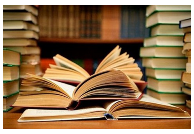
Chapitre IX

Périmètres et aires

Sommaire



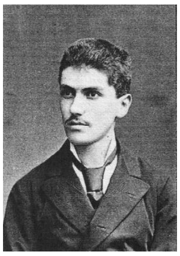
Culture

Le théorème de Pick

Sixième

✧✧

Georges Alexander Pick (1859 - 1942)



Georg Alexander Pick (10 août 1859 – 26 juillet 1942) était un mathématicien autrichien, qui a donné son nom au théorème de Pick. En 1899, Georg Alexander Pick prouve son fameux théorème portant sur l'aire d'un polygone simple dont l'ensemble des sommets sont situés sur le réseau des points à coordonnées entières. Après l'annexion de la Pologne par l'Allemagne, Pick s'enfuit en Tchécoslovaquie mais il est déporté par les nazis au début de l'année 1942. Il meurt au cours de cette-même année dans le camp de concentration de Theresienstadt. Ce n'est que vingt-sept ans plus tard, en 1969, que le mathématicien polonais Hugo Steinhaus redécouvre le théorème de Pick et le rend célèbre.

Dans un quadrillage 3x3

Sur un quadrillage pointé de trois colonnes et trois lignes on peut tracer exactement quatre rectangles tous différents.

1. Tracez ces quatre rectangles dans les cases ci-dessous.

Un carré est un rectangle particulier. Deux rectangles sont différents quand ils ne sont pas superposables !

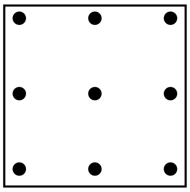


Figure nº 1

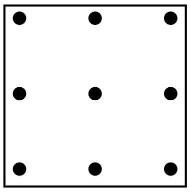


Figure nº 2

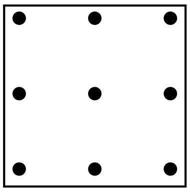


Figure nº 3

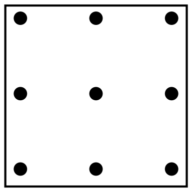
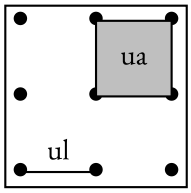


Figure nº 4

On souhaite mesurer le périmètre et l'aire de chacune des figures obtenues. On utilise pour cela les unités de mesures ci-contre.



Avec l'unité de longueur **ul** il n'est pas possible de mesurer la longueur d'un segment en diagonal à l'aide d'un nombre décimal ! Dans cette situation on ne calcule pas le périmètre de la figure.

2. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure nº 1				
Figure nº 2				
Figure nº 3				
Figure nº 4				

Dans un quadrillage 4x4

Sur un quadrillage pointé de quatre colonnes et quatre lignes on peut tracer exactement neuf rectangles tous différents.

3. Tracez ces neuf rectangles dans les cases ci-dessous.

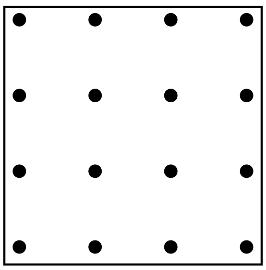


Figure nº 1

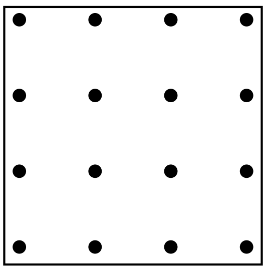


Figure nº 2

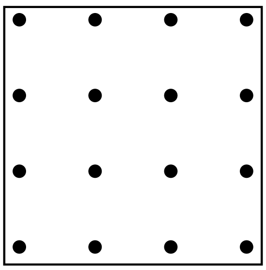


Figure nº 3

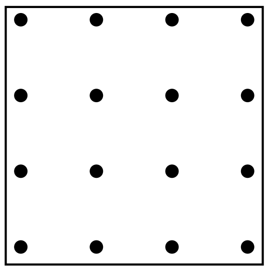


Figure nº 4

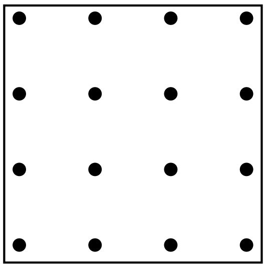


Figure nº 5

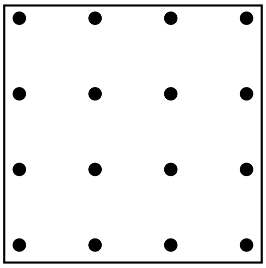


Figure nº 6

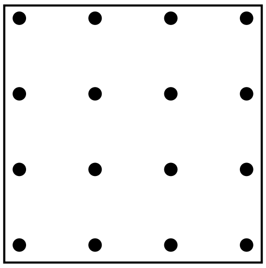


Figure nº 7

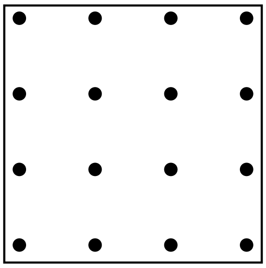


Figure nº 8

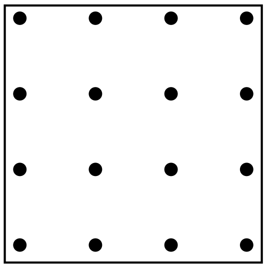


Figure nº 9

4. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure nº 1				
Figure nº 2				
Figure nº 3				
Figure nº 4				
Figure nº 5				
Figure nº 6				
Figure nº 7				
Figure nº 8				
Figure nº 9				

Alexander Pick a découvert en 1899, qu'il était possible de calculer l'aire d'une figure polygonale tracée du papier pointé, en comptant le nombre de points sur le contour et le nombre de points à l'intérieur du polygone.

Quelle conjecture peut-on faire, en observant le tableau précédent, sur la relation entre le nombre de points intérieur, le nombre de points sur le contour et l'aire de chaque figure ?

Écrit ici ta conjecture :

Théorème de Pick

1899

On note :

— C le nombre de points sur le contour ;
— I le nombre de points à l'intérieur ;
— A l'aire du polygone.

A =

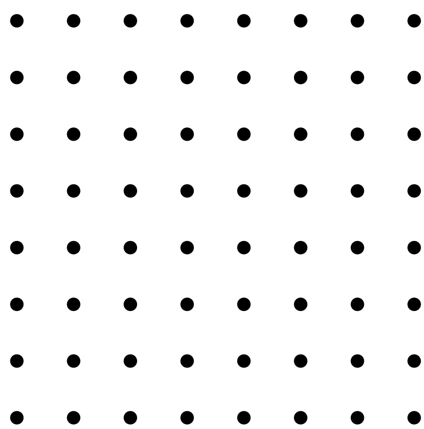
Dessine ci-dessous une figure polygonale de ton choix sur le papier pointé.
Calcule l'aire de cette figure en utilisant la méthode habituelle.
Vérifie ensuite avec le théorème de Pick.

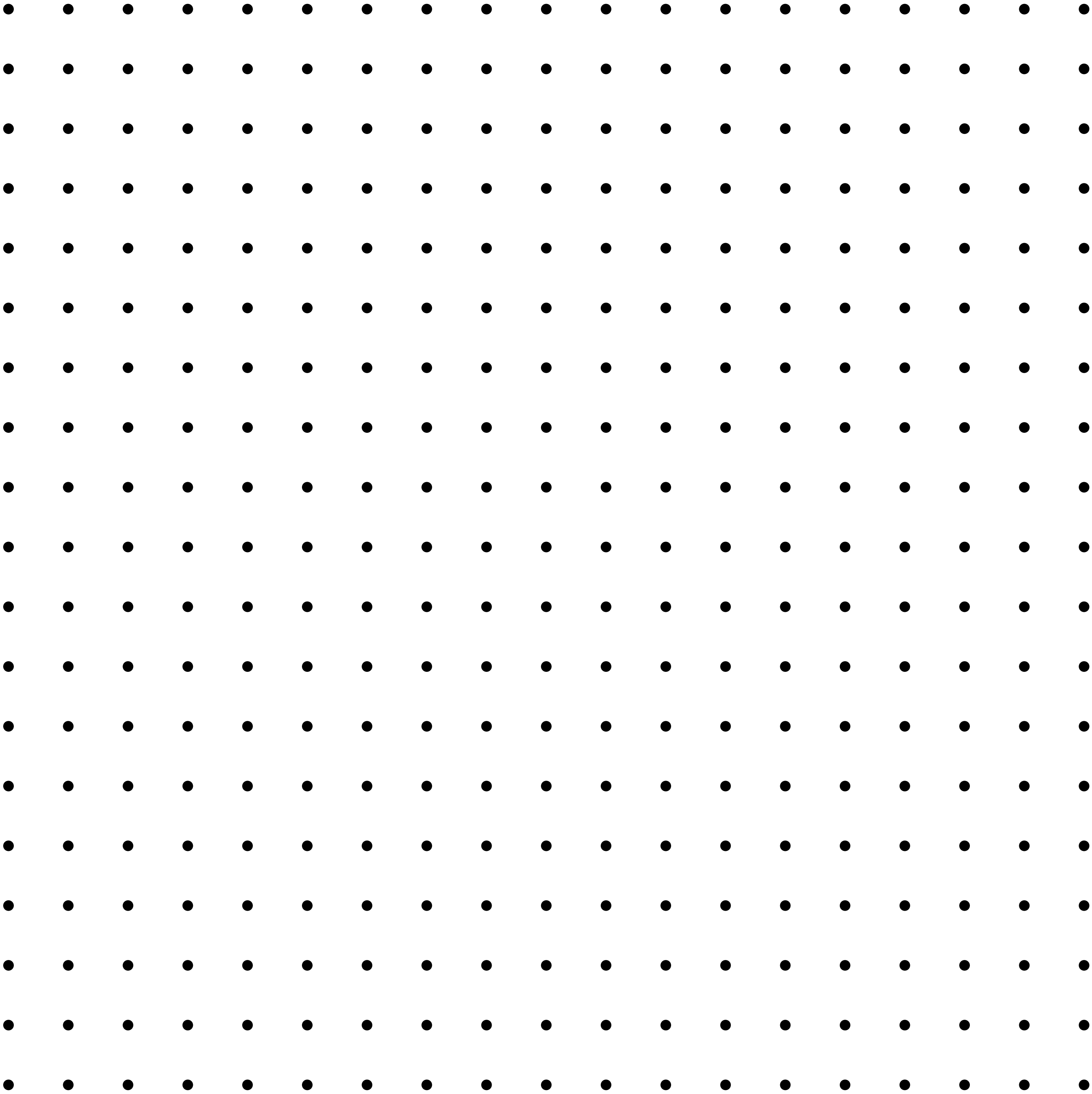
A =

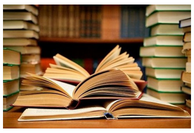
C =

I =

A =







Le théorème de Pick — Correction

Culture

Dans un quadrillage 3x3

Sur un quadrillage pointé de trois colonnes et trois lignes on peut tracer exactement quatre rectangles tous différents.

1. Tracez ces quatre rectangles dans les cases ci-dessous.

Un carré est un rectangle particulier. Deux rectangles sont différents quand ils ne sont pas superposables !

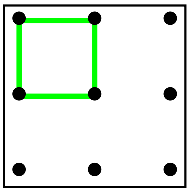


Figure n° 1

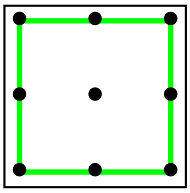


Figure n° 2

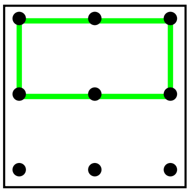


Figure n° 3

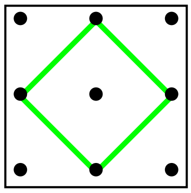


Figure n° 4

On a obtenu quatre rectangles dont trois carrés. On ne pourra pas estimer le périmètre de la dernière figure, les côtés de ce carré sont les diagonales du quadrillage. Cette dernière longueur n'est pas un nombre entier, ni même une fraction. Cette diagonale mesure environ $1{,}41\ ul$, exactement $\sqrt{2}\ ul$, ce qu'un élève de quatrième est capable de comprendre.

2. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1	**4**	**1**	**0**	**4**
Figure n° 2	**8**	**4**	**1**	**8**
Figure n° 3	**6**	**2**	**0**	**6**
Figure n° 4	**X**	**2**	**1**	**4**

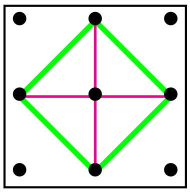


Figure n° 4

Pour la Figure n° 4, on peut déterminer l'aire en effectuant le découpage ci-contre
Chacun des quatre petits triangles rectangles correspond à la moitié d'un carré unité.
La Figure n° 4 a donc une aire de deux unités.

Dans un quadrillage 4x4

Sur un quadrillage pointé de quatre colonnes et quatre lignes on peut tracer exactement neuf rectangles tous différents.

3. Tracez ces neuf rectangles dans les cases ci-dessous.

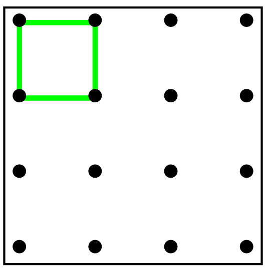


Figure n° 1

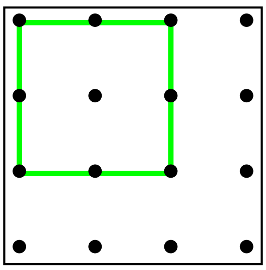


Figure n° 2

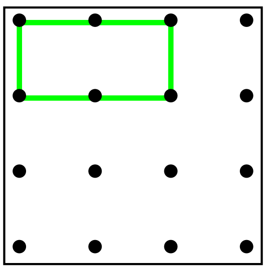


Figure n° 3

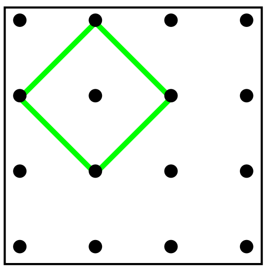


Figure n° 4

Il s'agit des quatre figures précédentes !

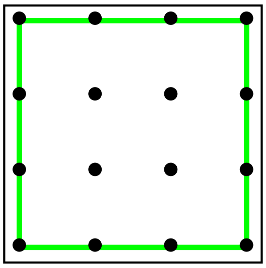


Figure n° 5

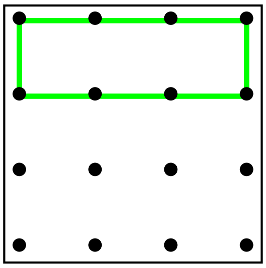


Figure n° 6

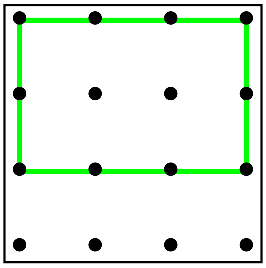


Figure n° 7

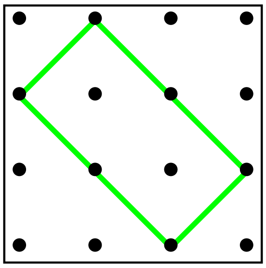


Figure n° 8

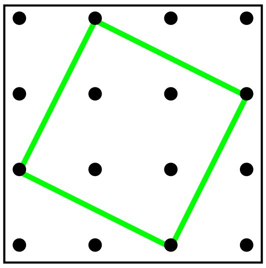


Figure n° 9

4. Compléter le tableau suivant :

	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**	Nombre de points à l'intérieur	Nombre de points sur le contour
Figure n° 1	**4**	**1**	**0**	**4**
Figure n° 2	**8**	**4**	**1**	**8**
Figure n° 3	**6**	**2**	**0**	**6**
Figure n° 4	**X**	**2**	**1**	**4**
Figure n° 5	**12**	**9**	**4**	**12**
Figure n° 6	**8**	**3**	**0**	**8**
Figure n° 7	**10**	**6**	**2**	**10**
Figure n° 8	**X**	**4**	**2**	**6**
Figure n° 9	**X**	**5**	**4**	**4**

Pour la figure suivante, on peut utiliser la même méthode que la Figure n° 4. Sa surface vaut exactement le double de la Figure n° 4.

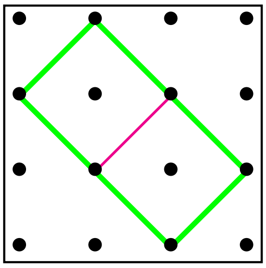


Figure n° 9

Pour la figure suivante, on peut utiliser un découpage comme ci-après.
On voit un carré central et quatre demi rectangle de longueur deux unités et de largeur une unité.

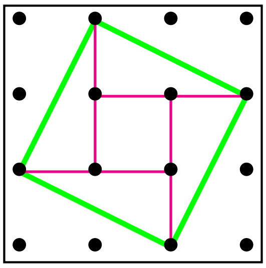


Figure n° 9

On peut tenter de nombreuses conjectures et vérifier sur les neuf figures précédentes leur réalité.
Notons A l'aire, C le nombre de points sur le contour et I le nombre de point intérieur.

Conjecture n° 1 : $A = C - 3 + I$
Elle est vraie pour :

— La Figure n° 1 : $A = 4 - 3 + 0 = 1$;

— La Figure n° 4 : $A = 4 - 3 + 1 = 2$;

Elle est fausse pour les sept autres cas !

Conjecture n° 2 : $A = C \div 2 - 1$
Elle est vraie pour :

— La Figure n° 1 : $A = 2 - 1 = 1$;

— La Figure n° 3 : $A = 3 - 1 = 2$;

— La Figure n° 6 : $A = 4 - 1 = 3$;

Elle est fausse pour les six autres cas !

Conjecture n° 1 : $A = C \div 2 - 1 + I$
Elle est vraie pour :

— La Figure n° 1 : $A = 2 - 1 + 0 = 1$;

— La Figure n° 2 : $A = 4 - 1 + 1 = 4$;

— La Figure n° 3 : $A = 3 - 1 + 0 = 2$;

— La Figure n° 4 : $A = 2 - 1 + 1 = 2$;

— La Figure n° 5 : $A = 6 - 1 + 4 = 9$;

— La Figure n° 6 : $A = 4 - 1 + 0 = 3$;

— La Figure n° 7 : $A = 5 - 1 + 2 = 6$;

— La Figure n° 8 : $A = 3 - 1 + 2 = 4$;

— La Figure n° 9 : $A = 2 - 1 + 4 = 5$;

Elle est vraie pour toutes les figures fournies. Cela ne démontre pas notre conjecture, cela la confirme un peu !
Alexander Pick a démontré que cette conjecture est vraie. La démonstration dépasse largement la cadre du collège. Voici quelques idées de cette démonstration :

— On démontre que cela est vrai pour tous les rectangles ayant des côtés « verticaux »ou « horizontaux ».

  — Le nombre de points sur le contour est égal au périmètre du rectangle, soit le double de la somme de la largeur et de la longeur ;
  — la moitié du nombre de points sur le contour est donc égal à la somme de la largeur et de la longueur ;
  — le nombre de points intérieurs est égal au produit de la longueur diminuée d'une unité par la largeur diminuée d'une unité ;
  — en notant L la longueur, l la largeur et A l'aire du rectangle,
  on obtient : $(L - 1) \times (l - 1) = L \times l - L - L + 1 = A - (l + L) + 1$;
  — ainsi, si on ajoute le nombre de points sur le contour, $L + l$ et qu'on retire 1, on obtient le résultat attendu.

— on en déduit la même égalité pour tous les triangles ;

  — on commence par des triangles rectangles dont les côtés sont « verticaux »et « horizontaux » ;
  — on montre que deux tels triangles forment un rectangle et on utilise le résultat précédent ;
  — dans les autres cas on obtient un parallèlogramme, puis un rectange...

— on termine la démonstration par récurrence sur le nombre de points sur le contour.

  — la propriété est vraie pour les triangles ;
  — si elle est vraie pour le polygone quelconque ;
  — elle est vraie pour ce polygone auquel on ajoute un triangle quelconque ;
  — tout polygone peut se construire de cette manière.

Théorème de Pick

1899

On note :

- C le nombre de points sur le contour ;
- I le nombre de points à l'intérieur ;
- A l'aire du polygone.

$$A = C \div 2 + I - 1$$

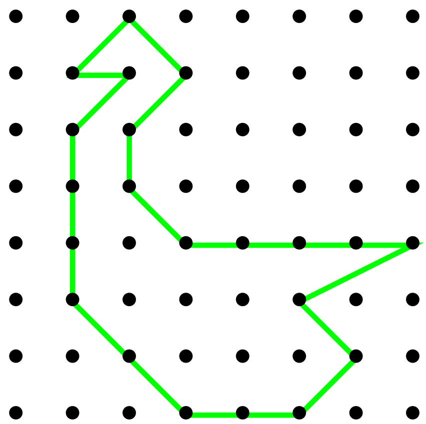
Dessine ci-dessous une figure polygonale de ton choix sur le papier pointé.
Calcule l'aire de cette figure en utilisant la méthode habituelle.
Vérifie ensuite avec le théorème de Pick.

$A = 17,5$

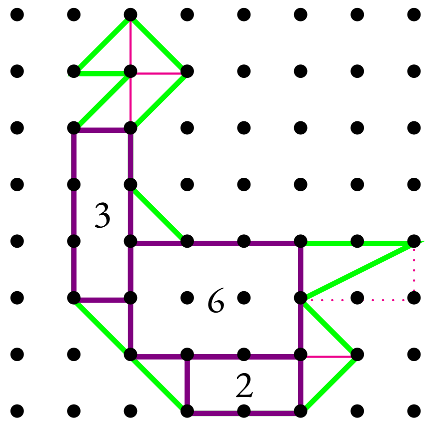
$C = 21$

$I = 7$

$A = 21 \div 2 + 7 - 1$
$A = 11,5 + 7 - 1$
$A = 17,5$



Pour calculer avec la méthode classique, l'aire de ce polygone « canardesque », on peut utiliser le découpage suivant :



Évaluation
Sixième

NOM : **PRÉNOM** **CLASSE :**

Exercice n° 1 : Aire et périmètre sans unité

Indiquer le périmètre et l'aire des figures ci-dessous en utilisant les unités indiquées.

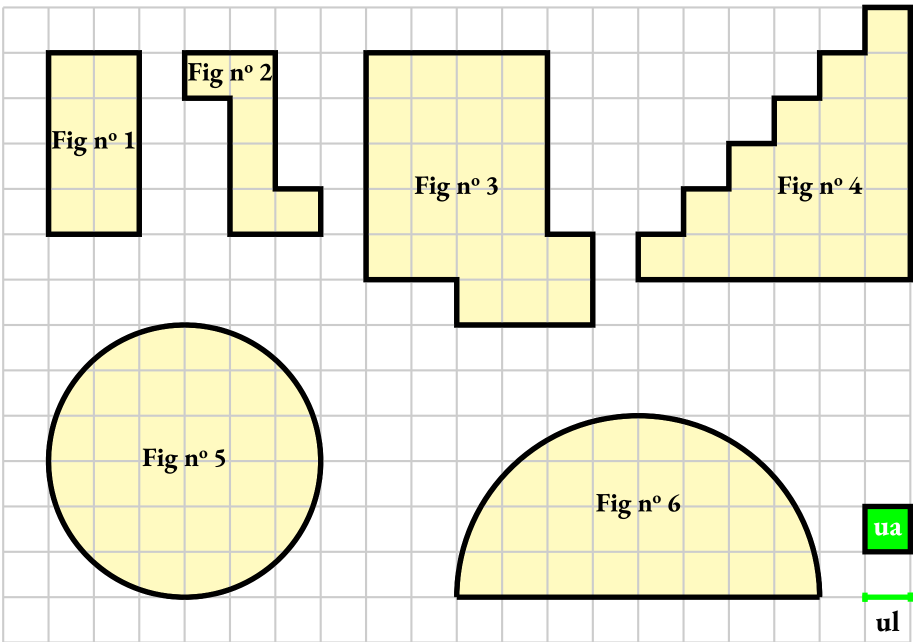
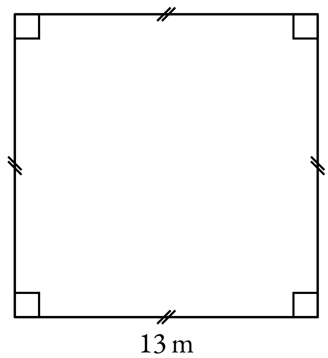
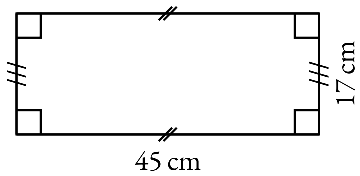


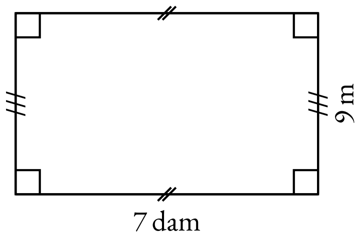
Figure	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**
Fig n° 1		
Fig n° 2		
Fig n° 3		
Fig n° 4		
Fig n° 5		
Fig n° 6		

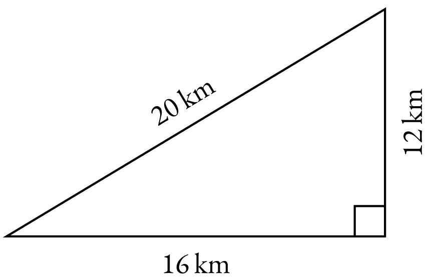
Exercice n° 2 : Aire et périmètre avec unités

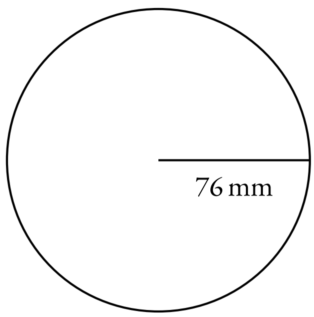
Calculer **le périmètre** et **l'aire** des figures ci-dessous. Quand c'est nécessaire, donner une valeur approchée au centième près.

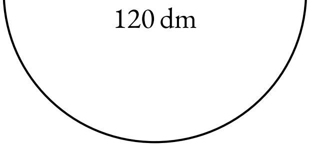




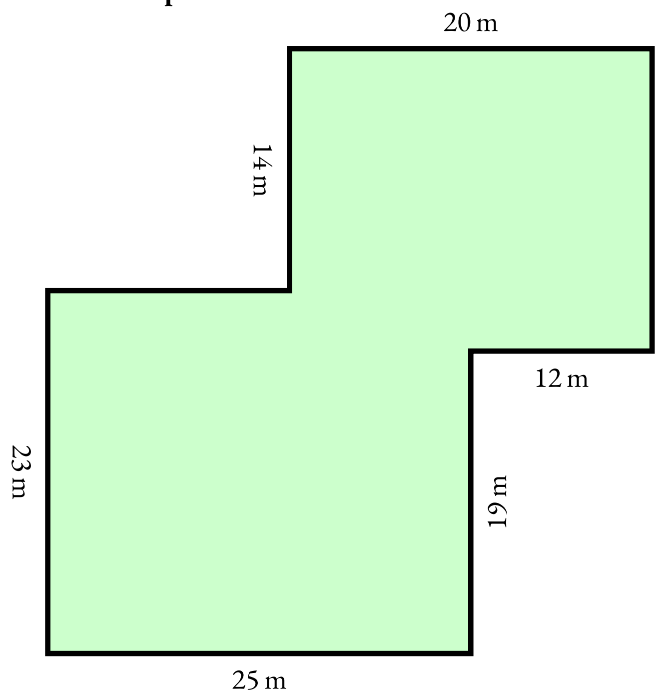







120 dm

EXERCICE N° 3 : **Problème sur les aires et les périmètres**



M. Seguin a deux passions dans la vie : les chèvre et la géométrie.
Il vient d'acheter un terrain constitué de côtés parfaitement perpendiculaires les uns avec les autres. Il va enfin pouvoir installer sa chèvre Blanchette dans un lieu sécurisé où elle ne sera pas tentée de s'enfuir et de se faire manger.

Il veut clôturer son terrain avec un grillage de grande qualité. Il souhaite également y planter l'herbe préférée de Blanchette, un mélange de trègle violet et de luzerne, pour qu'elle se sente bien dans son nouvel enclos.

Voici les prix que M. Seguin a repéré chez Le Roi Pinpin :

— Grillage : 11,95 € le mètre linéaire ;
— Herbe : 17,30 € le sac de 35 kg pour 60 m^2.

Combien va coûter la clôture et le gazon pour préparer cet enclos ?

Indiquer ci-dessous toutes vos recherches. Rédiger une phrase réponse à chaque étape. La calculatrice est autorisée !

Évaluation — Correction

Exercice n° 1 — Correction

Aire et périmètre sans unité

Indiquer le périmètre et l'aire des figures ci-dessous en utilisant les unités indiquées.

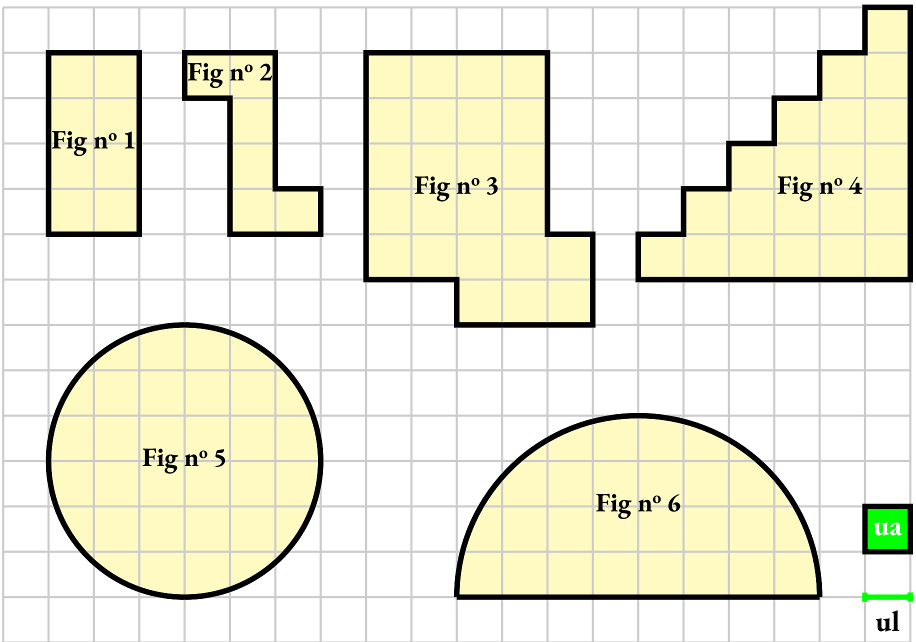
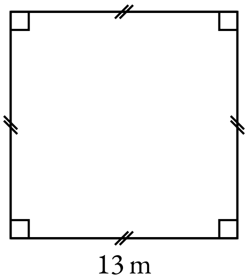


Figure	Périmètre en **ul**	Aire en **ua**
Fig n° 1	12	8
Fig n° 2	14	6
Fig n° 3	22	24
Fig n° 4	24	21
Fig n° 5	6π	9π
Fig n° 6	$4\pi + 8$	8π

Exercice n° 2 — Correction

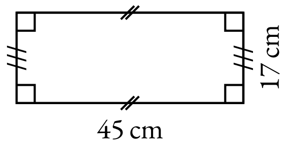
Aire et périmètre avec unités

Calculer **le périmètre** et **l'aire** des figures ci-dessous. Quand c'est nécessaire, donner une valeur approchée au centième près.



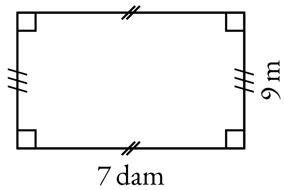
Périmètre $= 4 \times 13\,\text{m} = 52\,\text{m}$

Aire $= 13\,\text{m} \times 13\,\text{m} = 139\,\text{m}^2$



Périmètre $= 2 \times (45\,\text{cm} + 17\,\text{cm}) = 124\,\text{cm}$

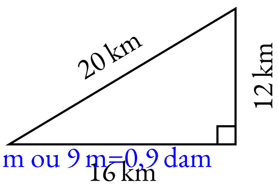
Aire $= 45\,\text{cm} \times 17\,\text{cm} = 765\,\text{cm}^2$



7 dam=70 m ou 9 m=0,9 dam

Périmètre $= 2 \times (70\,\text{m} + 9\,\text{m}) = 158\,\text{m}$

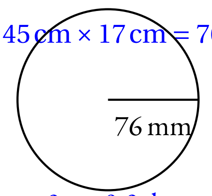
Aire $= 70\,\text{m} \times 9\,\text{m} = 630\,\text{m}^2$



7 dam=70 m ou 9 m=0,9 dam

Périmètre $= 2 \times (70\,\text{m} + 9\,\text{m}) = 158\,\text{m}$

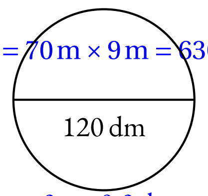
Aire $= 70\,\text{m} \times 9\,\text{m} = 630\,\text{m}^2$



7 dam=70 m ou 9 m=0,9 dam

Périmètre $= 2 \times (70\,\text{m} + 9\,\text{m}) = 158\,\text{m}$

Aire $= 70\,\text{m} \times 9\,\text{m} = 630\,\text{m}^2$



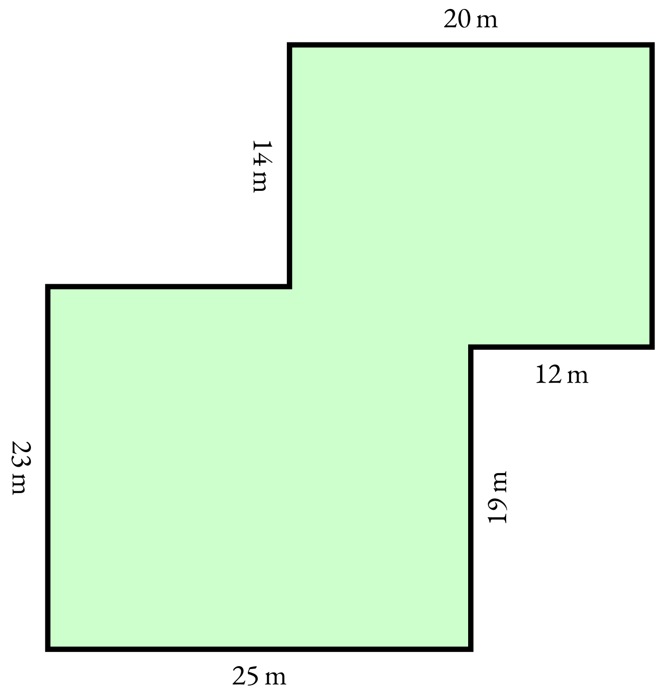
7 dam=70 m ou 9 m=0,9 dam

Périmètre $= 2 \times (70\,\text{m} + 9\,\text{m}) = 158\,\text{m}$

Aire $= 70\,\text{m} \times 9\,\text{m} = 630\,\text{m}^2$

Exercice n° 3 Correction

Problème sur les aires et les périmètres



M. Seguin a deux passions dans la vie : les chèvre et la géométrie.
Il vient d'acheter un terrain constitué de côtés parfaitement perpendiculaires les uns avec les autres. Il va enfin pouvoir installer sa chèvre Blanchette dans un lieu sécurisé où elle ne sera pas tentée de s'enfuir et de se faire manger.

Il veut clôturer son terrain avec un grillage de grande qualité. Il souhaite également y planter l'herbe préférée de Blanchette, un mélange de trègle violet et de luzerne, pour qu'elle se sente bien dans son nouvel enclos.

Voici les prix que M. Seguin a repéré chez Le Roi Pinpin :

— Grillage : 11,95 € le mètre linéaire ;

— Herbe : 17,30 € le sac de 35 kg pour 60 m^2.

Combien va coûter la clôture et le gazon pour préparer cet enclos ?

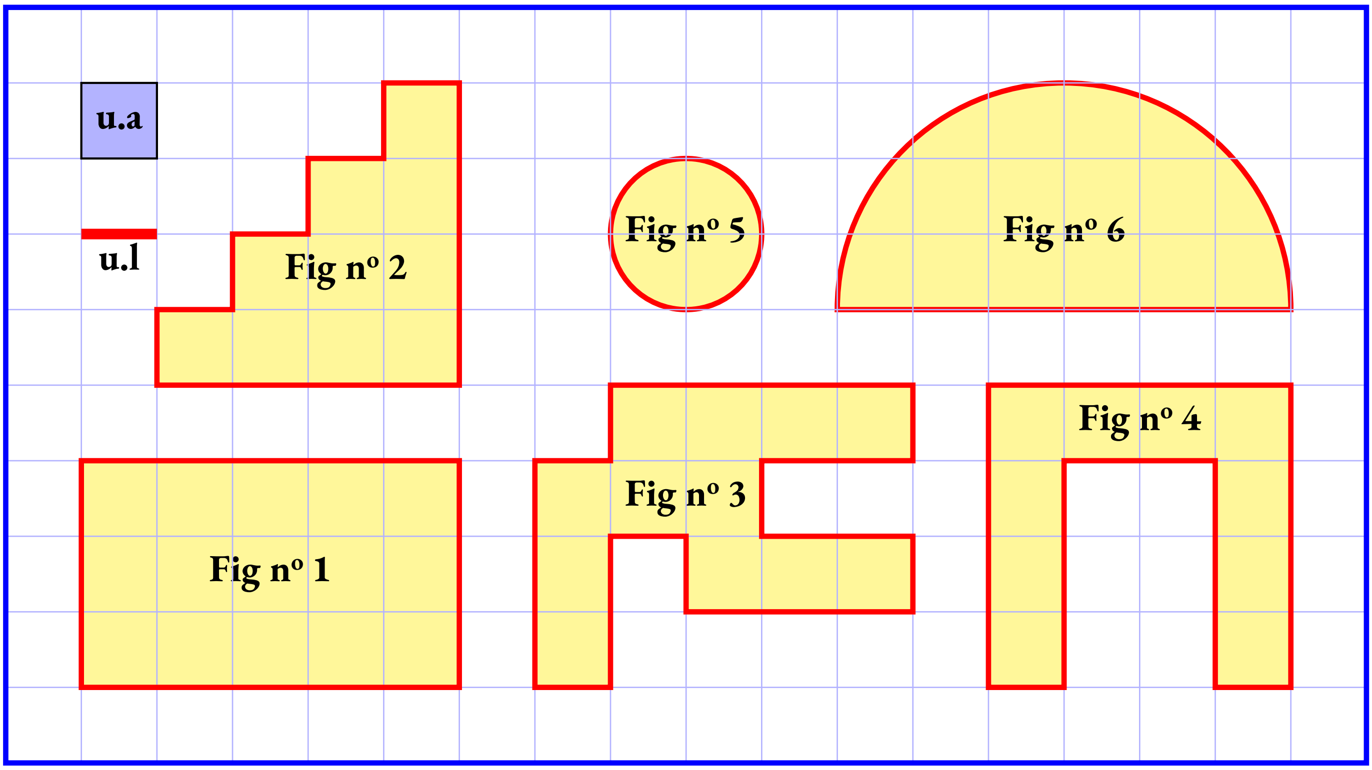
Indiquer ci-dessous toutes vos recherches. Rédiger une phrase réponse à chaque étape. La calculatrice est autorisée !

Préparation de l'évaluation

Sixième

Exercice n° 1 : Périmètres et aires par comptage

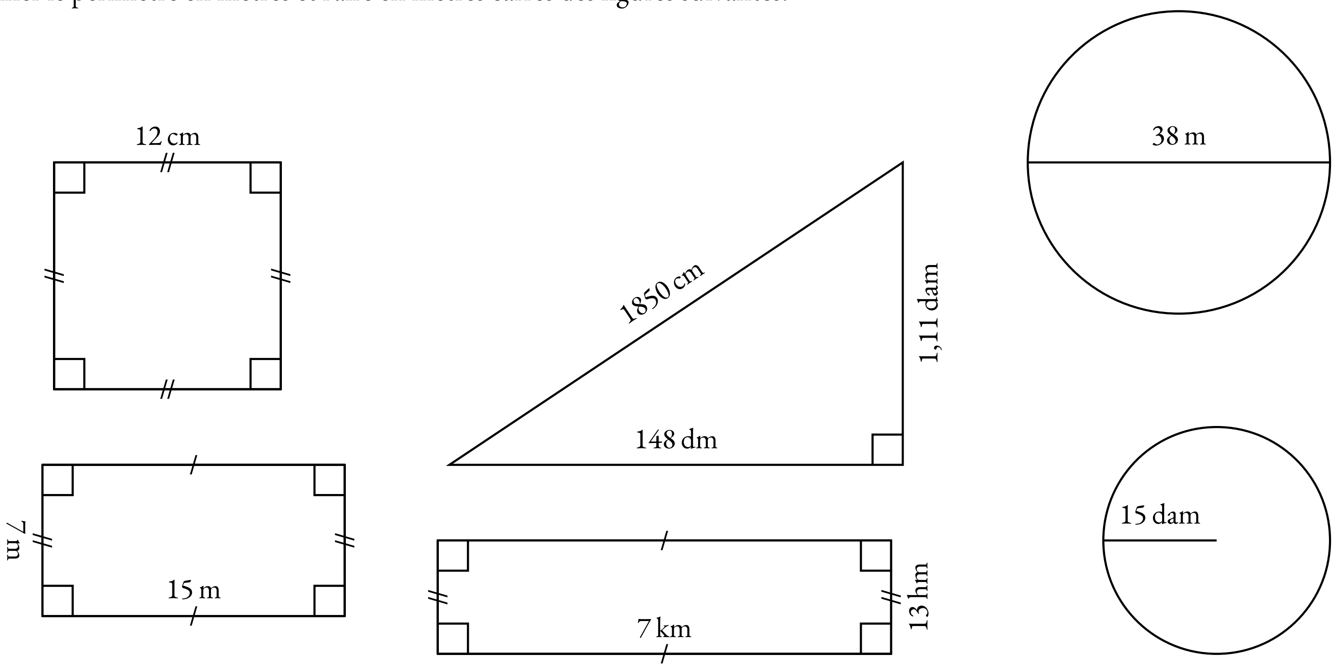
Déterminer le périmètre et l'aire des figures suivantes en utilisant les unités de mesure indiquées.



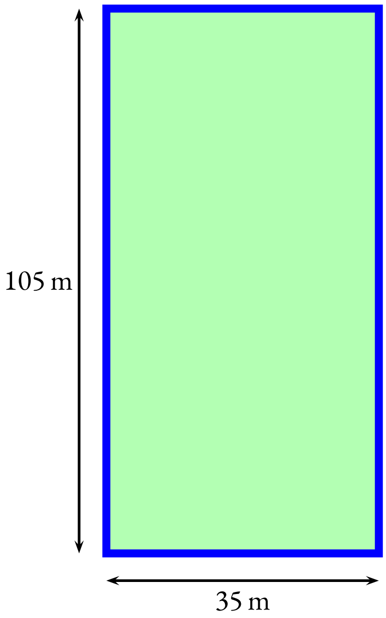
Ces figures sont soit des polygones dont les côtés sont perpendiculaires, un cercle ou un arc de cercle.

Exercice n° 2 : Périmètres et aires avec des mesures

Déterminer le périmètre en mètres et l'aire en mètres carrés des figures suivantes.



Exercice n° 3 : Un problème de jardinier



Voici un terrain rectangulaire que je viens d'acquérir pour que ma chèvre Ursule puisse y brouter tranquillement.

Pour que tout soit parfait, il faut que je clôture le terrain et que je plante du gazon résistant.

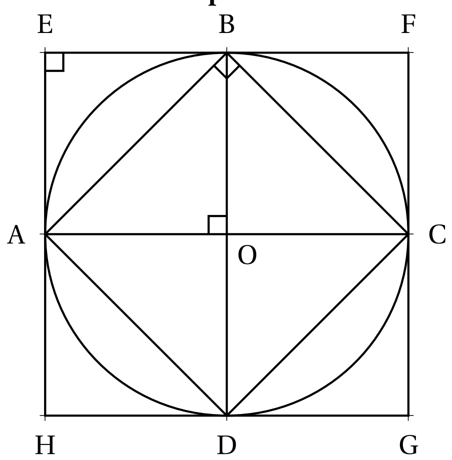
En visitant le site de mon magasin de bricolage voici les tarifs que j'ai trouvé :

— **Clôture spécial biquette :** 7,65 € le mètre ;

— **Gazon pour chevrette :** 35,05 € la boite d'un kilogramme pour $80\,\text{m}^2$.

En détaillant chaque étape du raisonnement, calculer le budget à prévoir pour ces travaux au centime près.

Exercice n° 4 : Comparaisons



Le cercle a pour rayon 1 m.

ABCD et EFGH sont des carrés.

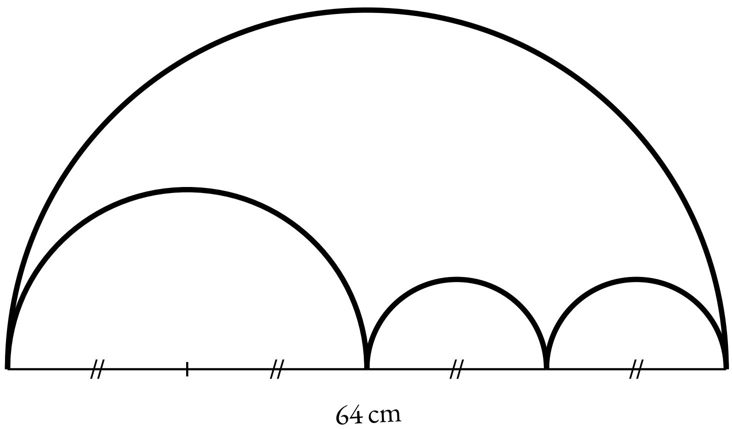
1. Déterminer le périmètre du carré EFGH en mètres
2. Déterminer le périmètre du cercle en mètres au centième près.
3. Déterminer l'aire du carré ABCD en mètres carrés.
4. Déterminer l'aire du carré EFGH en mètres carrés.
5. Déterminer l'aire du disque en mètres carrés au centième près.

Exercice n° 5 :

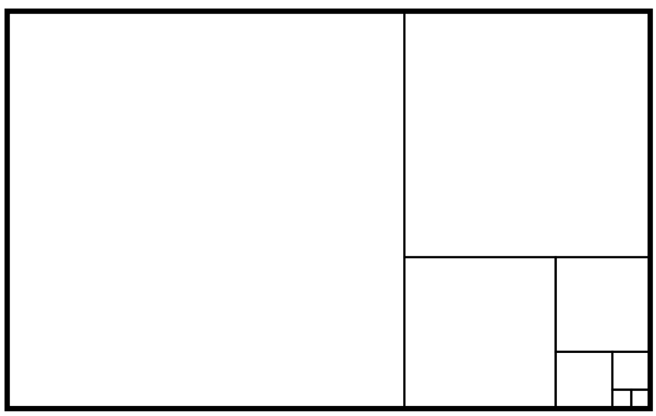
Ces figures ne sont pas au programme pour de l'évaluation, mais il est très intéressant de s'y confronter !

Voici des figures géométriques plus complexes.
Déterminer le périmètre en centimètres et l'aire en centimètres carrés de chacune d'entre elle.

Un faux air de lunule



Hommage à Fibonnacci



Le rectangle a été décomposé en huit carrés.
Les deux petits carrés sont identiques. Leur côté mesure 4 cm.

☞ Préparation de l'évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1

Correction

Dans cet exercice on note $\mathscr{P}$ le périmètre de la figure et $\mathscr{A}$ son aire.
Les longueurs sont en u.l et les aires en u.a.

Figure n° 1
C'est un rectangle de longueur 5 et de largeur 3.
$\mathscr{P} = (5+3) \times 2 = 8 \times 2 = 16$

$\mathscr{A} = 5 \times 3 = 15$

Figure n° 2
$\mathscr{P} = 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 16$

$\mathscr{A} = 4+3+2+1 = 10$

Figure n° 3
$\mathscr{P} = 1+2+1+1+1+3+1+2+1+2+1+4+1+1+3 = 24$

$\mathscr{A} = 12$

Figure n° 4
$\mathscr{P} = 1+3+2+3+1+4+4+4 = 22$

$\mathscr{A} = 10$

Figure n° 5
$\mathscr{P} = 2 \times \pi = 2\pi \approx 6,28$

$\mathscr{A} = 1 \times 1 \times \pi = \pi \approx 3,14$

Figure n° 6
$\mathscr{P} = 6 \times \pi \div 2 + 6 = 3 \times \pi + 6 = 3\pi + 6 \approx 15,42$

$\mathscr{A} = 3 \times 3 \times \pi \div 2 = 9 \times \pi \div 2 = 4,5\pi \approx 14,13$

Exercice n° 2

Correction

Le carré de côté 12 cm
$\mathscr{P} = 4 \times 12\,\text{cm} = 48\,\text{cm} = 0,48\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 12\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} = 0,12\,\text{m} \times 0,12\,\text{m} = 0,0144\,\text{m}^2$

Le rectangle de longueur 15 m et de largeur 7 m
$\mathscr{P} = (15\,\text{m} + 7\,\text{m}) \times 2 = 22\,\text{m} \times 2 = 44\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 15\,\text{m} \times 7\,\text{m} = 105\,\text{m}^2$

Le rectangle de longueur 7 km et de largeur 13 hm
$\mathscr{P} = (7\,\text{km} + 13\,\text{hm}) \times 2 = (7000\,\text{m} + 1300\,\text{m}) \times 2 = 8300\,\text{m} \times 2 = 16\,600\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 7\,\text{km} \times 13\,\text{hm} = 7000\,\text{m} \times 1300\,\text{m} = 9\,100\,000\,\text{m}^2$

Le triangle rectangle de côtés 148 dm, 1,11 dam et 1850 cm
$\mathscr{P} = 148\,\text{dm} + 1,11\,\text{dam} + 1850\,\text{cm} = 14,8\,\text{m} + 11,1\,\text{m} + 18,5\,\text{m} = 44,4\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 148\,\text{dm} \times 1,11\,\text{dam} \div 2 = 14,8\,\text{m} \times 11,1\,\text{m} \div 2 = 164,28\,\text{m}^2 \div 2 = 82,14\,\text{m}^2$

Le cercle de diamètre 38 m
Ainsi le rayon de ce cercle mesure $38\,\text{m} \div 2 = 19\,\text{m}$

$\mathscr{P} = 38\,\text{m} \times \pi \approx 119,32\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 19\,\text{m} \times 19\,\text{m} \times \pi = 361\,\text{m}^2 \times \pi \approx 1133,54\,\text{m}^2$

Le cercle de rayon 13 dam
Ainsi le diamètre de ce cercle mesure $13\,\text{dam} \times 2 = 26\,\text{dam}$

$\mathscr{P} = 26\,\text{dam} \times \pi = 260\,\text{m} \times \pi \approx 816,4\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 13\,\text{dam} \times 13\,\text{dam} \times \pi = 130\,\text{m} \times 130\,\text{m} \times \pi = 16\,900\,\text{m}^2 \times \pi \approx 53\,066\,\text{m}^2$

Exercice n° 3

Correction

Périmètre du terrain
$\mathscr{P} = (105\,\text{m} + 35\,\text{m}) \times 2 = 140\,\text{m} \times 2 = 280\,\text{m}$

Prix de la clôture
$7,65$ € $\times 280 = 2142$ €

Aire du terrain
$\mathscr{A} = 105\,\text{m} \times 35\,\text{m} = 3675\,\text{m}^2$

Nombre de boites de gazon
$3675\,\text{m}^2 \div 80\,\text{m}^2 = 61,25$
Il faut donc 62 boites de gazon.

Prix du gazon
$62 \times 35,05$ € $= 2173,10$ €

Budget à prévoir
2142 € $+ 2173,10$ € $= 4315,10$ €

Exercice n° 4

Correction

1. Le carré EFGH a un côté qui mesure 2 m.
Son périmètre mesure : $\mathscr{P} = 4 \times 2\,\text{m} = 8\,\text{m}$.

2. Le cercle a pour rayon 1 m et donc pour diamètre 2 m.
Son périmètre mesure : $\mathscr{P} = 2\,\text{m} \times \pi \approx 6{,}28\,\text{m}$.

3. Le carré ABCD a un côté dont on ne peut pas évaluer la mesure. On peut en revanche le découper en quatre triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesure 1 m sur 1 m, il s'agit de triangles rectangles isocèles.
L'aire du carré mesure : $\mathscr{A} = 4 \times 1\,\text{m} \times 1\,\text{m} \div 2 = 2 \times 1\,\text{m}^2 = 2\,\text{m}^2$.

4. Le carré EFGH a un côté qui mesure 2 m.
L'aire du carré mesure : $\mathscr{A} = 2\,\text{m} \times 2\,\text{m} = 4\,\text{m}^2$.

5. Le disque a un rayon de 1 m.
Son aire mesure : $\mathscr{A} = 1\,\text{m} \times 1\,\text{m} \times \pi = \pi\ m^2 \approx 3{,}14\,\text{m}^2$

Exercice n° 5

Correction

Un faux air de lunule
Il s'agit de plusieurs demi-cercles. Le plus grand a un diamètre de 64 cm. Le moyen a un diamètre qui mesure $64\,\text{cm} \div 2 = 32\,\text{cm}$.
Les deux plus petits, ont un diamètre qui mesure $64\,\text{cm} \div 4 = 16\,\text{cm}$.

Le périmètre du grand demi-cercle : $64\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 32\,\text{cm} \times \pi \approx 100{,}48\,\text{cm}$
Le périmètre du demi-cercle moyen : $32\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 16\,\text{cm} \times \pi \approx 50{,}24\,\text{cm}$
Le périmètre des petits demi-cercles : $16\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 8\,\text{cm} \times \pi \approx 25{,}12\,\text{cm}$

Le périmètre total : $32\,\text{cm} \times \pi + 16\,\text{cm} \times \pi + 2 \times 8\,\text{cm} \times \pi \approx 200{,}96\,\text{cm}$

On peut aussi remarquer que :
$32\,\text{cm} \times \pi + 16\,\text{cm} \times \pi + 2 \times 8\,\text{cm} \times = (64\,\text{cm} + 16\,\text{cm} + 8\,\text{cm} + 8\,\text{cm}) \times \pi = 64\,\text{cm} \times \pi$

Il s'agit du périmètre entier d'un cercle de rayon 64 cm !

L'aire du grand demi-disque : $32\,\text{cm} \times 32\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 1024\,\text{cm}^2 \times \pi \div 2 = 512\,\text{cm}^2 \times \pi \approx 1607{,}68\,\text{cm}^2$
L'aire du demi-disque moyen : $16\,\text{cm} \times 16\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 256\,\text{cm}^2 \times \pi \div 2 = 128\,\text{cm}^2 \times \pi \approx 401{,}92\,\text{cm}^2$
L'aire des petits demi-disques : $8\,\text{cm} \times 8\,\text{cm} \times \pi \div 2 = 64\,\text{cm}^2 \times \pi \div 2 = 32\,\text{cm}^2 \times \pi \approx 100{,}48\,\text{cm}^2$
Finalement l'aire totale : $512\,\text{cm}^2 \times \pi - 128\,\text{cm}^2 \times \pi - 2 \times 32\,\text{cm}^2 \times \pi \approx 1004{,}8\,\text{cm}^2$.

On peut aussi remarquer que :
$512\,\text{cm}^2 \times \pi - 128\,\text{cm}^2 \times \pi - 2 \times 32\,\text{cm}^2 \times \pi = (512\,\text{cm}^2 - 128\,\text{cm}^2 - 2 \times 32\,\text{cm}^2) \times \pi = 320\,\text{cm}^2 \times \pi$.

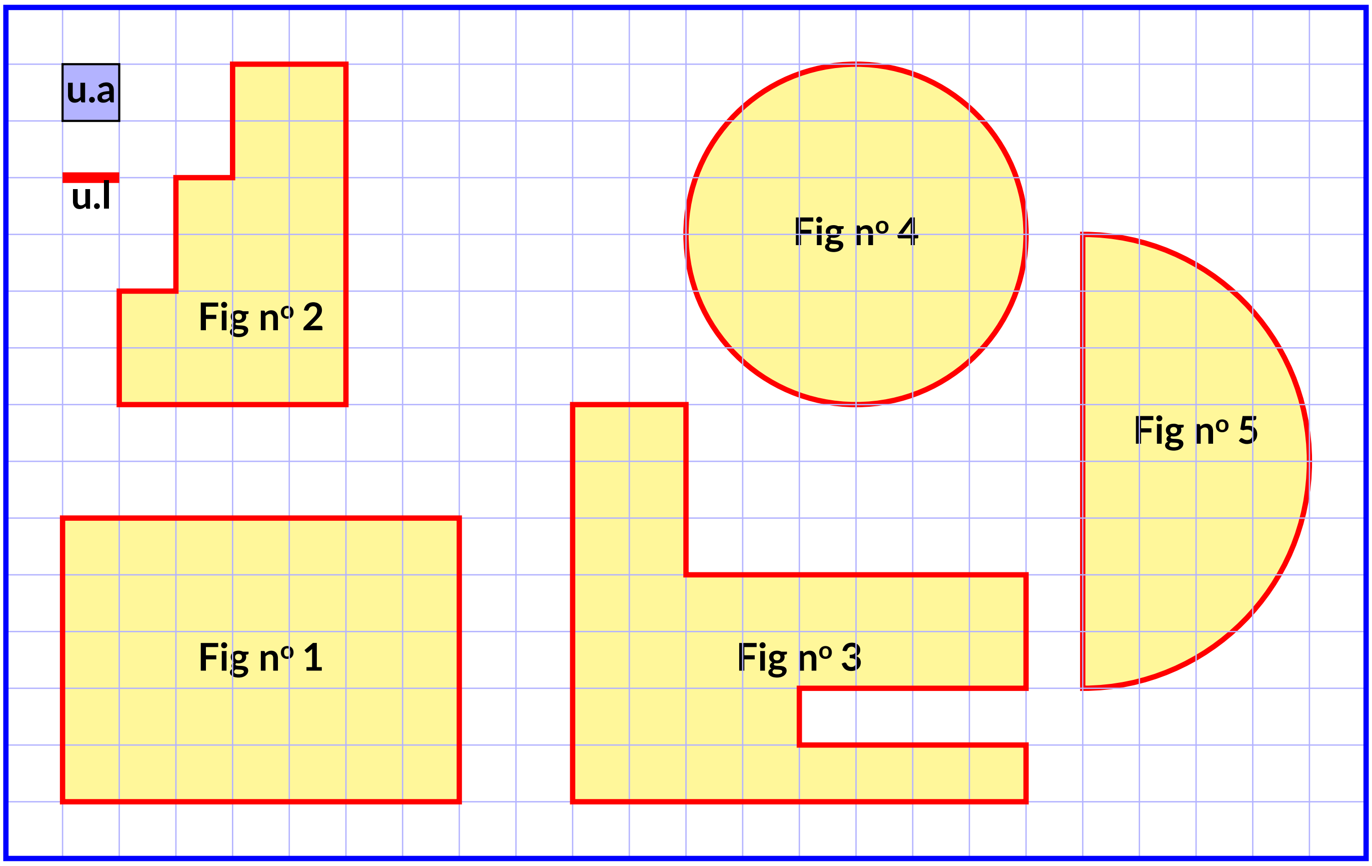
Hommage à Fibonnacci
Il y a sept carrés de taille différentes, nous les numéroterons dans l'ordre croissant.
Les **Carré nº 1** mesure 4 cm de côté.
Le **Carré nº 2** mesure $2 \times 4\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$ de côté.
Le **Carré nº 3** mesure $8\,\text{cm} + 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ de côté.
Le **Carré nº 4** mesure $12\,\text{cm} + 8\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$ de côté.
Le **Carré nº 5** mesure $20\,\text{cm} + 12\,\text{cm} = 32\,\text{cm}$ de côté.
Le **Carré nº 6** mesure $32\,\text{cm} + 20\,\text{cm} = 52\,\text{cm}$ de côté.
Le **Carré nº 7** mesure $52\,\text{cm} + 32\,\text{cm} = 84\,\text{cm}$ de côté.

Ainsi ce rectangle a une longueur de $84\,\text{cm} + 52\,\text{cm} = 136\,\text{cm}$ et une largeur de $84\,\text{cm}$.

$\mathscr{P} = (136\,\text{cm} + 84\,\text{cm}) \times 2 = 220\,\text{cm} \times 2 = 440\,\text{cm}$.
$\mathscr{A} = 136\,\text{cm} \times 84\,\text{cm} = 11\,424\,\text{cm}^2$

Exercice n° 1 : Périmètres et aires par comptage *(7,5 points)*

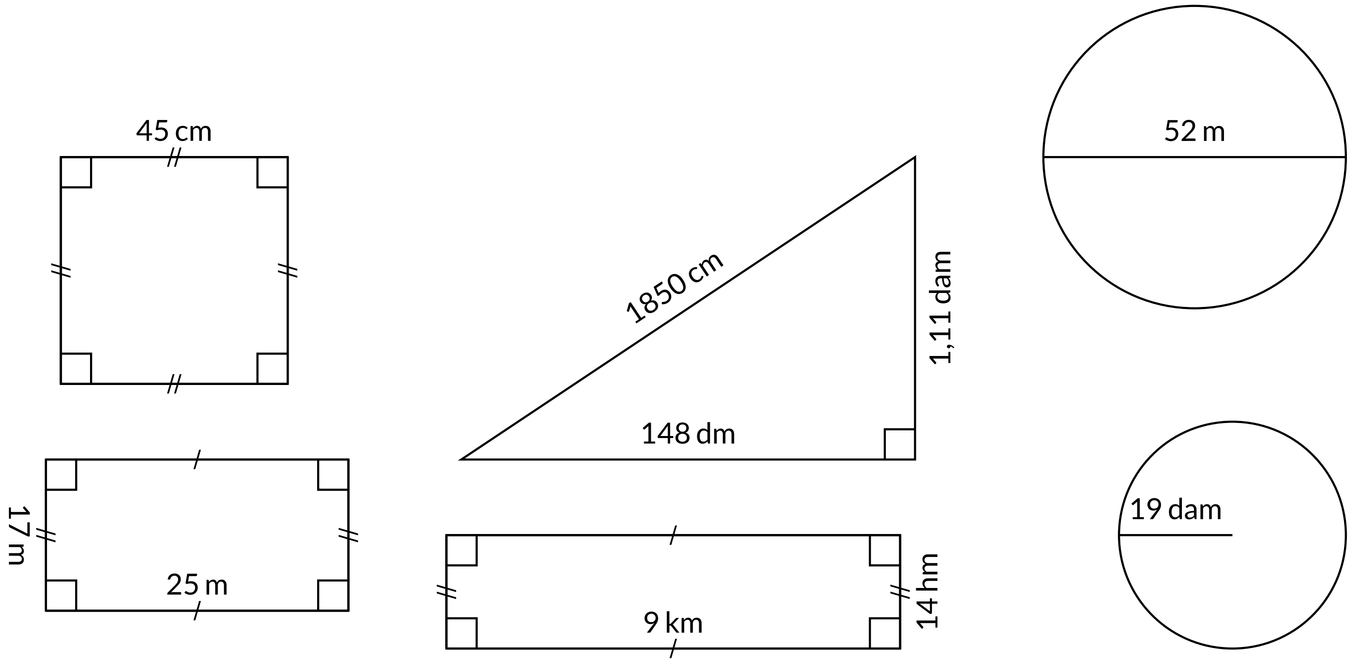
Déterminer **le périmètre** et l'**aire** des figures suivantes en utilisant les unités de mesure indiquées.



Ces figures sont soit des polygones dont les côtés sont perpendiculaires, un cercle ou un arc de cercle.

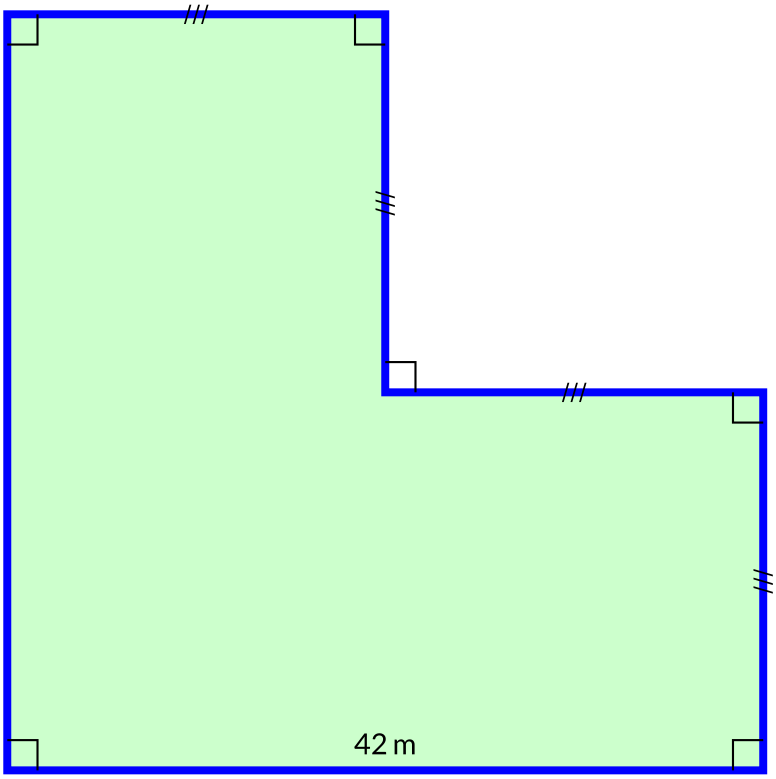
Exercice n° 2 : Périmètres et aires avec des mesures *(7,5 points)*

Déterminer **le périmètre en mètres** et **l'aire en mètres carrés** des figures suivantes.
Arrondir la réponse au **dixième** d'unité près.



Exercice n° 3 : Un problème de jardinier

(5 points) ✤ ✤ ✤



Voici un terrain polygonal que je viens d'acquérir pour mon Mouton Dagobert. Ce terrain a de nombreux **côtés égaux**, et comme je suis un peu mathématicien, les côtés se rencontrent en formant des **angles droits**.

Pour que tout soit parfait, il faut que je clôture le terrain et que je plante du gazon résistant.

En visitant le site de mon magasin de bricolage voici les tarifs que j'ai trouvé :

- **Clôture spéciale brebis sauvage :** 6,83 € le mètre ;

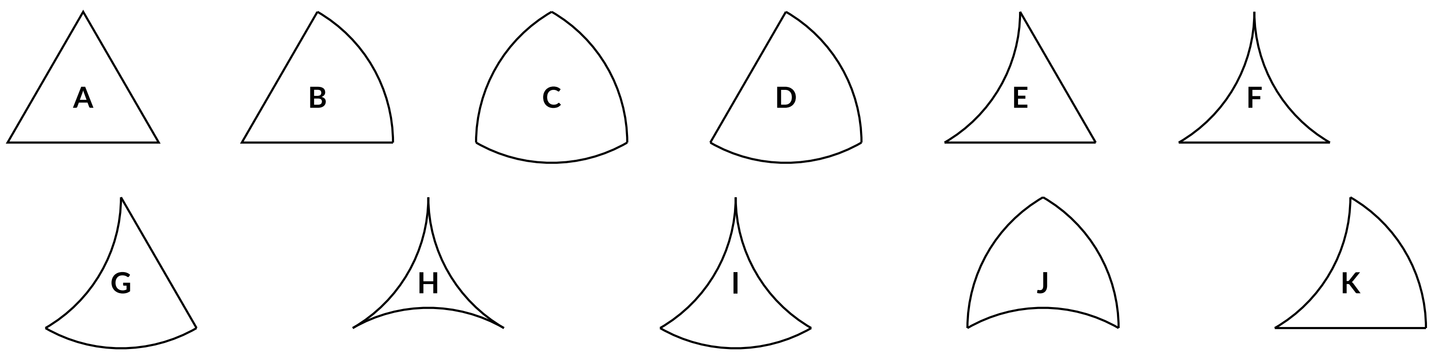
- **Gazon pour mouton gourmand :** 23,17 € la boite d'un kilogramme pour $70\,\mathrm{m}^2$.

En détaillant chaque étape du raisonnement, calculer le budget à prévoir pour ces travaux, au **centime près**.

Exercice n° 4 : Et un bonus !

(Bonus) ✤ ✤ ✤ ✤

Voici onze figures de géométrie construites à partir d'un triangle équilatéral et d'arcs de cercles.



1. Classer ces figures dans l'ordre croissant de leur périmètre en indiquant celles qui ont le même périmètre.
2. Classer ces figures dans l'ordre croissant de leur aire en indiquant celles qui ont la même aire.
3. Trouver quatre figures ayant toutes les quatre le même périmètre mais des aires différentes.
4. Trouver deux figures ayant la même aire mais des périmètres différents.

☞ Évaluation — Correction ☜

Exercice n° 1

Correction

Dans cet exercice on note $\mathscr{P}$ le périmètre de la figure et $\mathscr{A}$ son aire.
Les longueurs sont en u.l et les aires en u.a.

Figure n° 1
C'est un rectangle de longueur 7 et de largeur 5.
$\mathscr{P} = (7+5)\times 2 = 12\times 2 = 24$

$\mathscr{A} = 7\times 5 = 35$

Figure n° 2
$\mathscr{P} = 4+6+2+2+1+2+1+2 = 20$

$\mathscr{A} = 8+6+4 = 18$

Figure n° 3
$\mathscr{P} = 8+1+4+1+4+2+6+3+2+7 = 38$

$\mathscr{A} = 34$

Figure n° 5
$\mathscr{P} = 6\times \pi = 6\pi \approx 18{,}84$

$\mathscr{A} = 3\times 3\times \pi = 9\pi \approx 28{,}26$

Figure n° 6
$\mathscr{P} = 8\times \pi \div 2 + 8 = 4\times \pi + 8 = 4\pi + 8 \approx 20{,}56$

$\mathscr{A} = 4\times 4\times \pi \div 2 = 16\times \pi \div 2 = 4\pi \approx 12{,}56$

Exercice n° 2

Correction

Le carré de côté 45 cm
$\mathscr{P} = 4\times 45\,\text{cm} = 180\,\text{cm} = 180\,\text{cm} = 1{,}8\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 45\,\text{cm}\times 45\,\text{cm} = 0{,}45\,\text{m}\times 0{,}45\,\text{m} = 0{,}2025\,\text{m}^2$

Le rectangle de longueur 25 m et de largeur 17 m
$\mathscr{P} = (25\,\text{m}+17\,\text{m})\times 2 = 42\,\text{m}\times 2 = 84\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 25\,\text{m}\times 17\,\text{m} = 425\,\text{m}^2$

Le rectangle de longueur 9 km et de largeur 14 hm
$\mathscr{P} = (9\,\text{km}+14\,\text{hm})\times 2 = (9000\,\text{m}+1400\,\text{m})\times 2 = 10\,400\,\text{m}\times 2 = 20\,800\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 9\,\text{km}\times 14\,\text{hm} = 9000\,\text{m}\times 1400\,\text{m} = 12\,600\,000\,\text{m}^2$

Le triangle rectangle de côtés 148 dm, 1,11 dam et 1850 cm
$\mathscr{P} = 148\,\text{dm}+1{,}11\,\text{dam}+1850\,\text{cm} = 14{,}8\,\text{m}+11{,}1\,\text{m}+18{,}5\,\text{m} = 44{,}4\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 148\,\text{dm}\times 1{,}11\,\text{dam}\div 2 = 14{,}8\,\text{m}\times 11{,}1\,\text{m}\div 2 = 164{,}28\,\text{m}^2\div 2 = 82{,}14\,\text{m}^2$

Le cercle de diamètre 52 m
Ainsi le rayon de ce cercle mesure $52\,\text{m}\div 2 = 26\,\text{m}$

$\mathscr{P} = 52\,\text{m}\times \pi \approx 16{,}328\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 26\,\text{m}\times 26\,\text{m}\times \pi = 676\,\text{m}^2\times \pi \approx 2122{,}64\,\text{m}^2$

Le cercle de rayon 19 dam
Ainsi le diamètre de ce cercle mesure $19\,\text{dam}\times 2 = 38\,\text{dam}$

$\mathscr{P} = 38\,\text{dam}\times \pi = 380\,\text{m}\times \pi \approx 1193{,}2\,\text{m}$

$\mathscr{A} = 19\,\text{dam}\times 19\,\text{dam}\times \pi = 190\,\text{m}\times 190\,\text{m}\times \pi = 36\,100\,\text{m}^2\times \pi \approx 113\,354\,\text{m}^2$

Exercice n° 3 Correction

Périmètre du terrain
$\mathscr{P} = 42\,\text{m} + 21\,\text{m} + 21\,\text{m} + 21\,\text{m} + 42\,\text{m} = 147\,\text{m}$

Prix de la clôture
$6,83$ € $\times 147 = 1004,01$ €

Aire du terrain
$\mathscr{A} = 3 \times (21\,\text{m} \times 21\,\text{m}) = 3 \times 441\,\text{m}^2 = 1323\,\text{m}^2$

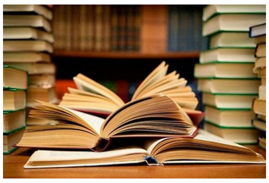
Nombre de boites de gazon
$1323\,\text{m}^2 \div 70\,\text{m}^2 = 18,9$
Il faut donc 19 boites de gazon.

Prix du gazon
$19 \times 23,17$ € $= 440,23$ €

Budget à prévoir
$1004,01$ € $+ 440,23$ € $= 1444,24$ €

Exercice n° 4 Correction

1. $A < B = E < D = F = G = K < C = H = J = I$
2. $H < F = I < E < A = G = K < B = J < D < C$
3. C H I J
4. F et I ou A et K ou A et G ou B et J

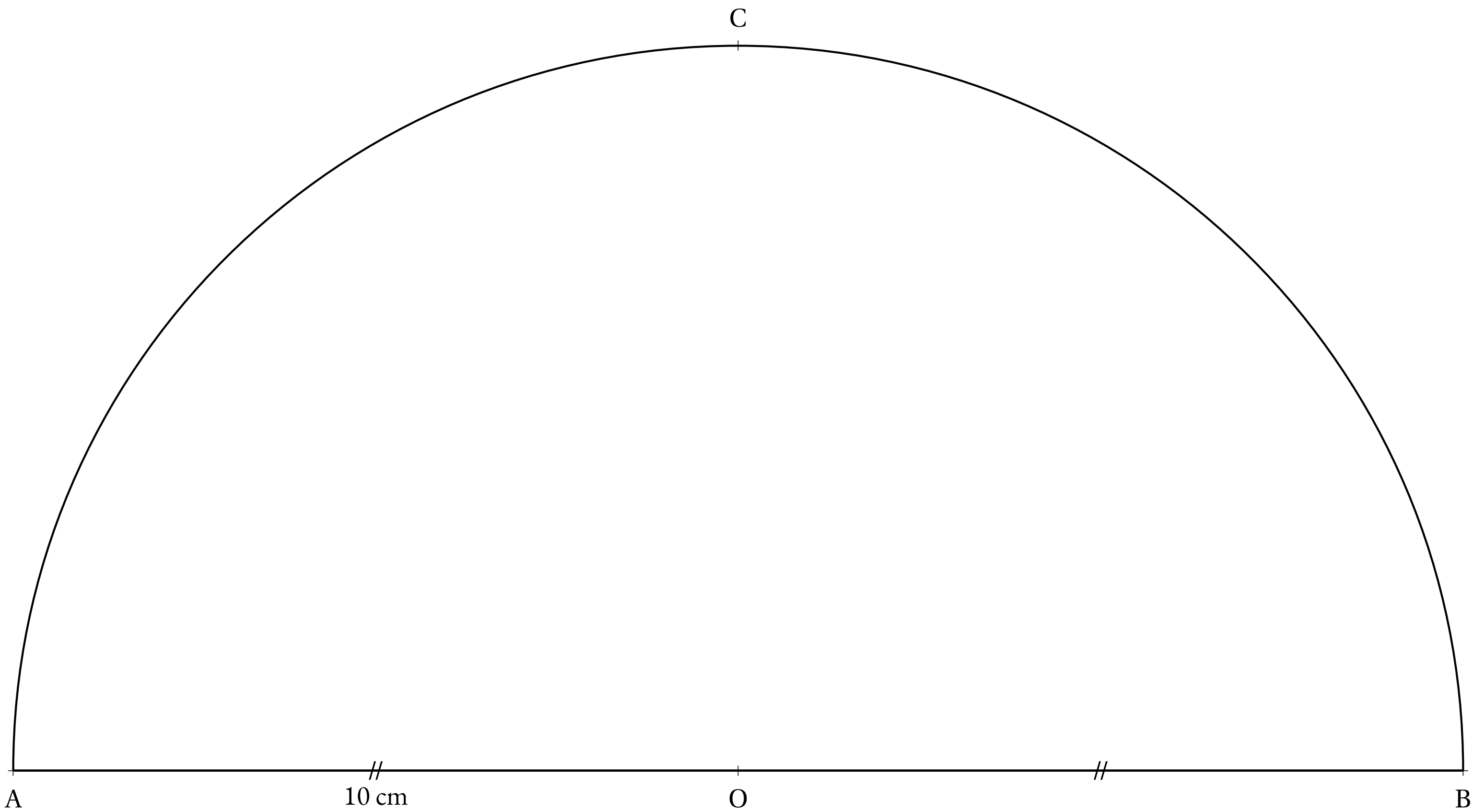


Culture

La méthode d'Archimède

Sixième

Cette activité a pour objectif de s'approcher au plus près du périmètre d'un demi-cercle de rayon 10 cm en utilisant une méthode très ancienne. Il s'agit d'une découverte d'Archimède de Syracuse (-287 — -212) un grand scientifique grec de l'Antiquité, physicien, astronome, mathématicien et ingénieur.



— Tracer les segments [AC] et [BC] ;

— Calculer en mesurant AC + CB ;

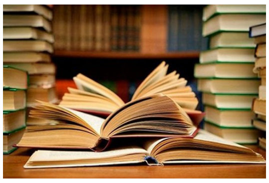
— Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A puis celle passant par B ;

— Tracer la parallèle à (AB) passant par C ;

— Calculer en mesurant le périmètre extérieur ;

— Placer sur le cercle les points D et E tels que (OD) soit la bissectrice de $\widehat{AOC}$ et (OE) la bissectrice de

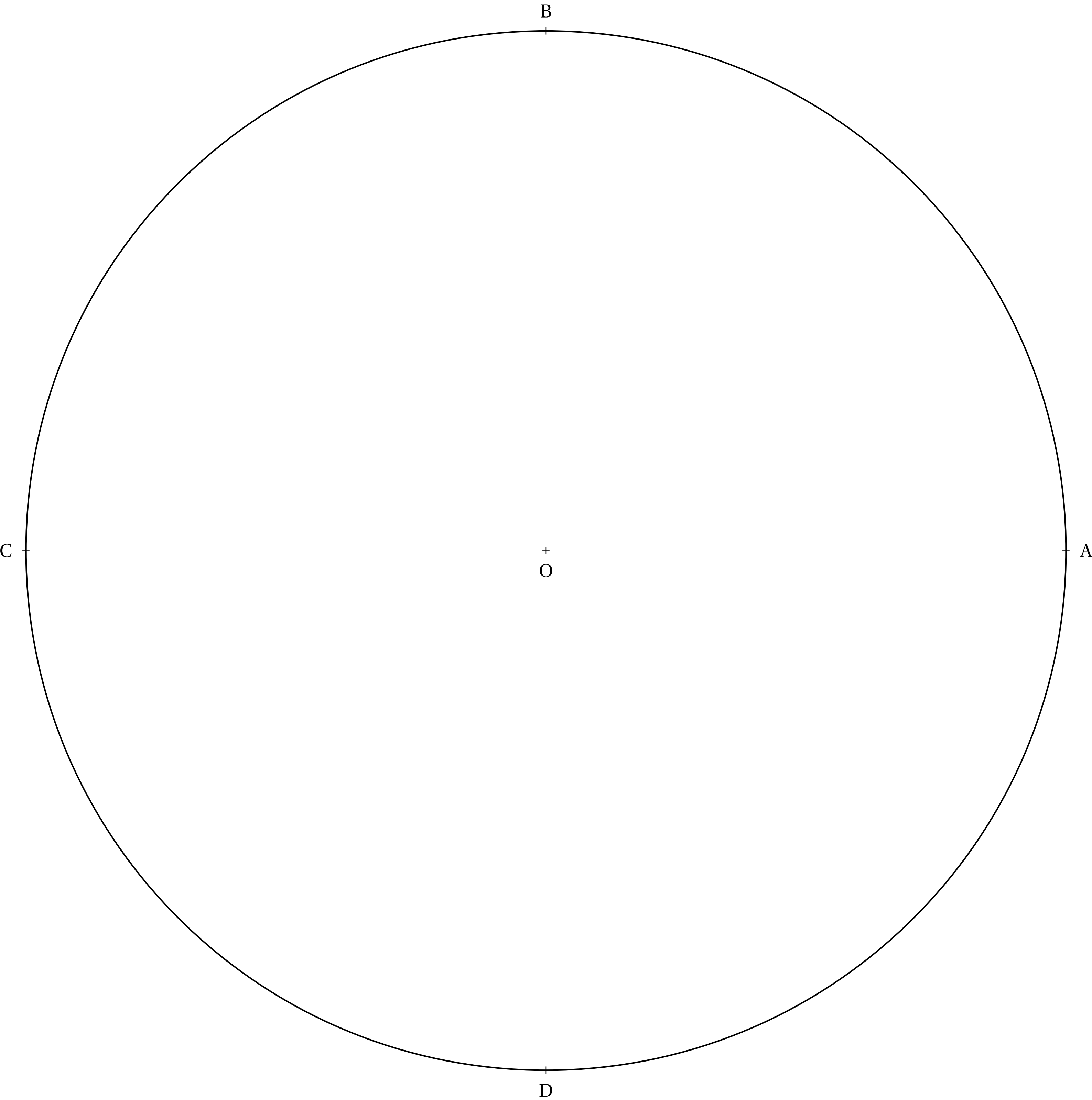
	Intérieur		**Extérieur**	
Nombre de côté	Longueur	Périmétre	Longueur	Périmètre
4				
8				
16				
32				
48				



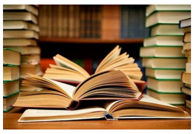
Culture

La méthode d'Archimède — Correction

La méthode d'Archimède



	Intérieur		**Extérieur**	
Nombre de côté	Longueur	Périmétre	Longueur	Périmètre
4				
8				
16				
32				
64				



Culture

Le périmètre du cercle… dans la cour !

Sixième

✧✧

Organisation pratique

- En groupe de cinq élèves ;
- Dans la cour de récréation ;
- Avec les outils suivants :
  - Une corde ;
  - Une craie ;
  - Un mètre ruban ;
  - Une règle de tableau ;
  - Un stylo et cette fiche.
- Avec vos deux professeurs !

Mission

Tracer un cercle puis mesurer précisément son rayon et son périmètre.

Méthode pour tracer un cercle mesurable dans la cour

- Placer le centre du cercle, à la craie, sur le sol ;
- Mesurer et tracer avec précision, au centimètre près, un segment d'une longueur choisie par le groupe ;
- Tracer un cercle, dont le rayon est le segment tracé, à la craie en utilisant la corde ;
- Mesurer ensuite le périmètre avec la corde comme gabarit.

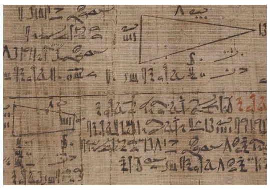
Compléter le tableau suivant. Les mesures seront données au centimètre près. Dans la deuxième colonne, il faut choisir un rayon entier qui correspond aux contraintes de la première colonne.

	Rayon	Diamètre	Périmètre
Rayon entre 30 cm et 50 cm			
Rayon entre 50 cm et 100 cm			
Rayon entre 100 cm et 200 cm			
Rayon supérieur à 200 cm			
Rayon de votre choix			

En observant les périmètres et les informations du tableau, quelle conjecture peut-on faire ?

Le périmètre du cercle… dans la cour ! — Correction

✧✧



LCA

Mesurer avec le corps — L'Égypte antique

Sixième

Les égyptiens utilisaient un système digital (du latin *digitus* qui signifie doigt) pour la mesure des longueurs. Voici ce système :

= **1 doigt**

= = 4 doigts = **1 paume**

= = 5 doigts = **1 main**

= = double paume

= 16 doigts = **1 pied** ou **1 coudée sacrée**

= 20 doigts = **1 coudée-remen**

= 24 doigts = **1 petite coudée**

= 28 doigts = **1 coudée royale**

6 pieds = **1 toise**

100 coudées royales = **1 bâton**

500 pieds = **1 stade**

20 000 coudées royales = **1 fleuve**

1. Combien de **doigts** contient **une toise** ?

2. Combien de **doigts** contient **un bâton** ?

3. Combien de **doigts** contient **un stade** ?

4. Combien de **doigts** contient **un fleuve** ?

On sait qu'une coudée royale correspond à environ 52,5 cm du système métrique.

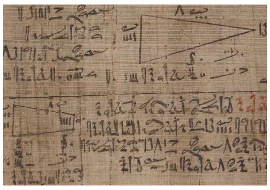
5. À l'aide de cette information, en utilisant votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

Unités	Nombre de doigts	Mesures en unité métrique
Un doigt		
Une paume		
Une main		
Un pied		
Une coudée royale		
Une toise		
Un bâton		
Un stade		
Un fleuve		

6. Aménophis mesurait une toise et trois doigts. Quelle était sa taille en centimètres ?

7. La distance entre Alexandrie et Gizeh vaut 1468 stades. Calculer cette distance en kilomètres.

8. Combien de stades mesure un fleuve.



3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288

Un psychiatre japonais de 59 ans a été capable de réciter par coeur 83 431 décimales de π. Il a mis 13 h pour réaliser cet exploit.

La lettre π désigne la **constante d'Archimède** depuis le XVIIIᵉ siècle. C'est la première lettre du mot grec περιφερεια qui signifie périphérie ou circonférence.

π

3,1415926535 897 932 238 46 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899
8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482
1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652
1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523
8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537
1050792279 6892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951
0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083
8142061717 7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787...

Il y a 982 décimales de π ci-dessus et autour de cette affiche !.

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'oeuvren grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculéeo approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteurp
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

Pensez à compter le nombre de lettres de chaque vers !

π-thon

π-gnon

π-lié

co-π

Nouveau record le 14 mars 2024 : 105 000 milliards de décimales.

À l'occasion du jour de π en 2024, l'entreprise Solidigm a annoncé avoir calculé 105 000 milliards de décimales de π. Pour information, la dernière décimale calculée est un 6. Cela a nécessité une planification, une optimisation et une exécution méticuleuse. En utilisant une combinaison de logiciels open-source et propriétaires, l'équipe de StorageReview a optimisé le processus algorithmique pour exploiter pleinement les capacités du matériel, réduisant ainsi le temps de calcul et améliorant l'efficacité.
Ce calcul a pris 75 jours ! Le plus complexe est la gestion du stockage des résultats en mémoire. Pour cette opération, des disques durs SSD Solidigm D5-P5316 de 30,72 To ont été utilisés pour obtenir jusqu'à 1 Po de mémoire flash dans le système, soit 1000 To ou encore 1 000 000 Go.
Le seul but de ce calcul complexe est d'étudier les solutions techniques de stockage des informations et de pousser au maximum les capacités des processeurs.

On sait... on ne sait pas... sur le nombre π

π n'est pas **un nombre décimal**.
Il possède une infinité de chiffres après la virgule.

π est **un nombre irrationnel**.
Il n'est égal à aucune fraction.

π est **un nombre transcendant**.
Il n'est la solution d'aucune équation algébrique.

π est peut-être **un nombre normal**.
Ses décimales sont distribuées de manière aléatoire.

π est peut-être **un nombre univers**.
Il contient toutes les suites de nombres possibles !

Si ces deux dernières conjectures sont prouvées, alors π contiendrait dans ses décimales tous les nombres possibles. Par exemple, le site **mypiday.com** indique que la date 140325 se trouve à la position 704 331. Votre date de naissance s'y trouve certainement. En codant sous forme de nombre n'importe quel livre existant, ce nombre se trouve également dans π. Votre nom, prénom, votre numéro de téléphone, votre adresse, la liste de vos amis... tout cela se trouve dans π. Si π est **nombre univers**, comme beaucoup le pense, il contiendrait les informations de l'univers entier ! (On connaît d'autres nombres univers, comme le nombre de Champernowne ou la constante de Copland-Erdös).

Comment calculer le nombre π

François Viète — 1592
$$\pi = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \dots\right)$$

Lord Brouncker — 1650
$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

John Wallis — 1656
$$\pi = 2 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \dots\right)$$

Gottfried Leibniz — 1682
$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots\right)$$

John Machin — 1734
$$\pi = 4 \times \left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right)$$

Léonhard Euler — 1753
$$\pi^2 = 6 \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots\right)$$

Ramanujan — 1915
$$\pi = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Quelques records de calcul des décimales de π

-1600	**Égypte**	$\pi \approx 3,16$
-630	**Babylone**	$\pi \approx 3,1$
-600	**Shatapatha Brahmana**	$\pi \approx 3,139$
-530	**La Bible**	$\pi \approx 3$
-300	**Archimède**	$\pi \approx 3,143$
150	**Ptolémée**	$\pi \approx 3,142$
263	**Liu Hui**	$\pi \approx 3,1427$
500	**Aryabatha**	$\pi \approx 3,1416$
1424	**Al Kashi**	17 décimales
1600	**Ludolph Van Ceulen**	35 décimales
1706	**John Machin**	100 décimales
1824	**William Rutherford**	152 décimales

1847	**Thomas Clausen**	248 décimales
1874	**William Shanks**	527 décimales

Le début du calcul informatique

1961	**Shanks**	100 265 décimales
1988	**Chudnovski**	400 000 000 décimales sur IBM 3090
1998	**Kanada**	200 000 000 000 décimales sur Hitachi SR8000
2001	**Kanada**	2 570 000 000 000 décimales
2019	**Emma Haruka**	50 000 000 000 000 décimales
2020	**Heïko Rolke**	62 800 000 000 000 décimales
2022	**Google**	100 000 000 000 000 décimales
2024	**Solidigm**	105 000 000 000 000 décimales

Combien de fois pouvez-vous lire le symbole π sur cette affiche ?

Vous avez 6 chances sur π^2 de choisir deux nombres premiers entre eux en choisissant deux nombres entiers au hasard.

Vous avez 2 chances sur π de tomber sur une intersection du parquet en lançant une aiguille de couture sur le sol.

Chapitre X

La géométrie de l'espace

Sommaire

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr

— **Dernière modification :** 30 avril 2026 à 12:58