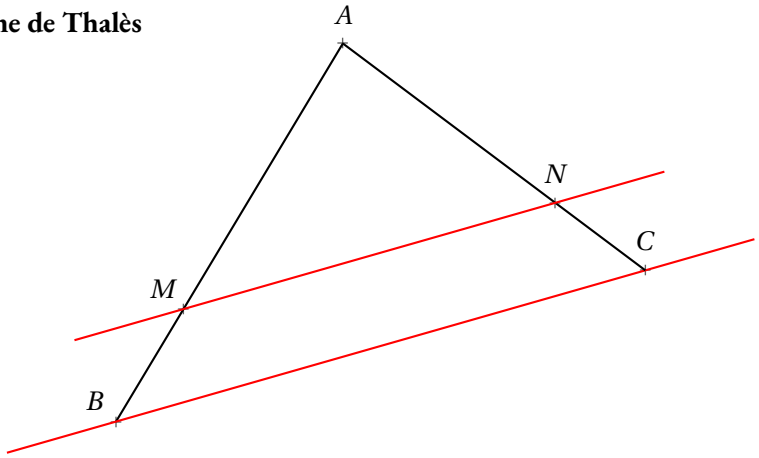
La leçon — Version prof

I — Le théorème de Thalès – Version triangle

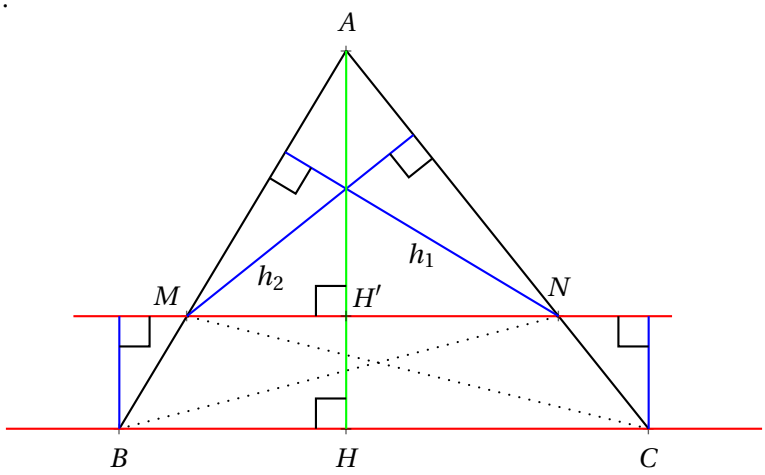
Théorème 3.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration :
Voici un première démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment $[MN]$. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$Aire(MNB) = Aire(MNC)$

$Aire(AMN) = AM \times h_1$ et $Aire(ABN) = AB \times h_1$ ainsi $\frac{Aire(AMN)}{Aire(ABN)} = \frac{AM}{AB}$

$Aire(AMN) = AN \times h_2$ et $Aire(ACM) = AC \times h_2$ ainsi $\dfrac{Aire(AMN)}{Aire(ACM)} = \dfrac{AN}{AC}$

On constate que $Aire(ABN) = Aire(AMN) + Aire(MNB)$ et que $Aire(ACM) = Aire(AMN) + \mathscr{A}\rangle\nabla](MNC)$
Comme $Aire(MNB) = Aire(MNC)$ on prouve ainsi que $Aire(ABN) = Aire(ACM)$

Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur $[AH]$ du triangle ABC.
On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$
De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles $NH'C$ et $NH'H$ ont la même base et la même hauteur donc $Aire(NH'C) = Aire(NH'H)$
Ainsi $Aire(AH'C) = Aire(AHN)$ c'est-à-dire $\dfrac{AH' \times HC}{2} = \dfrac{AH \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$

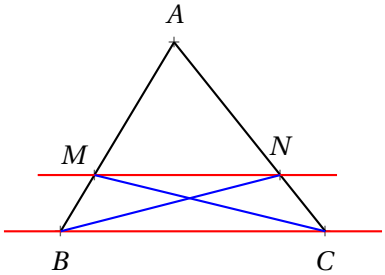
$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$

$$MN \times HC = H'N \times BC$$

En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC} = \dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

Une deuxième version qui utilise les céviennes comme dans les exercices 3.1 à 3.7 :



Dans le triangle ABC, $[MC]$ est une cévienne.
Les triangles ABC et AMC ont la même hauteur dont on peut noter h la mesure.

Ainsi $Aire(AMC) = \dfrac{1}{2} \times AM \times h$ et $Aire(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times h$.

On en déduit que $\dfrac{Aire(AMC)}{Aire(ABC)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AM \times h}{\frac{1}{2} \times AB \times h} = \dfrac{AM}{AB}$

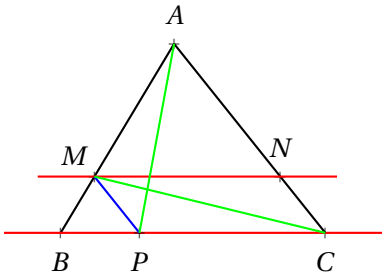
De même dans le triangle ABC, $[NB]$ est une cévienne.

On en déduit que $\dfrac{Aire(ANB)}{Aire(ABC)} = \dfrac{AN}{AC}$

On constate aussi que $Aire(AMC) = Aire(AMN) + Aire(MNB)$ et que $Aire(ANB) = Aire(AMN) + Aire(MNC)$.

Comme les droites (MN) et (BC) sont paralllèles, les triangles MNB et MNC ont la même hauteur et la même base. Leurs aires sont donc égales.

On en déduit que $Aire(AMC) = Aire(ANB)$ et finalement que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.



On trace la parallèle à (AC) passant par M, elle coupe $[BC]$ en P.

Les triangles AMC et APC ont la même base et la même hauteur puisque les droites (AC) et (MP) sont parallèles. Ces deux triangles ont donc la même aire.

Dans le triangle ABC, $[MC]$ est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(AMC)}{Aire(ABC)} = \dfrac{AM}{AB}$.

Dans le triangle ABC, $[PA]$ est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(APC)}{Aire(ABC)} = \dfrac{PC}{BC}$.

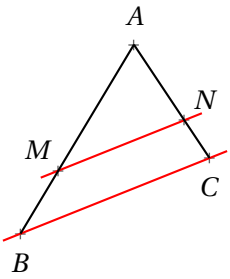
Le quadrilatère $MNPC$ a ses côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallèlogramme.
Ainsi $MN = PC$.

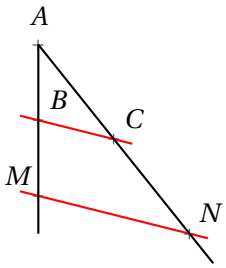
On arrive ainsi à $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{PC}{BC} = \dfrac{MN}{PC}$.

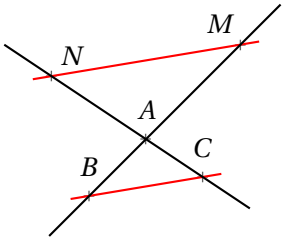
Finalement, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

II — Le théorème de Thalès – Version générale

Théorème 3.1 : Théorème de Thalès







Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et $(MN)//(BC)$
alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

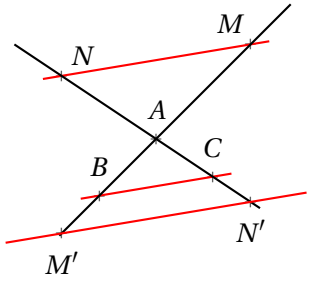
Démonstration :

Il y a trois possibilités liées à l'ordre des points :

Premier cas : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$
Il s'agit de la situation étudiée en première partie, on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Second cas : $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$
Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AMN. Comme $(BC)//(MN)$ on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$
Comme ces trois quotients sont égaux, leurs inverses le sont aussi. D'où le résultat.

Troisième cas : $M \in (AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$
Considérons les symétriques M' et N' de M et N dans la symétrie de centre A.



$MNN'M'$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu par construction, il s'agit donc d'un parallélogramme.
Nous avons donc $MN = M'N'$ et $(MN)//(M'N')$.
Or $(MN)//(BC)$. On sait que si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Ainsi $(M'N')//(BC)$.
Comme dorénavant $M' \in [AB)$ et $N' \in [AC)$ on peut appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$
Et comme $M'N' = MN$, $AM' = AM$ et $AN' = AN$ on obtient le résultat attendu.

CQFD

III — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

IV — Application aux triangles semblables

Définition 3.1 :

Triangles semblables

On dit que deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels.

Propriété 3.1 : Agrandissement ou réduction *(Admise)*

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe un nombre positif non nul k tel que $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$

k est un coefficient d'agrandissement/réduction.
Si $0 < k < 1$ alors $A'B'C'$ est une réduction du triangle ABC.
Si $k > 1$ alors $A'B'C'$ est un agrandissement du triangle ABC.
Si $k = 1$ alors ABC et $A'B'C'$ sont des triangles égaux.

Démonstration :

À rédiger !

CQFD

Propriété 3.2 : Triangles semblables et angles *(Admise)*

Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles égaux.

Démonstration :

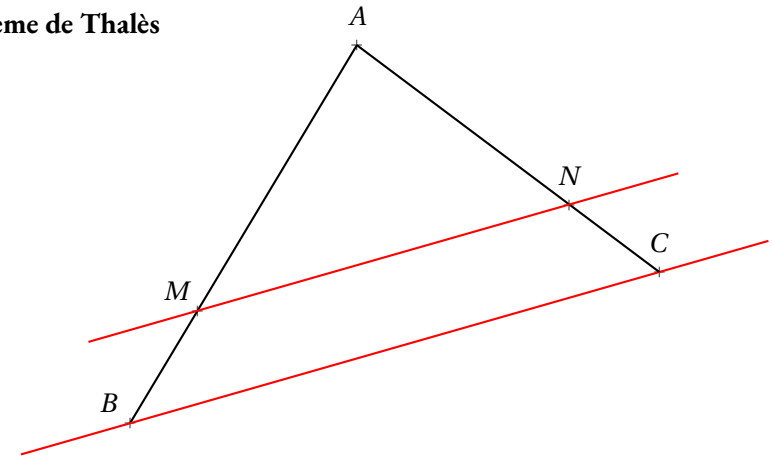
À rédiger !

CQFD

La leçon — Version élève

I — Le théorème de Thalès – Version triangle

Théorème 3.2 : Théorème de Thalès

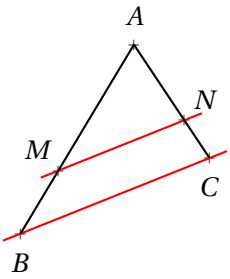


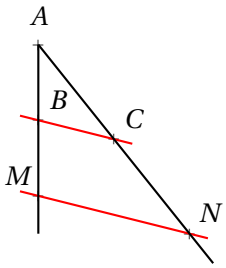
Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

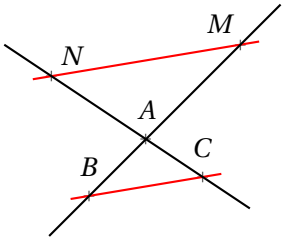
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

II — Le théorème de Thalès – Version générale

Théorème 3.2 : Théorème de Thalès







Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et $(MN)//(BC)$
alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

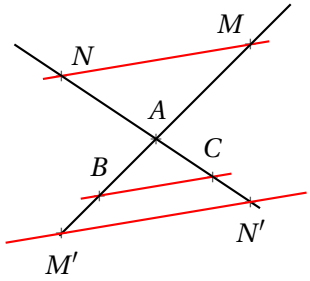
Démonstration :

Il y a trois possibilités liées à l'ordre des points :

Premier cas : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$
Il s'agit de la situation étudiée en première partie, on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Second cas : $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$
Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AMN. Comme $(BC)//(MN)$ on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$
Comme ces trois quotients sont égaux, leurs inverses le sont aussi. D'où le résultat.

Troisième cas : $M \in (AB)$ et $N \in [AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$
Considérons les symétriques M' et N' de M et N dans la symétrie de centre A.



$MNN'M'$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu par construction, il s'agit donc d'un parallélogramme.
Nous avons donc $MN = M'N'$ et $(MN)//(M'N')$.
Or $(MN)//(BC)$. On sait que si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Ainsi $(M'N')//(BC)$.
Comme dorénavant $M' \in [AB)$ et $N' \in [AC)$ on peut appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$
Et comme $M'N' = MN$, $AM' = AM$ et $AN' = AN$ on obtient le résultat attendu.

CQFD

III — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

IV — Application aux triangles semblables

Définition 3.2 :

Triangles semblables

On dit que deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels.

Propriété 3.3 : Agrandissement ou réduction *(Admise)*

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe un nombre positif non nul k tel que $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$

k est un coefficient d'agrandissement/réduction.
Si $0 < k < 1$ alors $A'B'C'$ est une réduction du triangle ABC.
Si $k > 1$ alors $A'B'C'$ est un agrandissement du triangle ABC.
Si $k = 1$ alors ABC et $A'B'C'$ sont des triangles égaux.

Démonstration :

À rédiger !

CQFD

Propriété 3.4 : Triangles semblables et angles *(Admise)*

Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles égaux.

Démonstration :

À rédiger !

CQFD

Informations légales

— **Auteur :** Fabrice ARNAUD
— **Web :** pi.ac3j.fr
— **Mail :** contact@ac3j.fr
— **Dernière modification :** 12 novembre 2026 à 20:43

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.2141
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Resolute Raccoon (Le Raton Laveur résolu) 26.04 avec la distribution TeX Live 2025.20260124 et LuaTex 1.22.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Licence CC BY-NC-SA 4.0



Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.
Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.
Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.
Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 12 novembre 2026 à 20:43.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : **https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college**