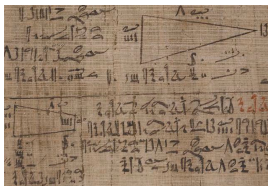
Chapitre X

La géométrie de l'espace

Sommaire

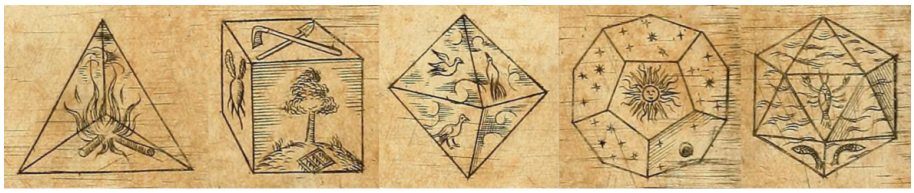
Activité — Langue et Culture de l'Antiquité : Les patrons du cube 464
Activité — Culture : Le polyèdre d'Escher 466
Évaluation — 470

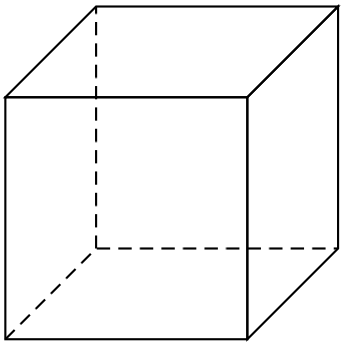


LCA

Les patrons du cube

Sixième





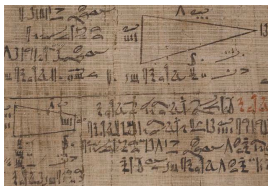
Les solides de Platon jouent un rôle déterminant dans la philosophie de Platon. Platon, dans le dialogue Timée (env. 358 av. J.-C.), associait chacun des quatre éléments (la terre, l'air, l'eau et le feu) à un solide régulier.
La terre était associée au cube, l'Air à l'octaèdre, l'Eau à l'icosaèdre et le Feu au tétraèdre. Il existait une justification pour ces associations : *la chaleur du Feu semble pointue et comme un poignard (comme un peu le tétraèdre). L'Air est constitué de l'octaèdre; ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir. L'Eau, l'icosaèdre, s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules. Le solide le plus stable, l'hexaèdre (cube), représente la Terre. Ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit, une grande différence avec l'écoulement doux de l'eau. Pour le cinquième solide, le dodécaèdre, Platon remarque obscurément : « le dieu l'a utilisé pour l'Univers quand il en a dessiné l'arrangement final. »*
Platon mettait en correspondance le dodécaèdre avec le Tout, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère. Aristote a nommé ce cinquième élément, éther et a postulé que l'univers était fait de cet élément, et qu'il était substantiel à tous les autres, qu'il les contenait tous.

Le cube est un solide de l'espace constitué de :

— faces ;
— sommets ;
— arêtes.

1. Dessiner dans le cadre ci-contre, à main levée, un patron du cube.
Un patron est une figure de géométrie plane en un seul morceau qui permet de reconstituer un **polyèdre** après plusieurs pliages. Il s'agit du modèle pour construire un solide.

2. En équipe, vous devez construire sur papier blanc, les patrons d'un cube de 4 cm de côté. Ces patrons doivent être construits en vraies grandeurs. L'objectif est de construire en temps limité le plus grand nombre de patrons **non superposables** de ce cube.

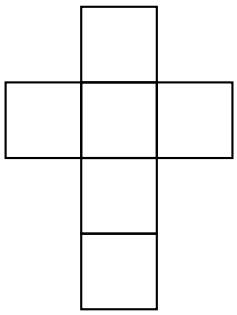


LCA

Les patrons du cube — Correction

Le cube est un solide de l'espace constitué de :

- **6** faces ;
- **8** sommets ;
- **12** arêtes.



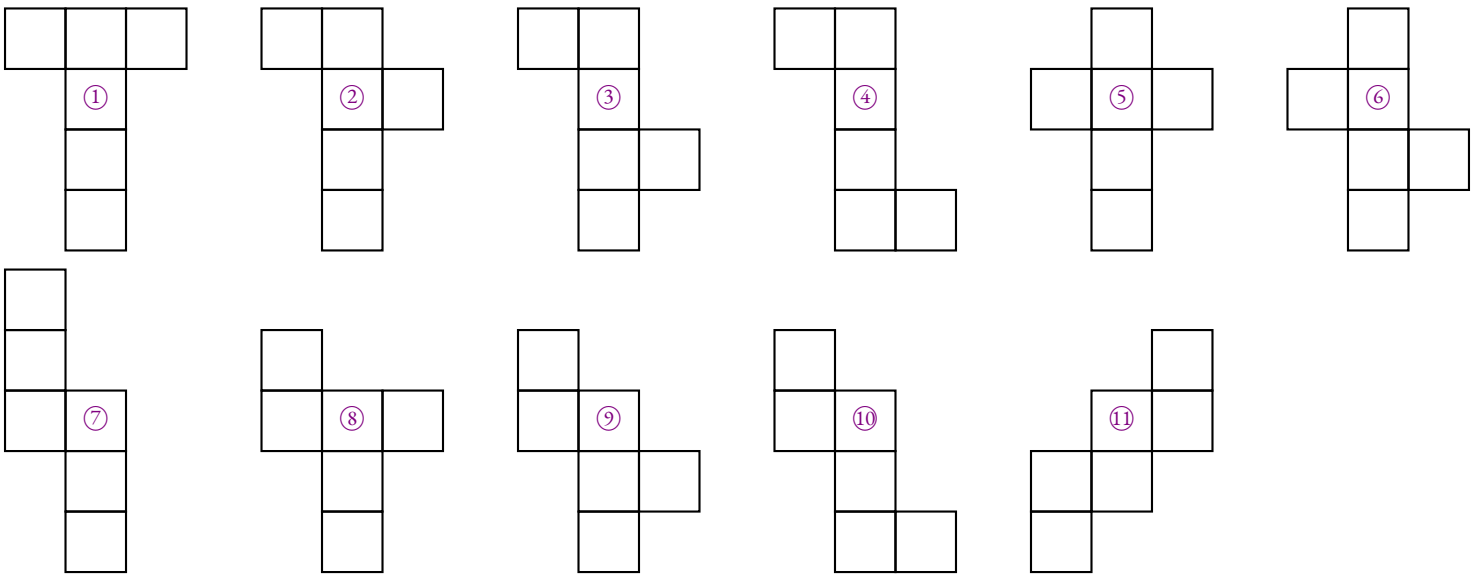
1. Dessiner à main levée, un patron du cube.

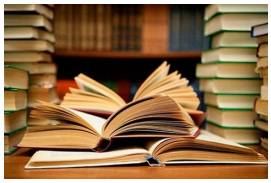
2. En équipe, vous devez construire sur papier blanc, les patrons d'un cube de 4 cm de côté. Ces patrons doivent être construits en vraies grandeurs. L'objectif est de construire en temps limité le plus grand nombre de patrons **non superposables** de ce cube.

On peut raisonner en se demandant combien de carrés sont alignés dans le patron :

- Il est impossible d'obtenir un cube en alignant 6 carrés dans le patron ;
- Il est impossible d'obtenir un cube en alignant 5 carrés dans le patron ;
- En alignant 4 carrés, on obtient 6 patrons, ce sont les 6 possibilités pour placer les deux autres carrés
  On peut commencer en plaçant le premier carré en haut à gauche, on peut placer le dernier carré en haut à droite, juste en dessous, un peu plus bas ou tout en bas, soit quatre possibilités. Ce sont les patrons ① ② ③ ④
  En plaçant le premier carré en seconde position à gauche, il reste deux autres possibilités. ⑤ ⑥
- En alignant 3 carrés, on obtient 4 patrons supplémentaires
  On peut commencer en alignant les trois autres à gauche comme sur ⑦.
  Ensuite on en enlève un, il reste deux alignés à gauche et trois possibilités à droite comme sur ⑧ ⑨ ⑩
  Il n'y a pas d'autre possibilité.
- En alignant 2 carrés, on en obtient seulement ⑪.
- Si on aligne aucun carré, on n'obtient pas un patron !

Il y a donc 11 patrons de cube non superposables !

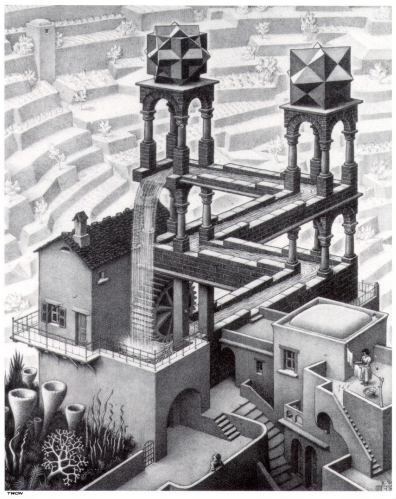




Le polyèdre d'Escher

Sixième

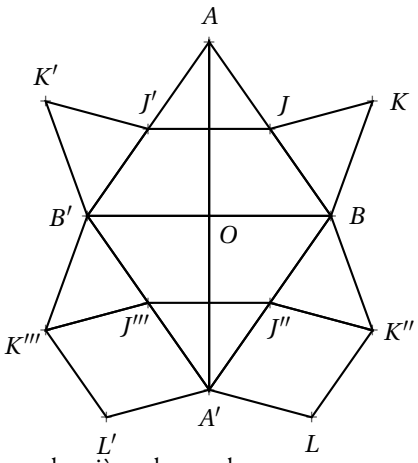
Culture



Maurits Cornelis Escher, né le 17 juin 1898 à Leeuwarden, aux Pays-Bas, et mort le 27 mars 1972 à Laren. Plus couramment nommé M. C. Escher, cet artiste néerlandais est connu pour ses gravures inspirées des mathématiques et des motifs de l'art islamique.
Ses œuvres représentent des constructions impossibles, des explorations de l'infini, des pavages et des combinaisons de motifs en deux ou trois dimensions qui se transforment en des formes totalement différentes, qui défient les modes habituels de représentation du spectateur.
L'œuvre de M. C. Escher a séduit de nombreux mathématiciens à la communauté desquels il se défendait d'appartenir. Il aimait dire à ses admirateurs : « Tout cela n'est rien comparé à ce que je vois dans ma tête ! »
Chute d'eau est une lithographie de M. C. Escher, imprimée pour la première fois en octobre 1961. Elle représente une machine à mouvement perpétuel où un cours d'eau part de la base d'une chute d'eau en semblant descendre avant d'atteindre le sommet de cette chute.
Alors que la plupart des artistes utilisent des proportions relatives pour créer une illusion de profondeur, Escher utilise ici des proportions contradictoires pour créer un paradoxe visuel. Le cours d'eau en aqueduc alimentant la chute d'eau a la structure de deux triangles de Penrose.

Les tours, dans le lithographie de M. C. Escher « Chute d'eau », sont coiffées par des polyèdres particuliers : **les polyèdres d'Escher**.
Nous allons construire ce polyèdre sous la forme d'une puzzle constitué de six solides tous identiques.







Voici le programme de construction pour obtenir une des pièces du puzzle :

1. Utiliser le segment $[AO]$ déjà placé, pour tracer le triangle rectangle AOB, rectangle en O tel que $\widehat{OAB} = 35°$.
2. Placer J le milieu de $[AB]$.
3. Tracer le triangle JBK tel que $\widehat{JBK} = 55°$ et $\widehat{BJK} = 70°$.

4. Tracer B', J' et K' les symétriques de B, J et K par rapport à la droite (AO).
5. Tracer les triangles AOB' et $B'J'K'$.

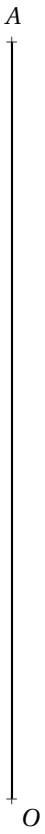
6. Tracer A, J'', K'', J''' et K''' les symétriques de A, J, K, J' et K' par rapport à la droite (BB').
7. Tracer les triangles $B'OA'$, BOA', $BJ''K''$ et $B'J'''K''$. Tracer les segments $[JJ']$ et $[J''J''']$.

8. Construire L le symétrique de J'' par rapport à la droite $(A'K'')$. Tracer ensuite $J''K'LA'$.
9. Construire L' le symétrique de J''' par rapport à la droite $(A'K''')$. Tracer ensuite $J'''K'''L'A'$.

10. Ajouter des languettes vers l'extérieur, sur les segments $[JK]$, $[J'K']$, $[A'L]$ et $[A'L']$.
11. Découper le polygone $AJKBK''LA'L'K'''B'K'J'$ en gardant les languettes pour le pliage.
12. Marquer les plis $[JJ']$, $[J''J''']$, $[BB']$, $[J''K'']$, $[J'''K''']$, $[B'A']$ et $[BA']$.
13. Gommer le segment $[AA']$ qui ne doit pas être plié !
14. Marquer les plis $[J''L]$ et $[J'''L']$ dans le sens contraire des précédents plis.

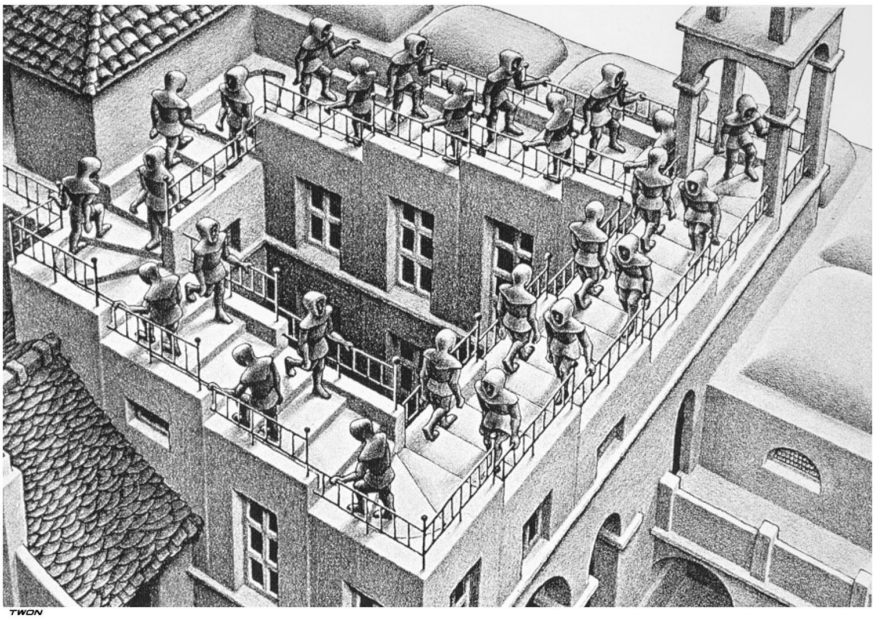
15. Construire le polyèdre obtenu à l'aide de ce patron, coller les languettes.

16. Déterminer les caractéristiques de ce polyèdre, c'est à dire son nombre de faces, son nombre de sommets et son nombre d'arêtes.


A
O



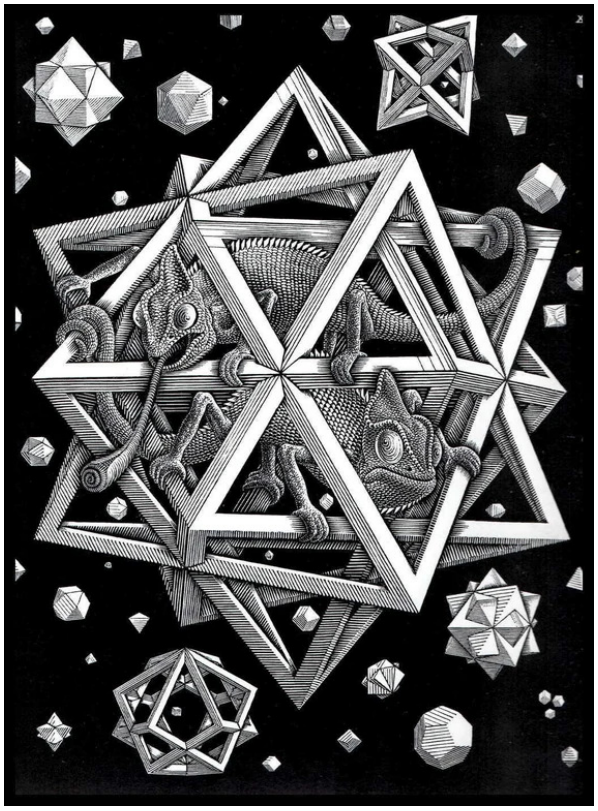
M. C. Escher - Chute d'eau - 1961 - Lithographie



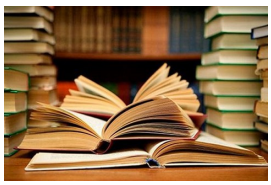
M. C. Escher - Montée et descente - 1960 - Lithographie



M. C. Escher - Relativité - 1953 - Lithographie

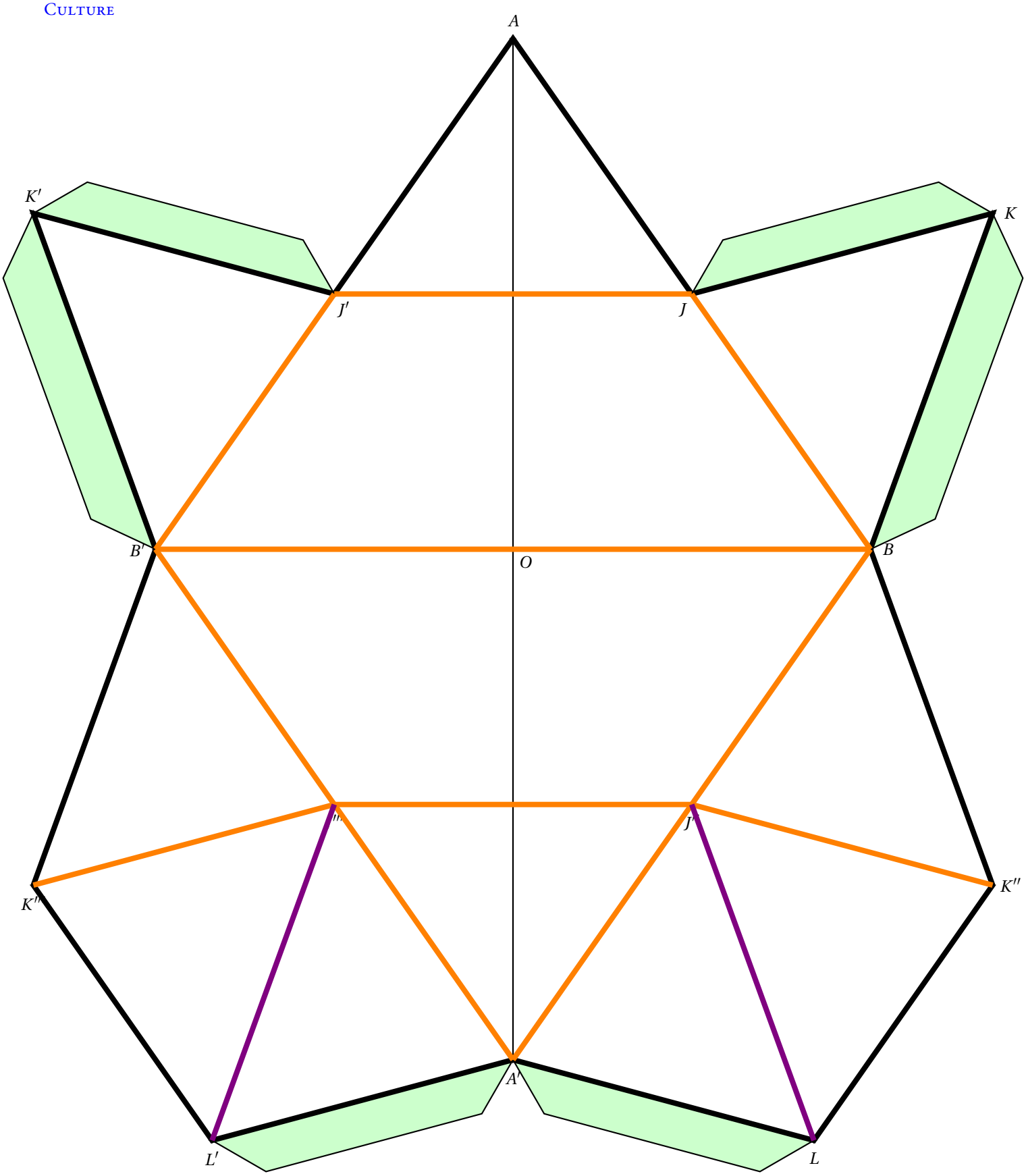


M. C. Escher - Stars - 1948 - Gravure sur bois



Culture

Le polyèdre d'Escher — Correction



Ce polyèdre comprend 12 faces, 9 sommets et 19 arêtes. On a bien l'égalité d'Euler : $12 + 9 - 19 = 2$.

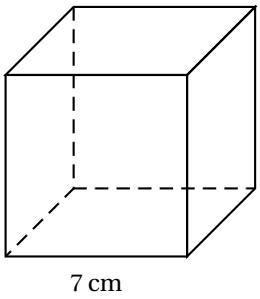
Évaluation

Sixième

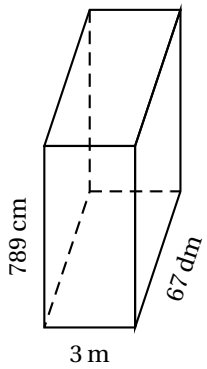
Exercice n° 1 : Volume du cube et du pavé

(7 points)

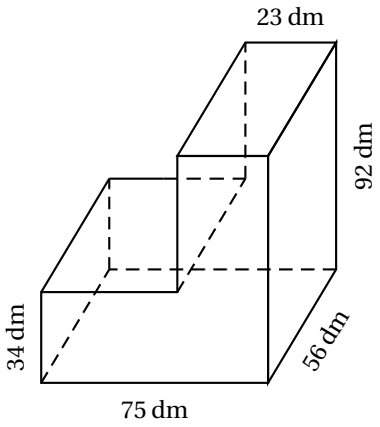
1. Calculer le volume de ce cube en cm^3.



2. Calculer le volume de ce pavé droit en m^3.



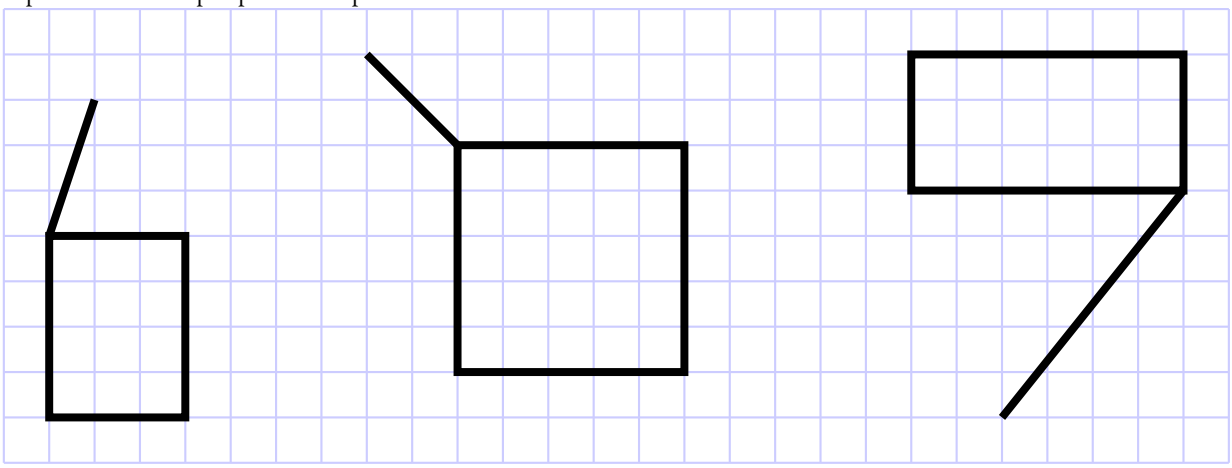
3. Calculer le volume de ce solide en litres.



Exercice n° 2 : Perspective cavalière

(6 points)

Compléter les représentations en perspective des pavés droits suivants :

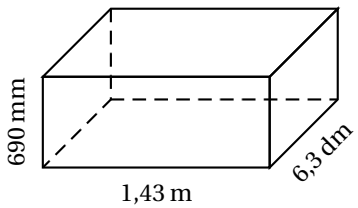


Exercice n° 3 : Une dernière histoire d'aquarium

(7 points)

Seo-yeon vient d'acheter un aquarium en forme de pavé droit. Vide, sa masse est de 37 kg.
Elle a fait un schéma ci-contre avec les mesures.

Elle hésite à utiliser de l'eau du robinet ou de l'eau en bouteille pour le remplir. Elle sait que ses poissons des Mikrogeophagus ramirezi sont fragiles, ils demandent beaucoup de soin. D'autre part, elle s'inquiète du meuble en chêne hérité de son grand-père maternel, va-t-il résister ?



1. Le vendeur lui a conseillé un minumum de 50 L par poissons. Combien peut-elle en placer dans cet aquarium ?

2. Le meuble en chêne sur lequel elle veut poser son aquarium peut supporter 650 kg.
Sachant qu'un litre d'eau à température ambiante pèse environ 1 kg, peut-elle poser cet aquarium sur le meuble ?

3. Les bouteilles d'eau minérale les moins chères qu'elle a trouvées coûtent 0,28 € pour 1,5 L.
Combien de bouteilles doit-elle acheter et combien cela va lui coûter ?

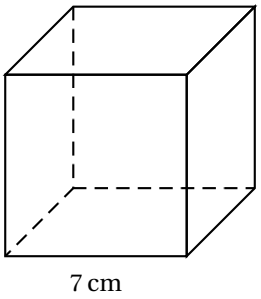
4. En consultant sa facture d'eau courante, elle constate que l'eau du robinet coûte 4,17 € le m^3.
Combien va lui coûter un remplissage avec de l'eau du robinet ?

Évaluation — Correction

Exercice n° 1

Correction

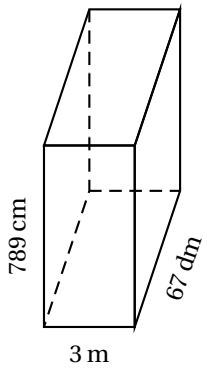
1. Calculer le volume de ce cube en cm^3.



$V = 7\,\text{cm} \times 7\,\text{cm} \times \times 7\,\text{cm}$

$\boxed{V = 343\,\text{cm}^3}$

2. Calculer le volume de ce pavé droit en m^3.

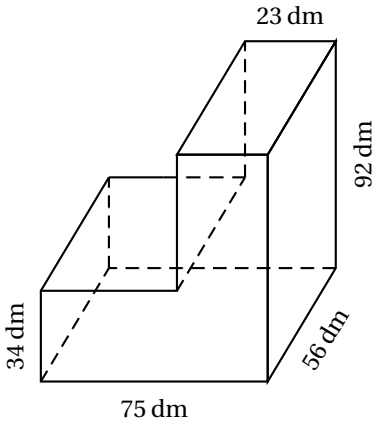


$V = 3\,\text{m} \times 67\,\text{dm} \times \times 789\,\text{cm}$

$V = 3\,\text{m} \times 6{,}7\,\text{m} \times \times 7{,}89\,\text{m}$

$\boxed{V = 158{,}589\,\text{m}^3}$

3. Calculer le volume de ce solide en litres.



$V_1 = 75\,\text{dm} \times 34\,\text{dm} \times 56\,\text{dm}$

$V_1 = 142\,800\,\text{dm}^3$

$V_2 = 23\,\text{dm} \times 58\,\text{dm} \times 56\,\text{dm}$

$V_2 = 74\,704\,\text{dm}^3$

$V = V_1 + V_2$

$V = 142\,800\,\text{dm}^3 + 74\,704\,\text{dm}^3$

$\boxed{V = 217\,504\,\text{dm}^3}$

$V_3 = 52\,\text{dm} \times 34\,\text{dm} \times 56\,\text{dm}$

$V_3 = 99\,008\,\text{dm}^3$

$V_4 = 23\,\text{dm} \times 92\,\text{dm} \times 56\,\text{dm}$

$V_4 = 118\,496\,\text{dm}^3$

$V = V_3 + V_4$

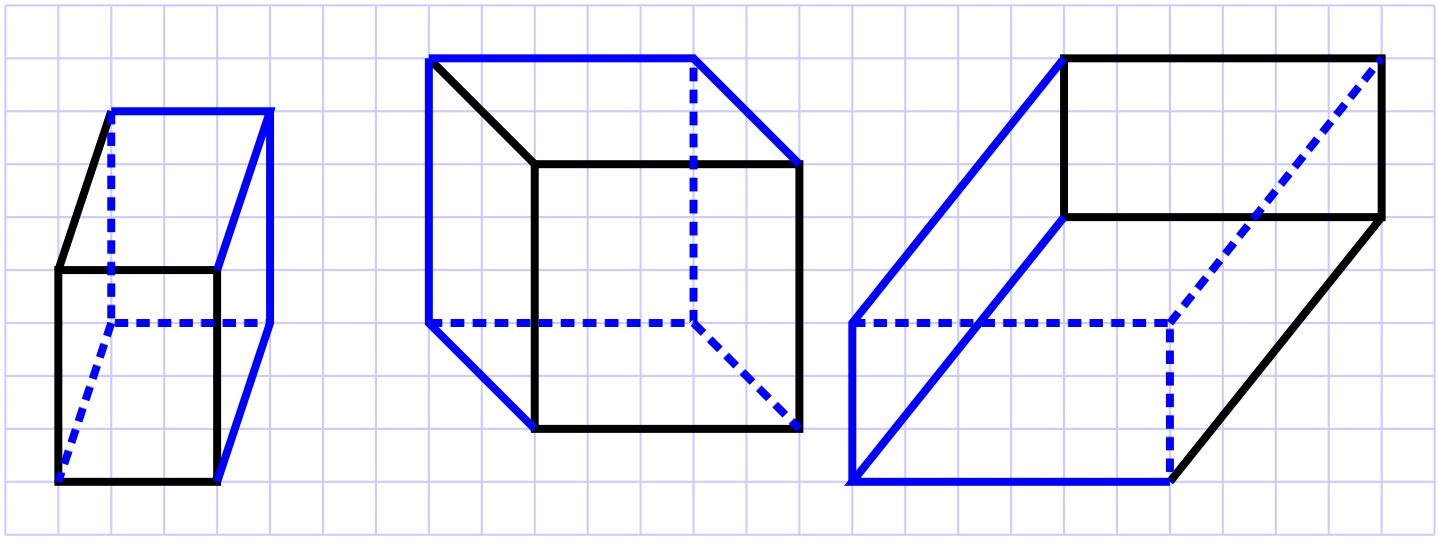
$V = 142\,800\,\text{dm}^3 + 74\,704\,\text{dm}^3$

$\boxed{V = 217\,504\,\text{dm}^3}$

Exercice n° 2

Correction

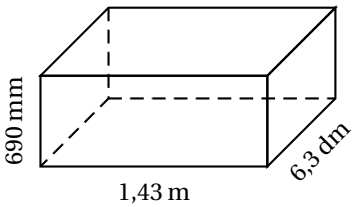
Compléter les représentations en perspective des pavés droits suivants :



Exercice n° 3

Correction

Seo-yeon vient d'acheter un aquarium en forme de pavé droit. Vide, sa masses est de 37 kg.
Elle a fait un schéma ci-contre avec les mesures.



Elle hésite à utiliser de l'eau du robinet ou de l'eau en bouteille pour le remplir. Elle sait que ses poissons des Mikrogeophagus ramirezi sont fragiles, ils demandent beaucoup de soin. D'autre part, elle s'inquiète du meuble en chêne hérité de son grand-père maternel, va-t-il résister ?

1. Le vendeur lui a conseillé un minumum de 50 L par poissons. Combien peut-elle en placer dans cet aquarium ?

$V = 1{,}43\,\text{m} \times 6{,}3\,\text{dm} \times 690\,\text{mm}$

$V = 14{,}3\,\text{dm} \times 6{,}3\,\text{dm} \times 6{,}9\,\text{dm}$

Cet aquarium contient $621{,}621\,\text{dm}^3$ soit 621,621 L.

$621{,}621\,\text{L} \div 50\,\text{L} \approx 12{,}4$

Elle peut acheter au maximum 12 poissons.

2. Le meuble en chêne sur lequel elle veut poser son aquarium peut supporter 650 kg.
Sachant qu'un litre d'eau à température ambiante pèse environ 1 kg, peut-elle poser cet aquarium sur le meuble ?

Comme $621\,\text{kg} + 37\,\text{kg} = 658\,\text{kg}$.

La masse d'eau est d'environ 621 kg, si on ajoute la masse de l'aquarium, cela ne paraît pas raisonnable !

3. Les bouteilles d'eau minérale les moins chères qu'elle a trouvées coûtent 0,28 € pour 1,5 L.
Combien de bouteilles doit-elle acheter et combien cela va lui coûter ?

$621{,}621\,\text{L} \div 1{,}5\,\text{L} \approx 414{,}4$.

Il faut 415 bouteilles.

$415 \times 0{,}28\ € = 116{,}20\ €$.

Cela va coûter 116,20 € de remplir l'aquarium avec de l'eau minérale.

4. En consultant sa facture d'eau courante, elle constate que l'eau du robinet coûte 4,17 € le m^3.
Combien va lui coûter un remplissage avec de l'eau du robinet ?

On sait que $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{L}$.

Comme $4{,}17\ € \div 1000 = 0{,}00417\ €$, remplir l'aquarium coûte $621{,}621 \times 0{,}00417\ € \approx 2{,}59\ €$.

Chapitre XI

De nouveaux nombres : les fractions

Sommaire

Activité — Situation initiale : Des multiplications impossibles 475

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 12 novembre 2026 à 20:45

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.2141
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Resolute Raccoon (Le Raton Laveur résolu) 26.04 avec la distribution TeX Live 2025.20260124 et LuaTex 1.22.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Licence CC BY-NC-SA 4.0



Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.
Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.
Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.
Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 12 novembre 2026 à 20:45.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college