Culture

De Pythagore au dernier théorème de Fermat

Quatrième

Une liste de carrés et de cube

Compléter en vous aidant de votre calculatrice, la liste suivante des carrés, des cubes, et quelques autres puissances des entiers de 1 à 20.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2										
n^3										
n^4										
n^5										

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n^2										
n^3										

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
n^2										

Théorème des deux carrés de Fermat

Pierre de Fermat est né vers 1610 à Beaumont-de-Lomagne, près de Montauban. Il est mort le 12 janvier 1665 à Castres. Fermat est un magistrat et mathématicien français, il est surnommé « le prince des amateurs ». Il est connu pour avoir énoncé et démontré de nombreuses propriétés arithmétique, les étudiants connaissent bien le petit théorème de Fermat. Il est aussi poète, latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique, on lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard, par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.

Le problème de deux carrés consiste à se demander quels sont les nombres entiers que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de deux carrés. Par exemple : $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$. 3, en revanche, ne peut pas s'écrire de cette manière.
Indiquer ci-dessous, pour tous les nombres entiers de 2 à 50, ceux qui sont décomposables en somme de deux carrés :

$2 = 1^2 + 1^2$	$9 =$	$16 =$	$23 =$	$30 =$	$37 =$	$44 =$
$3 = 3$	$10 =$	$17 =$	$24 =$	$31 =$	$38 =$	$45 =$
$4 =$	$11 =$	$18 =$	$25 =$	$32 =$	$39 =$	$46 =$
$5 =$	$12 =$	$19 =$	$26 =$	$33 =$	$40 =$	$47 =$
$6 =$	$13 =$	$20 =$	$27 =$	$34 =$	$41 =$	$48 =$
$7 =$	$14 =$	$21 =$	$28 =$	$35 =$	$42 =$	$49 =$
$8 =$	$15 =$	$22 =$	$29 =$	$36 =$	$43 =$	$50 =$

Observer la liste précédente et repérer les nombres entiers qui ne sont pas la somme de deux carréa.

Dans une lettre à Mersenne de Noël 1640, Pierre de Fermat formule le théorème de deux carrés qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier soit la somme de deux carrés. On appelle parfois ce résultat, le théorème de Fermat de Noël.

Théorème de Gauss sur la somme des trois carrés

Reprendre la liste précédente des nombres entiers de 1 à 50 qui ne sont pas la somme de deux carrés et tenter de les écrire sous la forme d'une somme de trois carrés :

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$	12 =	21 =	27 =	33 =	42 =	46 =
6 =	14 =	22 =	28 =	35 =	43 =	47 =
7 =	15 =	23 =	30 =	38 =	44 =	48 =
11 =	19 =	24 =	31 =	39 =	45 =	

Quels sont les nombres entiers inférieurs à 50 qui ne sont pas la somme de trois carrés ?
En 1801, Carl Friedrich Gauss donne la première preuve correcte et complète de ce théorème

Théorème des quatre carrés de Lagrange

Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac en 1621. Fermat affirma avoir une preuve de cette conjecture et même d'une généralisation. Le théorème fut démontré en 1770 par Joseph Louis Lagrange et redémontré en 1772 par Euler.

Ce théorème affirme que tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une somme de quatre carrés.
Reprendre la liste précédente des nombres entiers de 1 à 50 qui ne sont pas la somme de trois carrés et tenter de les écrire sous la forme d'une somme de quatre carrés :

7 =	23 =	31 =	47 =
15 =	28 =	39 =	

Le théorème de Pythagore

En observant la liste des carrés obtenue au verso, faire une liste de carrés égaux à une somme de deux carrés.
Par exemple, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$. Or $9 + 16 = 25$ donc $5^2 = 3^2 + 4^2$.
On dit que le triplet $(3;4;5)$ est un triplet Pythagoricien.

Indice : il y a 10 triplets Pythagoriciens disponibles dans le tableau précédent !

Il y a une infinité de triplets Pythagoriciens, on le sait depuis Euclide.

Le dernier théorème de Fermat

En utilisant la liste précédente, calculer :

$4^3 + 4^3$	$5^3 + 6^3$	$6^3 + 8^3$	$9^3 + 10^3$	$7^4 + 8^4$

Le nombre 1729 est célèbre en mathématiques. Godfrey Harold Hardy, mathématicien britannique de la première moitié du XXe siècle, rapporte l'anecdote suivante, concernant le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan. « Je me souviens que j'allais le voir une fois, alors qu'il était malade, à Putney. J'avais pris un taxi portant le numéro 1729 et je remarquai que ce nombre me semblait peu intéressant, ajoutant que j'espérais que ce ne fût pas mauvais signe. Non, me répondit-il, c'est un nombre très intéressant : c'est le plus petit nombre décomposable en somme de deux cubes de deux manières différentes. ».

En 1819, la mathématicienne Sophie Germain démontre qu'il n'existe aucun cube égal à la somme de deux cubes, c'est une conséquence du théorème de Sophie Germain.

Vers 1637, Pierre de Fermat laisse une note en marge du livre ***Arithmetica*** *de Diophante, une livre écrit au troisième siècle avant notre ère. Alors que Fermat étudie les triplets Pythagoriciens, il écrit ceci :*
« Il est impossible de séparer un cube en deux cubes, ou une puissance quatrième en deux puissances quatrièmes, ou, plus généralement, toute puissance supérieure à deux en deux puissances semblables. Je possède une preuve véritablement merveilleuse, mais la marge est trop étroite pour la contenir. »
Cette conjecture est restée sans démonstration pendant 350 ans. Il faudra attendre le travail du mathématicien anglais Andrew Wiles, qui lui dédiera 7 ans de sa vie, pour obtenir la preuve définitive en 1994. En 2016, il reçoit le prix Abel pour « sa démonstration stupéfiante du dernier théorème de Fermat ».
En 1995, il se rend à Beaumont-de-Lomagne pour recevoir le prix Fermat décerné tous les deux ans par l'Institut de Mathématiques de Toulouse depuis 1989. Grâce à Fermat et à Andrew Wiles, Beaumont-de-Lomagne est connue dans le monde entier, en particulier dans la communauté mathématique.

Une liste de carrés et de cube

Compléter en vous aidant de votre calculatrice, la liste suivante des carrés, des cubes, et quelques autres puissances des entiers de 1 à 20.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
n^4	0	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
n^5	0	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
n^3	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859

n	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
n^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841

Théorème des deux carrés de Fermat

Pierre de Fermat est né vers 1610 à Beaumont-de-Lomagne, près de Montauban. Il est mort le 12 janvier 1665 à Castres. Fermat est un magistrat et mathématicien français, il est surnommé « le prince des amateurs ». Il est connu pour avoir énoncé et démontré de nombreuses propriétés arithmétique, les étudiants connaissent bien le petit théorème de Fermat. Il est aussi poète, latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique, on lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard, par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.

Le problème de deux carrés consiste à se demander quels sont les nombres entiers que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de deux carrés. Par exemple : $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$. 3, en revanche, ne peut pas s'écrire de cette manière.
Indiquer ci-dessous, pour tous les nombres entiers de 2 à 50, ceux qui sont décomposables en somme de deux carrés :

$2 = 1^2 + 1^2$	$9 = 0^2 + 3^2$	$16 = 0^2 + 4^2$	23 =	30 =	$37 = 1^2 + 6^2$	44 =
$3 = 3$	$10 = 1^2 + 3^2$	$17 = 1^2 + 4^2$	24 =	31 =	38 =	45 =
$4 = 0^2 + 2^2$	11 =	$18 = 3^2 + 3^2$	$25 = 0^2 + 5^2$	$32 = 4^2 + 4^2$	39 =	46 =
$5 = 1^2 + 2^2$	12 =	19 =	$26 = 1^2 + 5^2$	33 =	$40 = 2^2 + 6^2$	47 =
6 =	$13 = 2^2 + 3^2$	$20 = 2^2 + 4^2$	27 =	$34 = 3^2 + 5^2$	$41 = 4^2 + 5^2$	48 =
7 =	14 =	21 =	28 =	35 =	42 =	$49 = 0^2 + 7^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	15 =	22 =	$29 = 2^2 + 5^2$	$36 = 0^2 + 6^2$	43 =	$50 = 5^2 + 5^2$

Observer la liste précédente et repérer les nombres entiers qui ne sont pas la somme de deux carrés : 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24,27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.

Un nombre entier est somme de deux carrés si et seulement si les facteurs premiers de ce nombre de la forme $4k + 3$ ont un exposant pair.

Théorème de Gauss sur la somme des trois carrés

Reprendre la liste précédente des nombres entiers de 1 à 50 qui ne sont pas la somme de deux carrés et tenter de les écrire sous la forme d'une somme de trois carrés :

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$	$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$	$21 = 1^2 + 2^2 + 4^2$	$27 = 1^2 + 1^2 + 5^2$	$33 = 2^2 + 2^2 + 5^2$	$42 = 1^2 + 4^2 + 5^2$	$46 = 1^2 + 3^2 + 6^2$
$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$	$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$	$22 = 2^2 + 3^2 + 3^2$	$28 =$	$35 = 1^2 + 3^2 + 5^2$	$43 = 3^2 + 3^2 + 5^2$	$47 =$
$7 =$	$15 =$	$23 =$	$30 = 1^2 + 2^2 + 5^2$	$38 = 1^2 + 1^2 + 6^2$	$44 = 2^2 + 2^2 + 6^2$	$48 = 4^2 + 4^2 + 4^2$
$11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$	$19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$	$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$	$31 =$	$39 =$	$45 = 2^2 + 4^2 + 5^2$	

Quels sont les nombres entiers inférieurs à 50 qui ne sont pas la somme de trois carrés ? 7, 15, 23, 28, 31, 39, 47
En 1801, Carl Friedrich Gauss donne la première preuve correcte et complète de ce théorème

Théorème des quatre carrés de Lagrange

Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac en 1621. Fermat affirma avoir une preuve de cette conjecture et même d'une généralisation. Le théorème fut démontré en 1770 par Joseph Louis Lagrange et redémontré en 1772 par Euler.

Ce théorème affirme que tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une somme de quatre carrés.
Reprendre la liste précédente des nombres entiers de 1 à 50 qui ne sont pas la somme de trois carrés et tenter de les écrire sous la forme d'une somme de quatre carrés :

$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$	$23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$	$31 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2$	$47 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 6^2$
$15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$	$28 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$	$39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$	

Le théorème de Pythagore

En observant la liste des carrés obtenue au verso, faire une liste de carrés égaux à une somme de deux carrés.
Par exemple, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$. Or $9 + 16 = 25$ donc $5^2 = 3^2 + 4^2$.
On dit que le triplet $(3;4;5)$ est un triplet Pythagoricien.

Indice : il y a 10 triplets Pythagoriciens disponibles dans le tableau précédent !
$(3;4;5)$; $5;12;13)$; $(6;8;10)$; $7;24;25)$; $8;15;17)$; $9;12;15)$; $10;24;26)$; $12;16;20)$; $15;20;25)$; $(20;21;29)$
Il y a une infinité de triplets Pythagoriciens, on le sait depuis Euclide.
Soit p et q deux nombres premiers entre eux, de parité différentes avec $p > q$, alors le triplet $(p^2 - q^2; 2pq; p^2 + q^2)$ est Pythagoricien.
Tous les triplets peuvent s'écrire sous cette forme. Par exemple $(5;12;13)$ pour $p = 3$, $q = 2$, $p^2 - q^2 = 9 - 4 = 5$, $2pq = 12$ et $p^2 + q^2 = 13$

Le dernier théorème de Fermat

En utilisant la liste précédente, calculer :

$4^3 + 4^3 = 64 + 64 = 128 \neq 125 = 5^3$
$5^3 + 6^3 = 125 + 216 = 341 \neq 343 = 7^3$
$6^3 + 8^3 = 216 + 512 = 728 \neq 729 = 9^3$
$9^3 + 10^3 = 729 + 1000 = 1729 \neq 1728 = 12^3 =$
$7^4 + 8^4 = 2401 + 4096 = 6497 \neq 6561 = 9^4$

Le nombre 1729 est célèbre en mathématiques. Godfrey Harold Hardy, mathématicien britannique de la première moitié du XXe siècle, rapporte l'anecdote suivante, concernant le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan. « Je me souviens que j'allais le voir une fois, alors qu'il était malade, à Putney. J'avais pris un taxi portant le numéro 1729 et je remarquai que ce nombre me semblait peu intéressant, ajoutant que j'espérais que ce ne fût pas mauvais signe. Non, me répondit-il, c'est un nombre très intéressant : c'est le plus petit nombre décomposable en somme de deux cubes de deux manières différentes. ».

En 1819, la mathématicienne Sophie Germain démontre qu'il n'existe aucun cube égal à la somme de deux cubes, c'est une conséquence du théorème de Sophie Germain.

Vers 1637, Pierre de Fermat laisse une note en marge du livre ***Arithmetica*** *de Diophante, une livre écrit au troisième siècle avant notre ère. Alors que Fermat étudie les triplets Pythagoriciens, il écrit ceci :*
« Il est impossible de séparer un cube en deux cubes, ou une puissance quatrième en deux puissances quatrièmes, ou, plus généralement, toute puissance supérieure à deux en deux puissances semblables. Je possède une preuve véritablement merveilleuse, mais la marge est trop étroite pour la contenir. »
Cette conjecture est restée sans démonstration pendant 350 ans. Il faudra attendre le travail du mathématicien anglais Andrew Wiles, qui lui dédiera 7 ans de sa vie, pour obtenir la preuve définitive en 1994. En 2016, il reçoit le prix Abel pour « sa démonstration stupéfiante du dernier théorème de Fermat ».
En 1995, il se rend à Beaumont-de-Lomagne pour recevoir le prix Fermat décerné tous les deux ans par l'Institut de Mathématiques de Toulouse depuis 1989. Grâce à Fermat et à Andrew Wiles, Beaumont-de-Lomagne est connue dans le monde entier, en particulier dans la communauté mathématique.

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 12 novembre 2026 à 20:42

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.2141
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Resolute Raccoon (Le Raton Laveur résolu) 26.04 avec la distribution TeX Live 2025.20260124 et LuaTex 1.22.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Licence CC BY-NC-SA 4.0

Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.

Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.

Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, , a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 12 novembre 2026 à 20:42.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article :