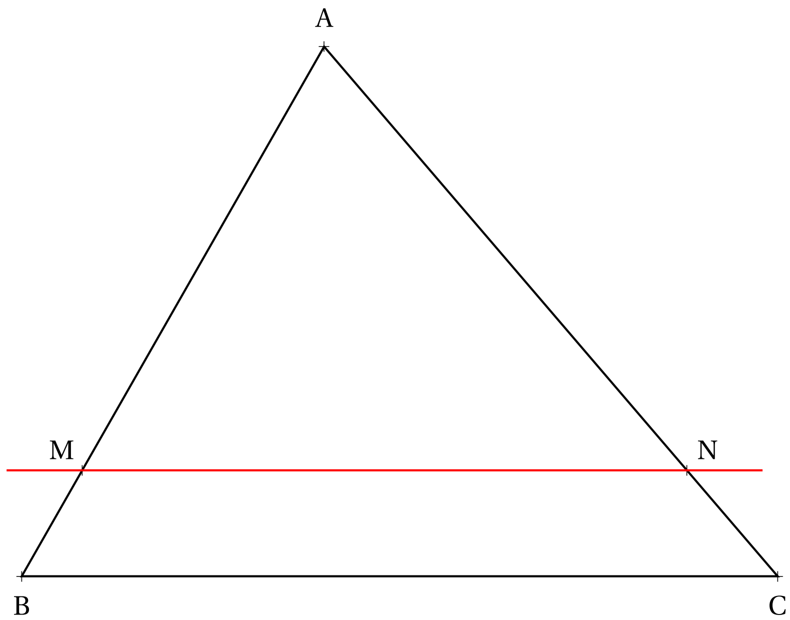
La leçon — Version prof

Les textes écrit en violet sont destinés à l'enseignant, ils ne font pas partie de ce qu'on appelle la trace écrite.
Les démonstrations sont aussi en violet, elles sont le plus souvent présentée à l'oral.

I — Le théorème de Thalès

Théorème 5.1 : Théorème de Thalès



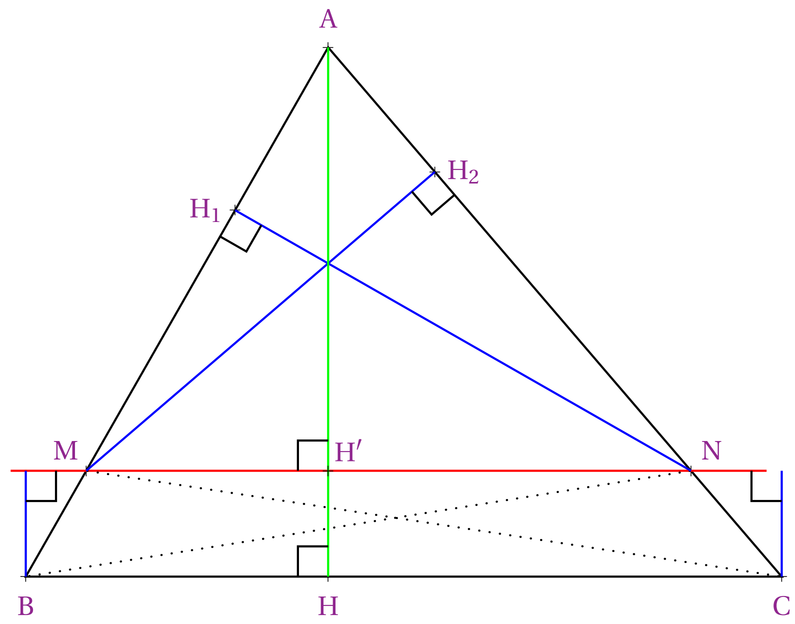
Dans un triangle ABC, M ∈ [AB] et N ∈ [AC]

Si (MN)//(BC) **alors** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Démonstration :

Voici une version de la preuve dans le cas d'un triangle acutangle.

Si le triangle possède un angle obtus, la démonstration est tout à fait identique.



Les triangles MNB et MNC ont un côté en commun, [MN].
Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, ils ont la même hauteur, la distance entre ces droites parallèles.
Par conséquent, ces deux triangles ont la même aire : Aire(MNB) = Aire(MNC).

En ajoutant le triangle AMN on arrive à Aire(ANB) = Aire(AMC).

H_1N est la hauteur qui correspond à la base AB dans le triangle ANB.
H_2M est la hauteur qui correspond à la base AC dans le triangle AMC

Comme ces triangles ont la même aire, $H1_N \times AB = H_2M \times AC$ ce qui, en utilisant les produits en croix, est équivalent à $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AC}{AB}$.

On peut aussi calculer de deux manières l'aire du triangles AMN, en considérant la base AM et la hauteur H_1N ou en considérant la base AN et la hauteur H_2M.

Ainsi, on arrive à $H_1N \times AM = H_2M \times AN$ ou encore de manière équivalente, $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AN}{AM}$.

Par conséquent $\dfrac{H_1N}{H_2M} = \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AC}{AB}$.

Par égalité des produits en croix, on obtient $AN \times AB = AM \times AC$ puis à nouveau avec les produits en croix on conclut à $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Ce qui nous donne la première partie de l'égalité !

On peut reprendre le raisonnement précédent dans les triangles ABH et AHC.

On arrive de la même manière à $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$

Les triangles $NH'C$ et $NH'H$ ont la même base NH' et la même hauteur puisque (MN)//(BC), ils ont donc la même aire.
En ajoutant le triangle $AH'N$ on arrive au fait que les triangles $AH'C$ et AHN ont la même aire.
Comme $H'N$ est la hauteur de la base HA du triangle AHN et que HC est la hauteur de la base AH' du triangle $AH'C$, on arrive à :

$H'N \times AH = HC \times AH'$ d'où $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$.

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Ainsi $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ d'où $H'M \times HC = H'N \times HB$.

Or on sait que $MN = H'M + H'N$ et $BC = HB + HC$.
Il suffit d'ajouter le terme $H'N \times HC$ aux deux termes de $H'M \times HC = H'N \times HB$.
On arrive à :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$

$$HC(H'M + H'N) = H'N(HB + HC)$$

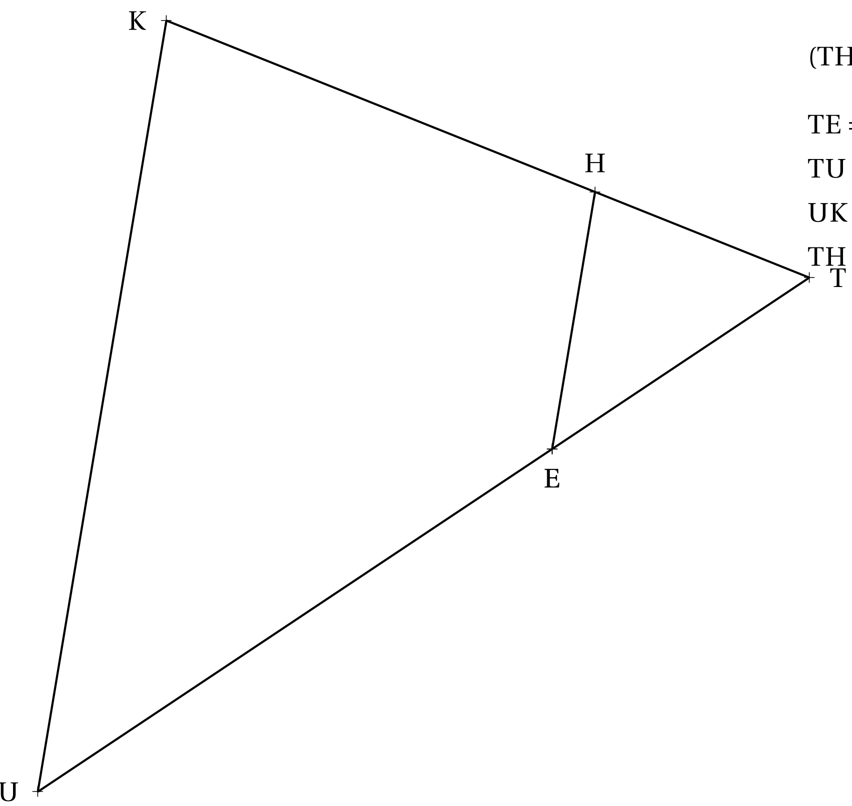
$$HC \times MN = H'N \times BC$$

On arrive péniblement à $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$ c'est à dire $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AH'}{AH}$ ou encore $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

Méthode 5 . 1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

$(TH)//(UK)$

$TE = 3\ cm$
$TU = 10\ cm$
$UK = 15\ cm$
$TH = 4\ cm$

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\dfrac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\dfrac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}}$

Nous en sommes à : $\dfrac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \dfrac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\dfrac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \dfrac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}} = \dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur ; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\mathrm{TK}} = \frac{\mathrm{EH}}{15\ cm}$$

Comme $\dfrac{3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{4\ cm}{\mathrm{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\mathrm{TK} = \dfrac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \dfrac{40}{3}\ cm \approx 13{,}3\ cm$

Comme $\dfrac{3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{\mathrm{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\mathrm{EK} = \dfrac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{45}{10}\ cm = 4{,}5\ cm$

Ainsi $\boxed{\mathrm{TK} \approx 13{,}3\ cm}$ et $\boxed{\mathrm{EK} = 4{,}5\ cm}$.

*En pratique, quand on rédige seule la partie **3.** doit apparaître sur une copie !*

III — Réciproque du théorème de Thalès

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 30 avril 2026 à 12:51

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.967
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Questing Quokka (Le Quokka en quête) 25.10 avec la distribution TeX Live 2024.20250309 et LuaTex 1.18.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TEX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !