La leçon — Version prof

Les textes écrit en violet sont destinés à l'enseignant, ils ne font pas partie de ce qu'on appelle la trace écrite.
Les démonstrations sont aussi en violet, elles sont le plus souvent présentée à l'oral.

I — Fractions et demi-droite graduée

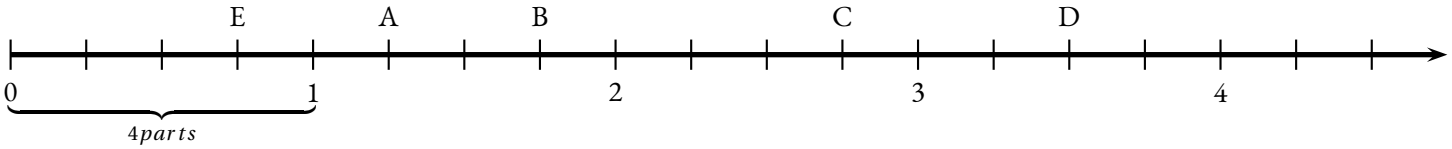
Définition 3.1 : Fractions sur la droite graduée

n un nombre entier naturel non nul.
Sur une demi-droite graduée dont l'unité est partagée en n parts égales, la **fraction** $\frac{1}{n}$ est le nombre qui correspond à la longueur d'une de ses parts.

k et n des nombres entiers naturels, n non nul.
La **fraction** $\frac{k}{n}$ est le nombre qui correspond à la longueur de k parts.

Le nombre entier naturel k est le **numérateur** de la fraction.
Le nombre entier naturel non nul n est le **dénominateur** de la fraction.

Ces définitions ne sont données que sous la forme d'exemple générique en sixième, jamais sous cette forme !
En sixième et à l'école primaire, la fraction est un moyen pour parler d'un partage. On passe des formes partagées en part, gâteaux, objets géométriques, au partage d'un segment unitaire sur la demi-droite graduée.
Avec cet artifice, on arrive à admettre que la fraction passe d'un outil de partage à un nombre sur la droite graduée. Il faudra attendre un peu plus tard avec la définition du quotient, pour obtenir la définition d'un rationnel.



Une **fraction** est un nombre qui correspond à une abscisse sur une demi-droite graduée dont l'unité à été partagée en plusieurs parts égales.

Par exemple, sur la demi-droite ci-dessus, voici les abscisses des points A, B, C et D :

- A : $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
- B : $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$
- C : $2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$
- D : $3+\frac{2}{4}=\frac{14}{4}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$
- E : $\frac{3}{4}$

Il y a **quatre quarts** dans une unité, c'est à dire $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

Pour la même raison, il y a **deux demis** dans une unité, **trois tiers** dans une unité ou encore **sept septièmes**.

On peut donc écrire que $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ou $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Propriété 3.1 : Partage de l'unité *(Admise)*

n un nombre entier naturel non nul

$$n \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

À ce stade de la progression du cours en sixième, il faut admettre cette propriété. Elle est essentiellement « visuelle », et consiste simplement à dire qu'en partageant l'unité en plusieurs parts, on retrouve l'unité en regroupant ces parts.
Ce qui est moins évident, et doit être admis, c'est le fait que ce partage géométrique de l'unité sur la droite graduée, correspond à un nombre. Nous admettrons l'existence de ce nombre ici et verront plus tard la définition du quotient.

Il est souvent inutile d'écrire cette propriété dans le cahier des élèves en utilisant la lettre n, des exemples génériques suffisent et sont bien plus simple à comprendre !

Comme il y a quatre quarts dans une unité, il y a huit quarts dans deux unités, douze quarts dans trois unités et ainsi de suite.

$4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$8 \times \frac{1}{4} = 2 \times 4 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{4}{4} = 2 \times 1 = 2$

$12 \times \frac{1}{4} = 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{4} = 3 \times 1 = 3$

$7 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{4} = \frac{21}{4}$

Propriété 3.2 : Multiples d'une fraction *(Admise)*

n un nombre entier naturel non nul et k un entier naturel.

$$k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Si k est un multiple de n, c'est à dire si $k = p \times n$ alors

$$k \times \frac{1}{n} = p$$

Encore une propriété que je ne fais pas écrire et que je me contente d'illustrer sur des exemples génériques.

La première propriété est basée sur le langage. Elle est inutilement formalisée dans cette propriété.
Par exemple, le produit $7 \times \frac{1}{8}$, revient à effectuer sept fois un huitième, ce qui peut se dire sept huitièmes soit $\frac{7}{8}$.

Dire que $7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ soit sept huitièmes, ne signifie pas encore que $\frac{7}{8}$ est le huitième de 7 !
Dit autrement, le fait que $\frac{7}{8} = 7 \times \frac{1}{8}$ ne signifie pas encore que $8 \times \frac{7}{8} = 7$.

La seconde propriété est plus facilement démontrable.
Si n est un naturel non nul et $k = p \times n$ un multiple de n, alors $k \times \frac{1}{n} = p \times n \times \frac{1}{n} = p \times \frac{n}{n} = p \times 1 = p$.

Exemple :

$\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

$\frac{45}{6} = \frac{42}{6} + \frac{3}{6} = 7 + \frac{3}{6}$

$\frac{89}{9} = \frac{81}{9} + \frac{8}{9} = 9 + \frac{8}{9}$

II — Les fractions décimales

III — Les nombres décimaux

IV — Somme, différence et produit des nombres décimaux

Nous allons prolonger l'addition, la différence et le produit des nombres entiers aux nombres décimaux. Nous proposerons les démonstrations sous forme d'exemples génériques.

1 La somme et la différence

On souhaite calculer $3,14 + 1,789$

$3,14 = \dfrac{314}{100} = \dfrac{3\,140}{1\,000}$ et $1,789 = \dfrac{1\,789}{1\,000}$

$$3,14 + 1,789 = \frac{3\,140}{1\,000} + \frac{1\,789}{1\,000} = \frac{3\,140 + 1\,789}{1\,000} = \frac{4\,929}{1\,000}$$

Ainsi $3,14 + 1,789 = 4,929$

Méthode 3 . 1 : Additionner des nombres décimaux

Pour additionner des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour additionner les nombres entiers :

- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;
- on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;
- on effectue la somme comme pour des entiers ;
- dans la somme, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 3,1\,4\,0 \\ +\ 1,7\,8\,9 \\ \hline 4,9\,2\,9 \end{array}$$

On souhaite calculer $3,14 - 1,789$

$$3,14 - 1,789 = \frac{3\,140}{1\,000} - \frac{1\,789}{1\,000} = \frac{3\,140 - 1\,789}{1\,000} = \frac{1\,351}{1\,000}$$

Ainsi $3,14 - 1,789 = 1,351$

Méthode 3 . 2 : Soustraire des nombres décimaux

Pour soustraire des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour soustraire les nombres entiers :

- on place le nombre le plus grand au dessus du nombre le plus petit ;
- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;

— on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;

— on effectue la différence comme pour des entiers ;

— dans la différence, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r} 3,1\ 4\ 0 \\ -\ 1,7\ 8\ 9 \\ \hline 1,3\ 5\ 1 \end{array}$$

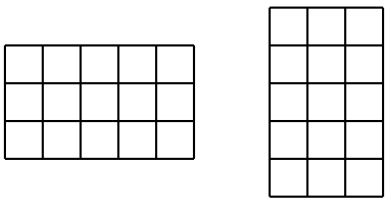
---

2 Le produit des nombres décimaux

Le produit de deux nombres entiers

La multiplication entière est une répétition d'additions.

Souvenons-nous que $3 \times 5 = \underbrace{5+5+5}_{3\ fois}$ et que $5 \times 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{5\ fois}$.
Signalons également que $3 \times 5 = 5 \times 3$.[4]
Pour illustrer cette propriété on peut raisonner de manière géométrique :



Dans les deux cas le nombre de carrés à l'intérieur de ces rectangles identiques est $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$

La produit d'un nombre entier par un nombre décimal

Calculons $5 \times 3,14$.
Ce produit peut s'interpréter comme $\underbrace{3,14+3,14+3,14+3,14+3,14}_{5 fois} = 15,70$

Calculons maintenant $3,14 \times 5$.
Attention, rien ne prouve que $3,14 \times 5$ revient à calculer $5 \times 3,14$! Comment effectuer une addition répétée « 3,14 fois » ?

Notons $P = 3,14 \times 5$, $P = \dfrac{314}{100} \times 5$.

On peut multiplier P par 100 : $100 \times P = \underbrace{100 \times \dfrac{314}{100}}_{314} \times 5$

Donc $100 \times P = 314 \times 5 = 1570$

Nous en déduisons que $P = \dfrac{1570}{100} = 15,70$ puisque $100 \times \dfrac{1570}{100} = 1570$

Finalement $3,14 \times 5 = 5 \times 3,14 = 15,70$

Le produit de deux nombres décimaux

Calculons $5,2 \times 3,14$.
Cette fois-ci ce produit ne peut pas être interprété comme une addition répétée. On utilise la stratégie précédente.

Notons $P = 5,2 \times 3,14$ on a $P = \dfrac{52}{10} \times \dfrac{314}{100}$

Comme $10 \times \dfrac{52}{10} = 52$ et que $100 \times \dfrac{314}{100} = 314$, on effectue les multiplications suivantes :

$$10 \times P \times 100 = \underbrace{10 \times \frac{52}{10}}_{52} \times \underbrace{\frac{314}{100} \times 100}_{314}$$

$$10 \times P \times 100 = 52 \times 314$$

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 5 novembre 2026 à 6:46

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.2141
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Resolute Raccoon (Le Raton Laveur résolu) 26.04 avec la distribution TeX Live 2025.20260124 et LuaTex 1.22.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Licence CC BY-NC-SA 4.0

Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.
Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.
Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.
Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 5 novembre 2026 à 6:46.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college