° 4 — Correction

Deux fois plus de Thalès

Exercice n° 5 — Correction

La légende de Thalès

Entraînement

Thalès et sa réciproque dans le triangle

Quatrième

Exercice n° 1 : Parallèle ou pas

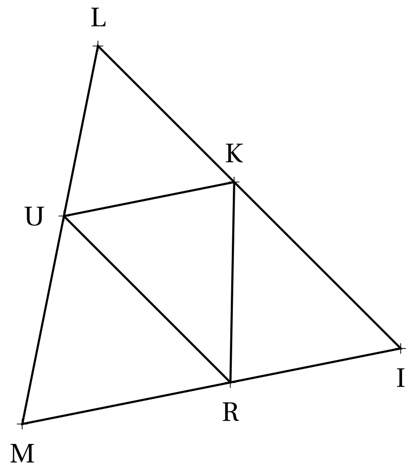
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $U \in [LM]$, $K \in [LI]$ et $R \in [MI]$;
- $(UR)//(LI)$;
- $MU = 33\,\text{mm}$, $ML = 55\,\text{mm}$, $MI = 50\,\text{mm}$;
- $LI = 70\,\text{mm}$, $KI = 42\,\text{mm}$.

1. Calculer les valeurs exactes de UR et MR.

2. Les droites (UK) et (MI) sont-elles parallèles ?

3. Les droites (KR) et (LM) sont-elles parallèles ?



Exercice n° 2 : Perpendiculaires et parallèles

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $I \in [GE]$ et $H \in [FE]$;
- $GF = 162\,\text{m}$, $GE = 270\,\text{m}$, $FE = 216\,\text{m}$, $IH = 54\,\text{m}$;
- $\widehat{EHI}$ est droit.

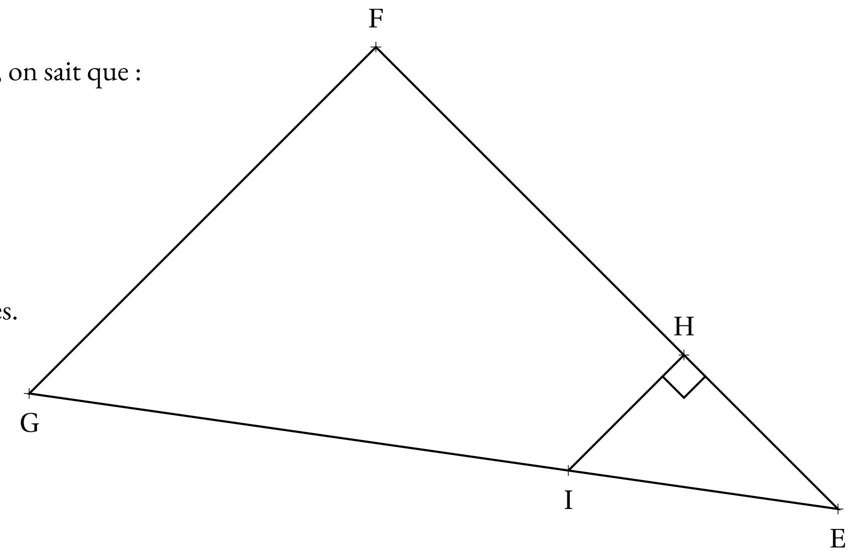
1. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.

2. Expliquer pourquoi les droites (HI) et (FG) sont parallèles.

3. Calculer les valeurs exactes de EI et EH.

4. Calculer les périmètres des triangles EFG et EHI.
L'un est combien de fois plus grand que l'autre ?

5. Calculer l'aire des triangles EFG et EHI.
L'une est combien de fois plus grande que l'autre ?



Exercice n° 3 : Un problème d'étagères

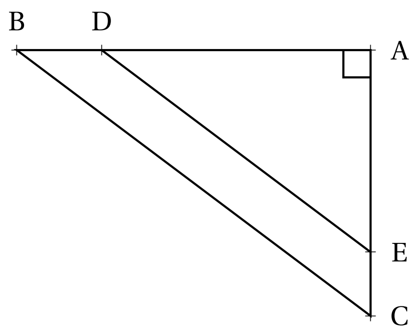
La figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, modélise un support d'étagère en fer forgé.

On sait que :

- $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ et $(BC)//(DE)$;
- $AB = 52\,\text{cm}$, $AC = 39\,\text{cm}$, $DE = 52\,\text{cm}$;
- $\widehat{BAC}$ est droit.

1. Calculer BC.

2. Calculer les valeurs exactes de AD et AE.



Entraînement

Thalès et sa réciproque dans le triangle — Correction

✧✧✧

Exercice n° 1 — Correction

Parallèle ou pas

1. Dans le triangle LMI, U ∈ [ML] et K ∈ [LI].
Les droites (UR) et (LI) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{MU}{ML} = \frac{MR}{MI} = \frac{UR}{LI}$$

$$\frac{33\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} = \frac{MR}{50\,\text{mm}} = \frac{UR}{70\,\text{mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$MR = \frac{50\,\text{mm} \times 33\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} = 30\,\text{mm}$$

$$UR = \frac{70\,\text{mm} \times 33\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} = 42\,\text{mm}$$

$\boxed{\text{Donc } MR = 30\,\text{mm et } UR = 42\,\text{mm.}}$

2. Comparons les quotients $\frac{LU}{LM}$ et $\frac{LK}{LI}$.

$$\frac{LU}{LM} = \frac{55\,\text{mm} - 33\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} = \frac{22\,\text{mm}}{55\,\text{mm}} = 0,4$$

$$\frac{LK}{LI} = \frac{70\,\text{mm} - 42\,\text{mm}}{70\,\text{mm}} = \frac{28\,\text{mm}}{70\,\text{mm}} = 0,4$$

On constate que $\frac{LU}{LM} = \frac{LK}{LI}$ et que U ∈ [LM] et K ∈ [LI]

Ainsi, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, $\boxed{\text{les droites (UK) et (MI) sont parallèles.}}$

3. Comparons les quotients $\frac{IK}{IL}$ et $\frac{IR}{IM}$.

$$\frac{IK}{IL} = \frac{42\,\text{mm}}{70\,\text{mm}} = 0,6$$

$$\frac{IR}{IM} = \frac{50\,\text{mm} - 30\,\text{mm}}{50\,\text{mm}} = \frac{20\,\text{mm}}{50\,\text{mm}} = 0,4$$

On constate que $\frac{IK}{IL} \neq \frac{IR}{IM}$

Ainsi, d'après **le théorème de Thalès contraposé**, $\boxed{\text{les droites (KR) et (LM) sont sécantes.}}$

Exercice n° 2 — Correction

Perpendiculaires et parallèles

1. Comme GE est le plus long côté du triangle GFE, comparons $FG^2 + FE^2$ et GE^2 :

$FG^2 + FE^2$	GE^2
$162^2 + 216^2$	270^2
$26\,244 + 46\,656$	$72\,900$
$72\,900$	

Comme $FG^2 + FE^2 = GE^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle GFE est rectangle en F}}$.

2. Les droites (HI) et (FG) sont perpendiculaires à la droite (FE).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{(HI)//(FG).}$

3. Dans le triangle EFG, $H \in [EF]$ et $I \in [GE]$.
Les droites (HI) et (FG) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{FG}$$

$$\frac{EH}{216\,\text{m}} = \frac{EI}{270\,\text{m}} = \frac{54\,\text{m}}{162\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$EH = \dfrac{216\,\text{m} \times 54\,\text{m}}{162\,\text{m}} = 72\,\text{m}$

$EI = \dfrac{270\,\text{m} \times 54\,\text{m}}{162\,\text{m}} = 90\,\text{m}$

$\boxed{EH = 72\,\text{m et } EI = 90\,\text{m}.}$

4. $\text{Périmètre}(EFG) = 162\,\text{m} + 270\,\text{m} + 216\,\text{m} = 648\,\text{m}$
$\text{Périmètre}(EHI) = 72\,\text{m} + 90\,\text{m} + 54\,\text{m} = 216\,\text{m}$

$\dfrac{648\,\text{m}}{216\,\text{m}} = 3$

$\boxed{\text{Le périmètre du triangle EFG est 3 fois plus grand que le périmètre du triangle EHI.}}$

5. $\text{Aire}(EFG) = \dfrac{162\,\text{m} \times 216\,\text{m}}{2} = 17\,496\,\text{m}^2$

$\text{Aire}(EHI) = \dfrac{72\,\text{m} \times 54\,\text{m}}{2} = 1944\,\text{m}^2$

$\dfrac{17\,496\,\text{m}^2}{1944\,\text{m}^2} = 9$

$\boxed{\text{L'aire du triangle EFG est 9 fois plus grande que l'aire du triangle EHI.}}$

Exercice n° 3 — Correction

Un problème d'étagères

1. Dans le triangle ABC rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$52^2 + 39^2 = BC^2$$

$$2704 + 1521 = BC^2$$

$$BC^2 = 4225$$

$$BC = \sqrt{4225}$$

$$BC = 65$$

$\boxed{BC = 65\,\text{cm}}$

2. Dans le triangle ABC, D ∈ [AB] et E ∈ [AC].
Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AD}{52\,\text{cm}} = \frac{AE}{39\,\text{cm}} = \frac{52\,\text{cm}}{65\,\text{cm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$AD = \frac{52\,\text{cm} \times 52\,\text{cm}}{65\,\text{cm}} = 41{,}6\,\text{cm}$$

$$AE = \frac{39\,\text{cm} \times 52\,\text{cm}}{65\,\text{cm}} = 31{,}2\,\text{cm}$$

$\boxed{AD = 41{,}6\,\text{cm et } AE = 31{,}2\,\text{cm.}}$

Évaluation

Quatrième

Exercice n° 1 : *(8 points)*

Recopier la lettre correspondant à chaque expression puis calculer en détaillant. Penser à simplifier le résultat.

$A = 3 - \frac{3}{4} - \frac{6}{7}$

$B = \frac{15}{8} \times \frac{16}{25}$

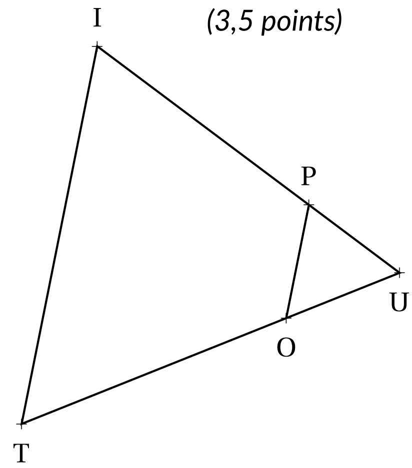
$C = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$

$D = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$

$E = \left(2 + \frac{1}{5}\right)\left(3 - \frac{2}{3}\right)$

$F = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}\right)$

Exercice n° 2 : *(3,5 points)*

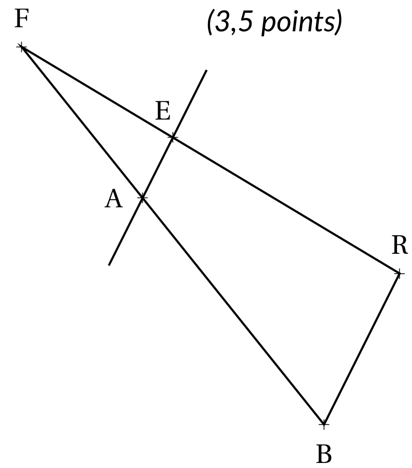


Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $P \in [IU]$ et $O \in [TU]$;
- $(PO)//(IT)$;
- $TU = 21\,\text{m}$, $PO = 5\,\text{m}$, $PU = 4\,\text{m}$ et $IU = 14\,\text{m}$.

Calculer la valeur exacte de OU et IT.

Exercice n° 3 : *(3,5 points)*

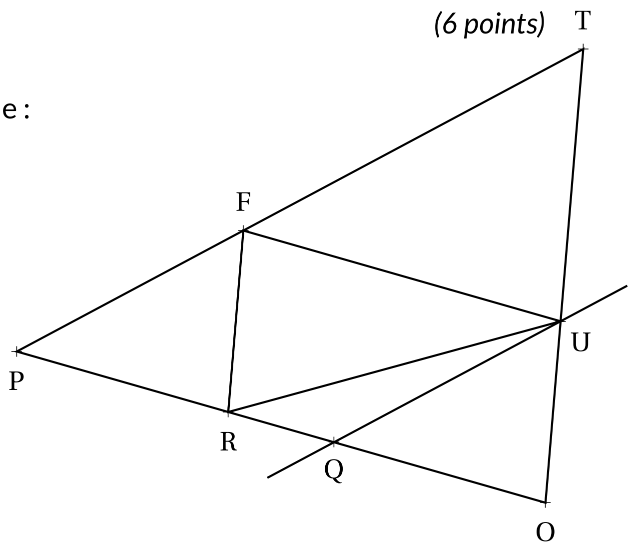


Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- F, E et R sont alignés ;
- F, A et B sont alignés ;
- $(AE)//(BR)$;
- $FE = 72\,\text{cm}$, $ER = 80\,\text{cm}$, $BR = 76\,\text{cm}$ et $FA = 56\,\text{cm}$.

Calculer la valeur exacte de EA et une valeur approchée au millimètre près de FB.

Exercice n° 4 : *(6 points)*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $F \in [PT]$, $U \in [TO]$ et $R \in [PO]$;
- $(FR)//(TO)$, $(FU)//(PO)$;
- $PO = 85\,\text{dm}$, $OT = 105\,\text{dm}$ et $PT = 115\,\text{dm}$;
- $PR = 34\,\text{dm}$.

1. Calculer les valeurs exactes de PF et RF.

2. Calculer la valeur exacte de FU et TU.

3. La parallèle à (TP) passant par U coupe (PO) en Q.
Calculer UQ et OQ.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 **Correction**

Recopier la lettre correspondant à chaque expression puis calculer en détaillant. Penser à simplifier le résultat.

$A = 3 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{6}{7}$

$A = \dfrac{3 \times \mathbf{28}}{1 \times \mathbf{28}} - \dfrac{3 \times \mathbf{7}}{4 \times \mathbf{7}} - \dfrac{6 \times \mathbf{4}}{7 \times \mathbf{4}}$

$A = \dfrac{84}{28} - \dfrac{21}{28} - \dfrac{24}{28}$

$\boxed{A = \dfrac{39}{28}}$

$B = \dfrac{15}{8} \times \dfrac{16}{25}$

$B = \dfrac{3 \times \mathbf{5} \times \mathbf{8} \times 2}{\mathbf{8} \times \mathbf{5} \times 5}$

$\boxed{B = \dfrac{6}{5}}$

$C = \dfrac{5}{7} - \dfrac{5}{7} \times \dfrac{2}{3}$

$C = \dfrac{5}{7} - \dfrac{10}{21}$

$C = \dfrac{5 \times \mathbf{3}}{7 \times \mathbf{3}} - \dfrac{10}{21}$

$C = \dfrac{15}{21} - \dfrac{10}{21}$

$\boxed{C = \dfrac{5}{21}}$

$D = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{5}$

$D = \dfrac{21}{10} - \dfrac{4}{20}$

$D = \dfrac{21}{10} - \dfrac{2}{10}$

$\boxed{D = \dfrac{19}{10}}$

$E = \left(2 + \dfrac{1}{5}\right)\left(3 - \dfrac{2}{3}\right)$

$E = \left(\dfrac{2}{1} + \dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{3}{1} - \dfrac{2}{3}\right)$

$E = \left(\dfrac{10}{5} + \dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{9}{3} - \dfrac{2}{3}\right)$

$E = \dfrac{11}{5} \times \dfrac{7}{3}$

$\boxed{E = \dfrac{77}{15}}$

$F = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{2}\right)$

$F = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15}\right)\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{10}\right)$

$F = \left(\dfrac{1 \times \mathbf{5}}{3 \times \mathbf{5}} - \dfrac{2}{15}\right)\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5}\right)$

$F = \left(\dfrac{5}{15} - \dfrac{2}{15}\right)\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5}\right)$

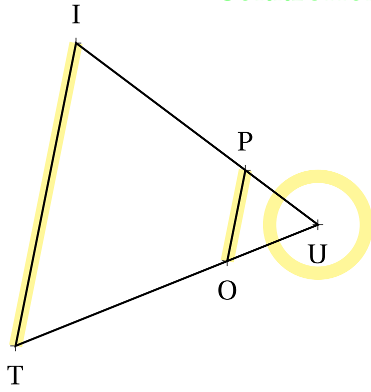
$F = \dfrac{3}{15} \times \dfrac{-1}{5}$

$F = -\dfrac{3}{75}$

$\boxed{F = -\dfrac{1}{25}}$

Exercice n° 2

Correction



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— $P \in [IU]$ et $O \in [TU]$;

— $(PO)//(IT)$;

— $TU = 21\,m$, $PO = 5\,m$, $PU = 4\,m$ et $IU = 14\,m$.

Calculer la valeur exacte de OU et IT.
Dans le triangle UTI, $O \in [TU]$ et $P \in [IU]$

Les droites (PO) et (IT) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{UO}{UT} = \frac{UP}{UI} = \frac{OP}{TI}$$

$$\frac{UO}{21\,m} = \frac{4\,m}{14\,m} = \frac{5\,m}{TI}$$

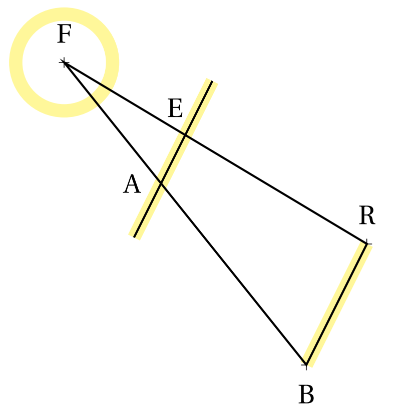
En utilisant la règle de trois on obtient :

$$UO = \frac{21\,m \times 4\,m}{14\,m} = 6\,m \quad \text{et} \quad TI = \frac{5\,m \times 14\,m}{4\,m} = 17{,}5\,m$$

Finalement $\boxed{UO = 6\,m \text{ et } TI = 17{,}5\,m.}$

Exercice n° 3

Correction



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— F, E et R sont alignés ;

— F, A et B sont alignés ;

— $(AE)//(BR)$;

— $FE = 72\,cm$, $ER = 80\,cm$, $BR = 76\,cm$ et $FA = 56\,cm$.

Calculer la valeur exacte de EA et une valeur approchée au millimètre près de FB.
Dans le triangle FRB, $E \in [FR]$ et $A \in [FB]$

Les droites (EA) et (RB) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{FA}{FB} = \frac{FE}{FR} = \frac{AE}{BR}$$

$$\frac{56\,cm}{FB} = \frac{72\,cm}{72\,cm + 80\,cm} = \frac{AE}{76\,cm}$$

$$\frac{56\,cm}{FB} = \frac{72\,cm}{152\,cm} = \frac{AE}{76\,cm}$$

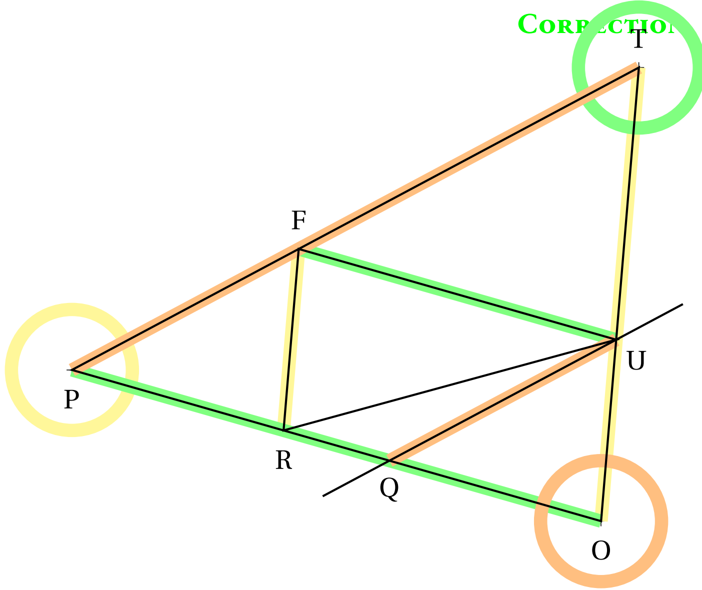
En utilisant la règle de trois on obtient :

$$AE = \frac{76\,cm \times 72\,cm}{152\,cm} = 36\,cm \quad \text{et} \quad FB = \frac{56\,cm \times 152\,cm}{72\,cm} \approx 118{,}2\,cm$$

Finalement $\boxed{AE = 36\,cm \text{ et } FB \approx SI118,2cm \text{ au millimètre près.}}$

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $F \in [PT]$, $U \in [TO]$ et $R \in [PO]$;
- $(FR)//(TO)$, $(FU)//(PO)$;
- $PO = 85\,\text{dm}$, $OT = 105\,\text{dm}$ et $PT = 115\,\text{dm}$;
- $PR = 34\,\text{dm}$.



1. Calculer les valeurs exactes de PF et RF.

2. Calculer la valeur exacte de FU et TU.

3. La parallèle à (TP) passant par U coupe (PO) en Q.
Calculer UQ et OQ.

1. Dans le triangle PTO, $R \in [PO]$ et $F \in [PT]$

Les droites (FR) **et** (TO) **sont parallèles.**

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{PR}{PO} = \frac{PF}{PT} = \frac{RF}{OT}$$

$$\frac{34\,\text{dm}}{85\,\text{dm}} = \frac{PF}{115\,\text{dm}} = \frac{FR}{105\,\text{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$PF = \dfrac{115\,\text{dm} \times 34\,\text{dm}}{85\,\text{dm}} = 46\,\text{dm}$ et $FR = \dfrac{105\,\text{dm} \times 34\,\text{dm}}{85\,\text{dm}} = 42\,\text{dm}$. Finalement $\boxed{PF = 46\,\text{dm} \text{ et } FR = 42\,\text{dm}.}$

2. Dans le triangle PTO, $F \in [PT]$ et $U \in [OT]$

Les droites (FU) **et** (PO) **sont parallèles.**

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{TF}{TP} = \frac{TU}{TO} = \frac{FU}{PO}$$

$$\frac{115\,\text{dm} - 46\,\text{dm}}{115\,\text{dm}} = \frac{TU}{105\,\text{dm}} = \frac{FU}{85\,\text{dm}}$$

$$\frac{69\,\text{dm}}{115\,\text{dm}} = \frac{TU}{105\,\text{dm}} = \frac{FU}{85\,\text{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$FU = \dfrac{85\,\text{dm} \times 69\,\text{dm}}{115\,\text{dm}} = 51\,\text{dm}$ et $TU = \dfrac{105\,\text{dm} \times 69\,\text{dm}}{115\,\text{dm}} = 63\,\text{dm}$. Finalement $\boxed{FU = 51\,\text{dm} \text{ et } TU = 63\,\text{dm}.}$

3. Dans le triangle PTO, $Q \in [PO]$ et $U \in [OT]$

Les droites (UQ) **et** (PT) **sont parallèles.**

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{OU}{OT} = \frac{OQ}{OP} = \frac{UQ}{TP}$$

$$\frac{105\,\text{dm} - 63\,\text{dm}}{105\,\text{dm}} = \frac{OQ}{85\,\text{dm}} = \frac{UQ}{115\,\text{dm}}$$

$$\frac{42\,\text{dm}}{105\,\text{dm}} = \frac{OQ}{85\,\text{dm}} = \frac{UQ}{115\,\text{dm}}$$

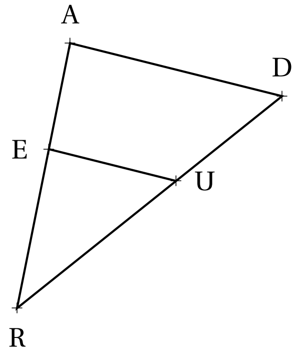
En utilisant la règle de trois on obtient :

$OQ = \dfrac{85\,\text{dm} \times 42\,\text{dm}}{105\,\text{dm}} = 34\,\text{dm}$ et $UQ = \dfrac{115\,\text{dm} \times 42\,\text{dm}}{105\,\text{dm}} = 46\,\text{dm}$. Finalement $\boxed{OQ = 34\,\text{dm} \text{ et } UQ = 46\,\text{dm}.}$

Évaluation

Quatrième

Exercice n° 1 : *(3 points)*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— $E \in [RA]$, $U \in [RD]$ et $(EU)//(AD)$;

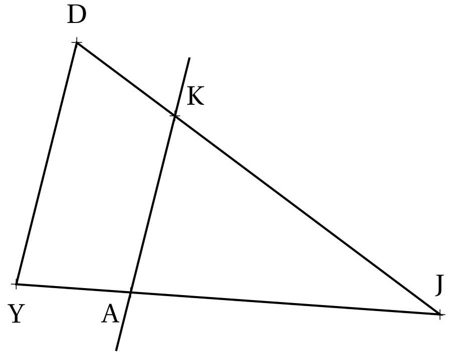
— $RE = 6\,\text{cm}$, $RA = 10\,\text{cm}$;

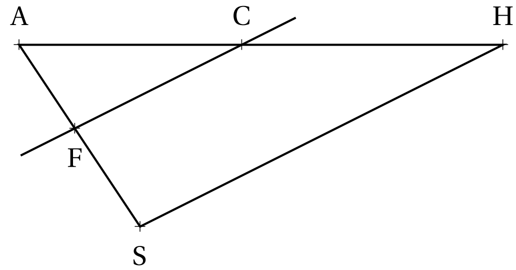
— $RD = 12\,\text{cm}$, $EU = 5\,\text{cm}$.

Calculer la valeur exacte de RU et une valeur approchée au millimètre près de AD.

Exercice n° 2 : *(6 points)*

Aucune des figures ci-dessous n'a été tracée en vraie grandeur.





— $A \in [JY]$ et $K \in [JD]$;

— $JA = 7\,\text{cm}$, $JK = 6\,\text{cm}$, $AK = 4\,\text{cm}$;

— $JY = 8{,}4\,\text{cm}$, $JD = 7{,}2\,\text{cm}$, $DY = 4{,}8\,\text{cm}$.

Les droites (KA) et (DY) sont-elles parallèles ?

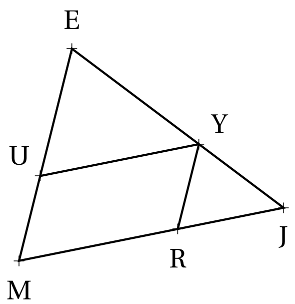
— $F \in [AS]$ et $C \in [AH]$;

— $AS = 105\,\text{m}$, $AH = 195\,\text{m}$, $SH = 155\,\text{m}$;

— $AF = 41\,\text{m}$, $AC = 78\,\text{m}$, $CF = 63\,\text{m}$.

Les droites (FC) et (SH) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 3 : *(5 points)*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— $U \in [ME]$, $Y \in [EJ]$; $R \in [MJ]$ et $(RY)//(ME)$;

— $RJ = 16\,\text{m}$, $EJ = 65\,\text{m}$ et $UY = 52\,\text{m}$;

— $RM = 64\,\text{m}$, $EM = 75\,\text{m}$ et $UE = 58\,\text{m}$.

1. Calculer les valeurs exactes de JY et RY.

2. Les droites (UY) et (MJ) sont-elles parallèles ?

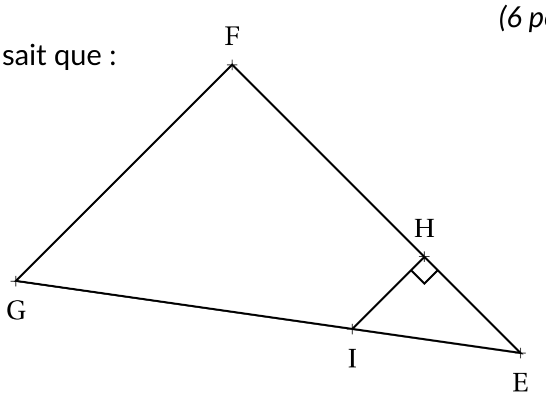
Exercice n° 4 : *(6 points)*

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— $I \in [GE]$ et $H \in [FE]$;

— $GF = 162\,\text{m}$, $GE = 270\,\text{m}$, $FE = 216\,\text{m}$, $IH = 54\,\text{m}$;

— $\widehat{EHI}$ est droit.



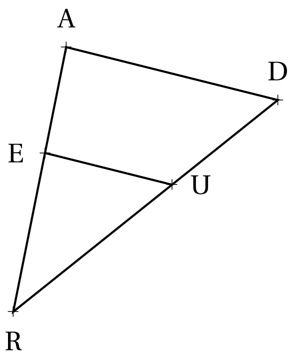
1. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.

2. Expliquer pourquoi les droites (HI) et (FG) sont parallèles.

3. Calculer les valeurs exactes de EI et EH.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 Correction



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $E \in [RA]$ et $U \in [RD]$;
- $RE = 6\,\text{cm}$, $RA = 10\,\text{cm}$;
- $RD = 12\,\text{cm}$, $EU = 5\,\text{cm}$.

Calculer la valeur exacte de RU et une valeur approchée au millimètre près de AD.

Dans RAD, $E \in [AR]$ et $U \in [RD]$

Les droites (AD) et (EU) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{RE}{RA} = \frac{RU}{RD} = \frac{EU}{AD}$$

$$\frac{6\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{RU}{12\,\text{cm}} = \frac{5\,\text{cm}}{AD}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

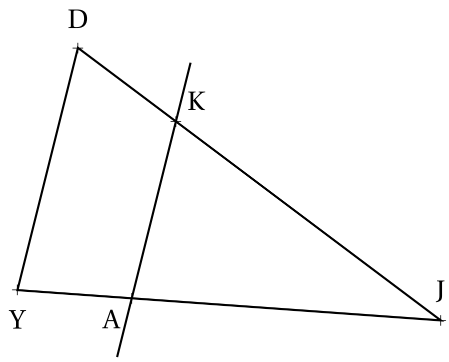
$$RU = \frac{12\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 7{,}2\,\text{cm}$$

$$AD = \frac{5\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \approx 8{,}3\,\text{cm}$$

$\boxed{RU = 7{,}2\,\text{cm} \text{ et } AD \approx 8{,}3\,\text{cm} \text{ au millimètre près.}}$

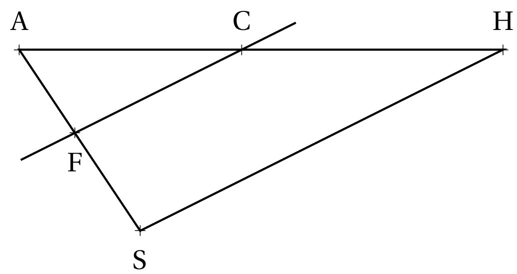
Exercice n° 2 Correction

Aucune des figures ci-dessous n'a été tracée en vraie grandeur.



- $A \in [JY]$ et $K \in [JD]$;
- $JA = 7\,\text{cm}$, $JK = 6\,\text{cm}$, $AK = 4\,\text{cm}$;
- $JY = 8{,}4\,\text{cm}$, $JD = 7{,}2\,\text{cm}$, $DY = 4{,}8\,\text{cm}$.

Les droites (KA) et (DY) sont-elles parallèles ?



- $F \in [AS]$ et $C \in [AH]$;
- $AS = 105\,\text{m}$, $AH = 195\,\text{m}$, $SH = 155\,\text{m}$;
- $AF = 41\,\text{m}$, $AC = 78\,\text{m}$, $CF = 63\,\text{m}$.

Les droites (FC) et (SH) sont-elles parallèles ?

Comparons les quotients $\dfrac{JK}{JD}$ et $\dfrac{JA}{JY}$.

$\dfrac{JK}{JD} = \dfrac{6\,\text{cm}}{7{,}2\,\text{cm}} \approx 0,83$

$\dfrac{JA}{JY} = \dfrac{7\,\text{cm}}{8{,}4\,\text{cm}} \approx 0,83$

On peut aussi comparer les produits en croix.
$6 \times 8{,}4 = 50{,}4$ et $7{,}2 \times 7 = 50{,}4$

On constate que $\dfrac{JK}{JD} = \dfrac{JA}{JY}$ et que les points $F \in [AS]$, $C \in [AH]$

Ainsi, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, $\boxed{\text{les droites (DY) et (AK) sont parallèles.}}$

Comparons les quotients $\dfrac{AF}{AS}$ et $\dfrac{AC}{AH}$.

$\dfrac{AF}{AS} = \dfrac{41\,\text{m}}{105\,\text{m}} \approx 0,39$

$\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{78\,\text{m}}{195\,\text{m}} = 0,4$

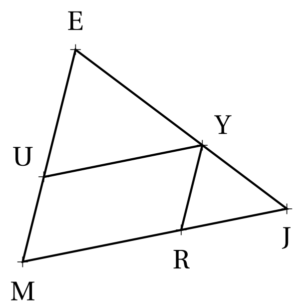
On peut aussi comparer les produits en croix.
$41 \times 195 = 7995$ et $105 \times 78 = 8190$

On constate que $\dfrac{AF}{AS} \neq \dfrac{AC}{AH}$

Ainsi, d'après **le théorème de Thalès contraposé**, $\boxed{\text{les droites (FC) et (SH) sont sécantes.}}$

Exercice n° 3

Correction



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $E \in [ME]$, $Y \in [EJ]$; $R \in [MJ]$ et $(RY)//(ME)$;
- $RJ = 16\,\text{m}$, $EJ = 65\,\text{m}$ et $UY = 52\,\text{m}$;
- $RM = 64\,\text{m}$, $EM = 75\,\text{m}$ et $UE = 58\,\text{m}$.

1. Calculer les valeurs exactes de JY et RY.

2. Les droites (UY) et (MJ) sont-elles parallèles ?

1. Dans MEJ, $R \in [MJ]$ et $Y \in [EJ]$

Les droites (RY) et (ME) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{JR}{JM} = \frac{JY}{JE} = \frac{RY}{ME}$$

$$\frac{16\,\text{m}}{16\,\text{m} + 64\,\text{m}} = \frac{JY}{65\,\text{m}} = \frac{RY}{75\,\text{m}}$$

$$\frac{16\,\text{m}}{80\,\text{m}} = \frac{JY}{65\,\text{m}} = \frac{RY}{75\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$JY = \dfrac{65\,\text{m} \times 16\,\text{m}}{80\,\text{m}} = 13\,\text{m}$

$RY = \dfrac{75\,\text{m} \times 16\,\text{m}}{80\,\text{m}} = 15\,\text{m}$

$\boxed{JY = 13\,\text{m et } RY = 15\,\text{m.}}$

2. Comparons les quotients $\dfrac{EU}{EM}$ et $\dfrac{EY}{EJ}$.

$\dfrac{EU}{EM} = \dfrac{58\,\text{m}}{75\,\text{m}} \approx 0{,}77$ $\qquad$ $\dfrac{EY}{EJ} = \dfrac{52\,\text{m}}{65\,\text{m}} = 0{,}8$

On peut aussi comparer les produits en croix.
$58 \times 65 = 3770$ et $52 \times 75 = 3900$

On constate que $\dfrac{EU}{EM} \neq \dfrac{EY}{EJ}$

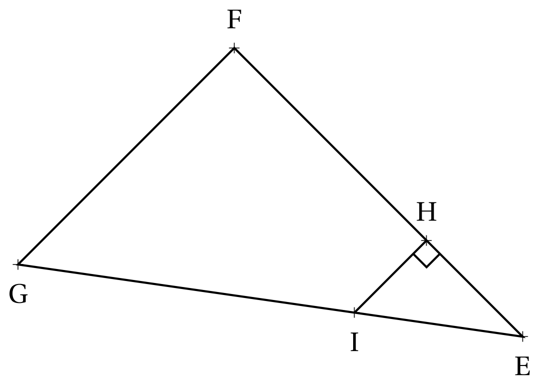
Ainsi, d'après **le théorème de Thalès contraposé**, $\boxed{\text{les droites (UY) et (MJ) sont sécantes.}}$

Exercice n° 4

Correction

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $I \in [GE]$ et $H \in [FE]$;
- $GF = 162\,\text{m}$, $GE = 270\,\text{m}$, $FE = 216\,\text{m}$, $IH = 54\,\text{m}$;
- $\widehat{EHI}$ est droit.



1. Démontrer que le triangle EFG est rectangle.
2. Expliquer pourquoi les droites (HI) et (FG) sont parallèles.
3. Calculer les valeurs exactes de EI et EH.

1. Comme GE est le plus long côté du triangle GFE, comparons $FG^2 + FE^2$ et GE^2 :

$FG^2 + FE^2$
$162^2 + 216^2$
$26\,244 + 46\,656$
$72\,900$

GE^2
270^2
$72\,900$

Comme $FG^2 + FE^2 = GE^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**
$\boxed{\text{le triangle GFE est rectangle en F}}$.

2. Les droites (HI) et (FG) sont perpendiculaires à la droite (FE).
On sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

$\boxed{(HI)//(FG).}$

3. Dans le triangle EFG, $H \in [EF]$ et $I \in [GE]$.
Les droites (HI) **et** (FG) **sont parallèles.**
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{FG}$$

$$\frac{EH}{216\,\text{m}} = \frac{EI}{270\,\text{m}} = \frac{54\,\text{m}}{162\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

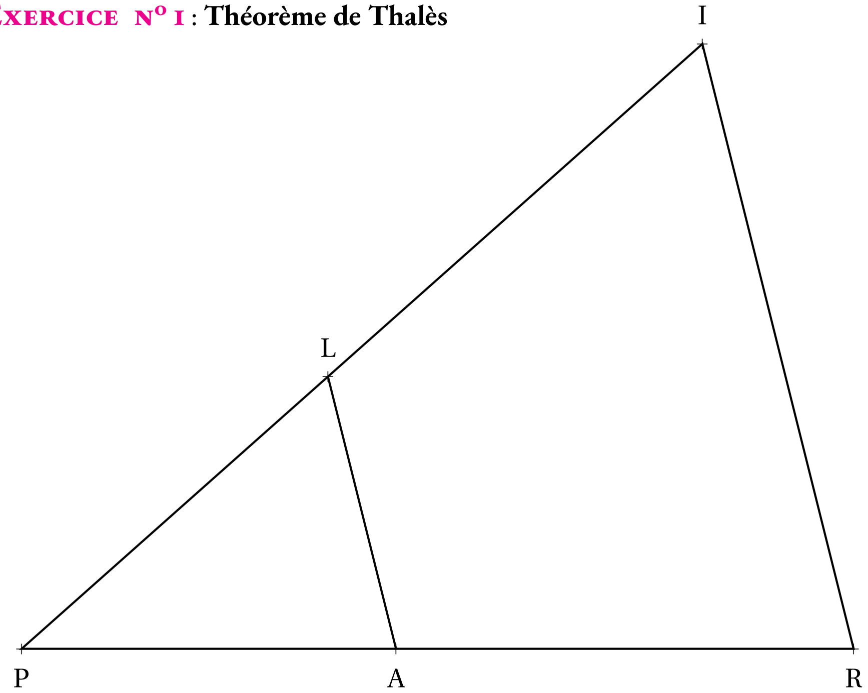
$EH = \dfrac{216\,\text{m} \times 54\,\text{m}}{162\,\text{m}} = 72\,\text{m}$

$EI = \dfrac{270\,\text{m} \times 54\,\text{m}}{162\,\text{m}} = 90\,\text{m}$

$\boxed{EH = 72\,\text{m et } EI = 90\,\text{m.}}$

Évaluation
Quatrième

Exercice n° 1 : Théorème de Thalès *(7,5 points)*

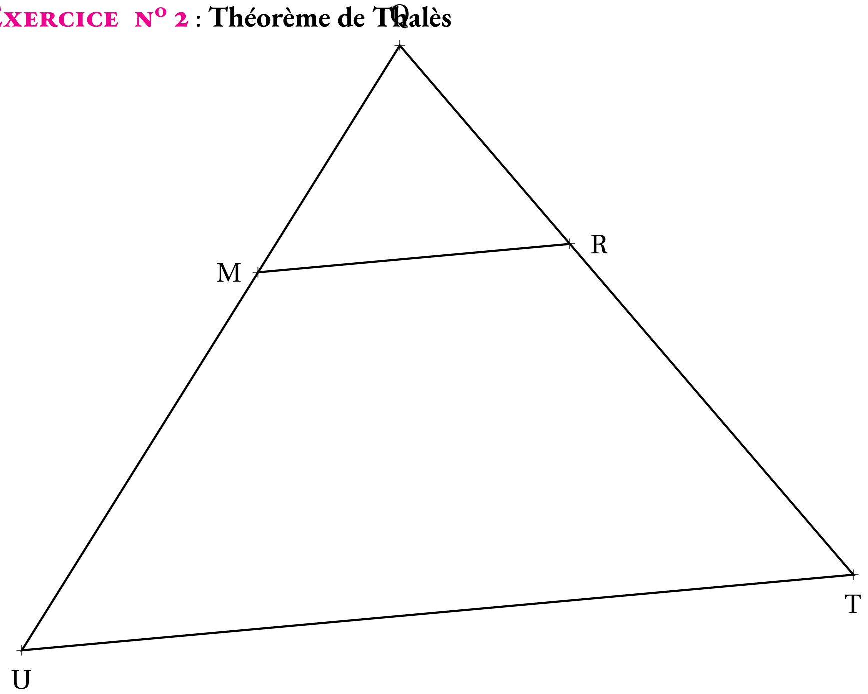


Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— L ∈ [PI] et A ∈ [PR] ;
— PA = 70 dm, PI = 126 dm ;
— LA = 50 dm, RI = 105 dm ;
— (LA)//(IR).

Calculer les valeurs exactes de PR et PL.

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès *(7,5 points)*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

— M ∈ [QU] et R ∈ [QT] ;
— QM = 5 m, MU = 4,5 m ;
— QT = 13,3 m, MR = 6 m ;
— (MR)//(UT).

Calculer les valeurs exactes de RT et UT.

Évaluation — Correction

Exercice nº 1

Correction

Théorème de Thalès

Dans PIR, L ∈ [PI] et A ∈ [PR].
Les droites (LA) et (IR) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{IR}}$$

$$\frac{\mathrm{PL}}{126\,\mathrm{dm}} = \frac{70\,\mathrm{dm}}{\mathrm{PR}} = \frac{50\,\mathrm{dm}}{105\,\mathrm{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$\mathrm{PL} = \frac{126\,\mathrm{dm} \times 50\,\mathrm{dm}}{105\,\mathrm{dm}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{PL} = \frac{6300\,\mathrm{dm}^2}{105\,\mathrm{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{PL} = 60\,\mathrm{dm}}$$

$$\mathrm{PR} = \frac{70\,\mathrm{dm} \times 105\,\mathrm{dm}}{50\,\mathrm{dm}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{PR} = \frac{7350\,\mathrm{dm}^2}{50\,\mathrm{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{PR} = 147\,\mathrm{dm}}$$

Exercice nº 2

Correction

Théorème de Thalès

Dans QUT, M ∈ [QU] et R ∈ [QT].
Les droites (MR) et (UT) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QU}} = \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{QT}} = \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{UT}}$$

$$\frac{5\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m} + 4{,}5\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{QR}}{13{,}3\,\mathrm{m}} = \frac{6\,\mathrm{m}}{\mathrm{UT}}$$

$$\frac{5\,\mathrm{m}}{9{,}5\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{QR}}{13{,}3\,\mathrm{m}} = \frac{6\,\mathrm{m}}{\mathrm{UT}}$$

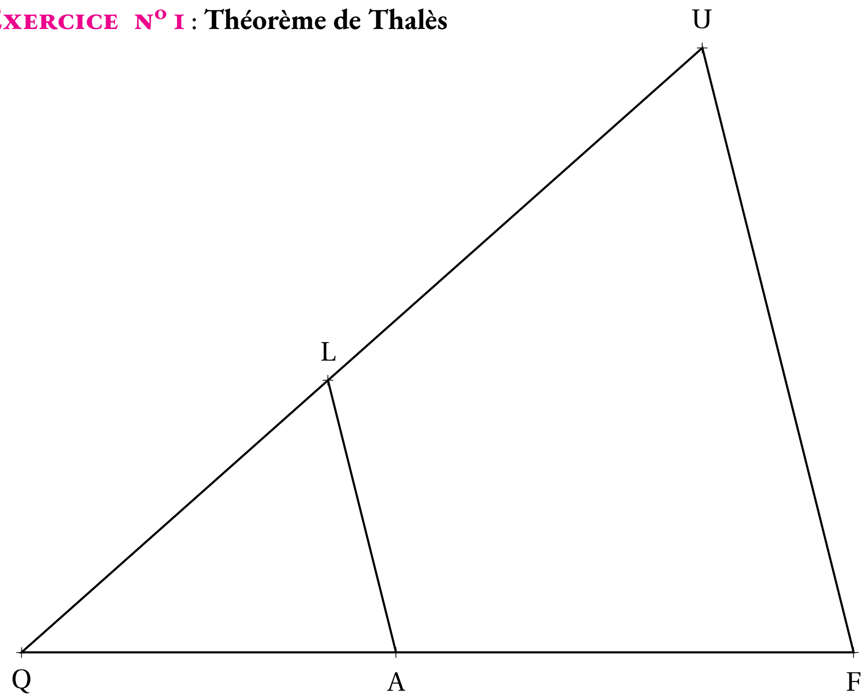
En utilisant la règle de trois on obtient :

$$\mathrm{QR} = \frac{13{,}3\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m}}{9{,}5\,\mathrm{m}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{QR} = \frac{66{,}5\,\mathrm{m}^2}{9{,}5\,\mathrm{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{QR} = 7\,\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{UT} = \frac{6\,\mathrm{m} \times 9{,}5\,\mathrm{dm}}{5\,\mathrm{m}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{UT} = \frac{57\,\mathrm{m}^2}{5\,\mathrm{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{UT} = 11{,}4\,\mathrm{m}}$$

Évaluation
Quatrième

Exercice n° 1 : Théorème de Thalès *(7,5 points)*

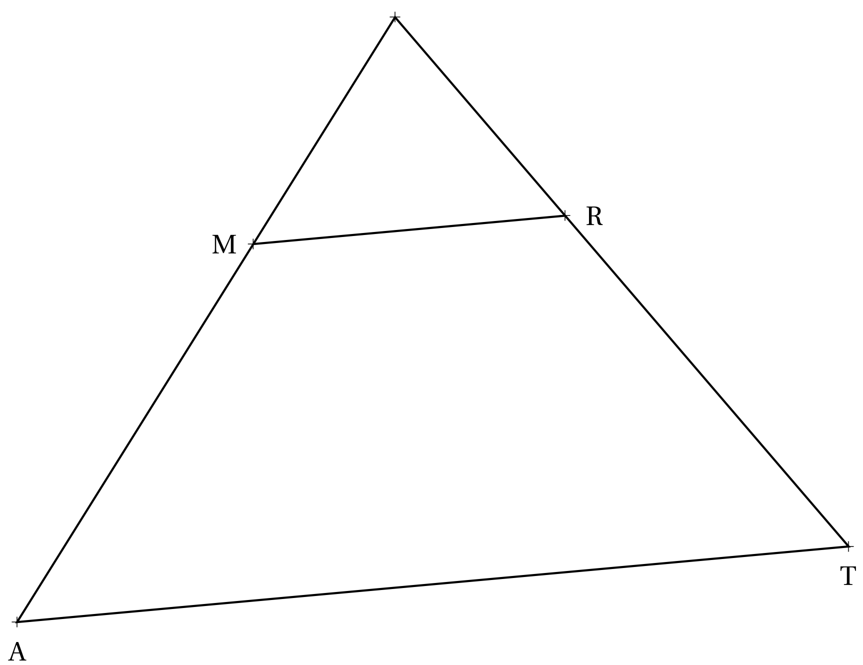


Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $L \in [QU]$ et $A \in [QR]$;
- $QA = 80\,dm$, $QU = 168\,dm$;
- $LA = 60\,dm$, $FU = 126\,dm$;
- $(LA)//(UF)$.

Calculer les valeurs exactes de QF et QL.

Exercice n° 2 : Théorème de Thalès *(7,5 points)*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- $M \in [ZA]$ et $R \in [ZT]$;
- $ZM = 7\,m$, $MA = 6{,}3\,m$;
- $ZT = 15{,}2\,m$, $MR = 8\,m$;
- $(MR)//(AT)$.

Calculer les valeurs exactes de RT et AT.

Évaluation — Correction

Exercice n° 1

Correction

Théorème de Thalès

Dans QUF, L ∈ [QU] et A ∈ [QF].
Les droites (LA) et (UF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{QL}{QU} = \frac{QA}{QF} = \frac{LA}{UF}$$

$$\frac{QL}{168\,\text{dm}} = \frac{80\,\text{dm}}{QF} = \frac{60\,\text{dm}}{126\,\text{dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$QL = \frac{168\,\text{dm} \times 60\,\text{dm}}{126\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad QL = \frac{10\,080\,\text{dm}^2}{126\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QL = 80\,\text{dm}}$$

$$QF = \frac{80\,\text{dm} \times 126\,\text{dm}}{60\,\text{dm}} \quad \text{d'où} \quad QF = \frac{10\,080\,\text{dm}^2}{60\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{QF = 168\,\text{dm}}$$

Exercice n° 2

Correction

Théorème de Thalès

Dans ZAT, M ∈ [ZA] et R ∈ [ZT].
Les droites (MR) et (AT) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ZM}{ZA} = \frac{ZR}{ZT} = \frac{MR}{AT}$$

$$\frac{7\,\text{m}}{7\,\text{m} + 6{,}3\,\text{m}} = \frac{ZR}{15{,}2\,\text{m}} = \frac{8\,\text{m}}{AT}$$

$$\frac{7\,\text{m}}{13{,}3\,\text{m}} = \frac{ZR}{15{,}2\,\text{m}} = \frac{8\,\text{m}}{AT}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$ZR = \frac{15{,}2\,\text{m} \times 7\,\text{m}}{13{,}3\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad ZR = \frac{106{,}4\,\text{m}^2}{13{,}3\,\text{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{ZR = 8\,\text{m}}$$

$$AT = \frac{8\,\text{m} \times 13{,}3\,\text{dm}}{7\,\text{m}} \quad \text{d'où} \quad AT = \frac{106{,}4\,\text{m}^2}{7\,\text{dm}} \quad \text{et} \quad \boxed{AT = 15{,}2\,\text{m}}$$

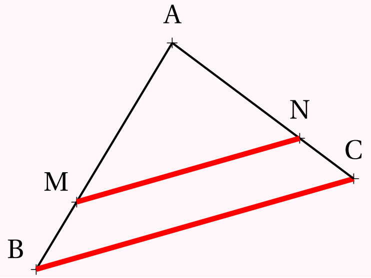
Le théorème de Thalès

Version triangle

Le théorème de Thalès

Dans un triangle ABC où M ∈ [AB] et N ∈ [AC]

Si (MN)//(BC) **alors** $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}}$



Remarque :
Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

La règle de trois

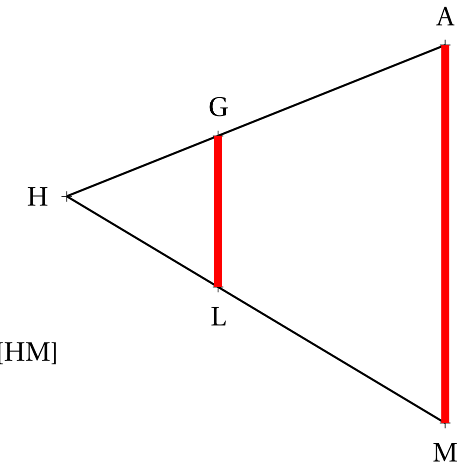
Si a, b et c des nombres non nuls **alors** le nombre x vérifiant $\dfrac{a}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{c}}{x}$ est $x = \dfrac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{a}$

Exemple :

On sait que :

- G ∈ [HA], L ∈ [HM] et (GL)//(AM) ;
- HL = 4 cm, HA = 12 cm ;
- GL = 3 cm et AM = 15 cm.

On veut calculer HG **et** HM**.**



Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{HL}}{\text{HM}} = \frac{\text{HG}}{\text{HA}} = \frac{\text{LG}}{\text{MA}}$$

$$\frac{4\ cm}{\text{HM}} = \frac{\text{HG}}{12\ cm} = \frac{3\ cm}{15\ cm}$$

$$\text{HM} = \frac{4\ cm \times 15\ cm}{3\ cm} = \frac{60}{3}\ cm = \boxed{20\ cm} \quad \text{et} \quad \text{HG} = \frac{12\ cm \times 3\ cm}{15\ cm} = \frac{36}{15}\ cm = \boxed{2{,}4\ cm}$$

Contraposée du théorème de Thalès

Dans un triangle ABC où M ∈ [AB] et [N ∈ [AC]

Si $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} \neq \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$ **alors** les droites (MN) et (BC) sont sécantes.

Réciproque du théorème de Thalès

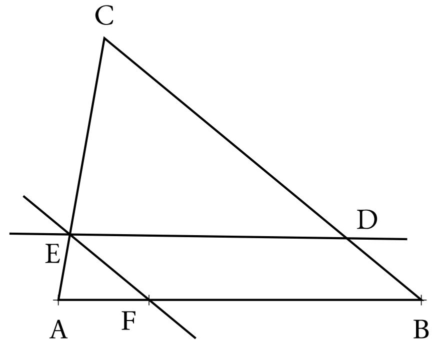
Dans un triangle ABC où M ∈ [AB] et [N ∈ [AC]

Si $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$ **alors** les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple :

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas tracée en vraie grandeur, on sait que :

- AB = 60 m, AC = 44 m et BC = 68 m ;
- E ∈ [AC] et CE = 33 m ;
- D ∈ [BC] et CD = 52 m ;
- F ∈ [AB] et AF = 15 m.



(EF) et (CB) sont-elles parallèles ?

Comparons $\dfrac{\text{AE}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AF}}{\text{AB}}$.

Comme AC = 44 m et CE = 33 m
on a AE = 44 m − 33 m.

$\dfrac{\text{AE}}{\text{AC}} = \dfrac{11\,\text{m}}{44\,\text{m}} = 0{,}25$ et $\dfrac{\text{AF}}{\text{AB}} = \dfrac{15\,\text{m}}{60\,\text{m}} = 0{,}25$

Ainsi $\dfrac{\text{AE}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{AF}}{\text{AB}}$.

De plus, E ∈ [AC] et F ∈ [AB].

D'après **réciproque du théorème de Thalès**,

les $\boxed{\text{droites (ED) et (AB) sont parallèles.}}$

(ED) et (AB) sont-elles parallèles ?

Comparons $\dfrac{\text{CE}}{\text{CA}}$ et $\dfrac{\text{CD}}{\text{CB}}$.

$\dfrac{\text{CE}}{\text{CA}} = \dfrac{33\,\text{m}}{44\,\text{m}} = 0{,}75$ et $\dfrac{\text{CD}}{\text{CB}} = \dfrac{52\,\text{m}}{68\,\text{m}} \approx 0{,}76$

Ces fractions sont différentes au centième près, on peut s'en assurer avec les produits en croix.

33 × 68 = 2244 et 44 = 2288.

Ainsi $\dfrac{\text{CE}}{\text{CA}} \neq \dfrac{\text{CD}}{\text{CB}}$.

D'après **contraposée du théorème de Thalès**

les $\boxed{\text{droites (ED) et (AB) sont sécantes.}}$

Remarques et intentions pédagogiques

[15]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence !

[16]De plus $\dfrac{15}{5} = 3$ et $\dfrac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\dfrac{a}{b}$ telle que $b \times \dfrac{a}{b} = a$

[17]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[18]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie !

[19]L'identification précédente entre $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \dfrac{5}{3} = 45$ et $27 \times \dfrac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \dfrac{5}{3} - 27 \times \dfrac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\dfrac{5}{3} = \dfrac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens !

[1] **Activité — Parallèles et longueurs**

Mes intentions sont claires

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 30 avril 2026 à 12:51

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.967
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Questing Quokka (Le Quokka en quête) 25.10 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TEX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, , a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 30 avril 2026 à 12:51.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article :