La leçon — Version prof

I — Définition du quotient

Définition 3.1 : Définition de la fraction quotient

a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$

La **fraction** $\frac{a}{b}$ désigne le quotient $a \div b$ de a par b, c'est-à-dire un nombre vérifiant :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

- a est le **numérateur** de la fraction ;
- b est le **dénominateur** de la fraction ;
- *a et b sont séparés par **la barre de fraction** ou vinculum.*

Remarque : la division par 0 n'est pas une opération autorisée !

Pour quel raison le nombre entier b doit être non nul ?

Si on veut déterminer, pour un entier a fixé, le nombre manquant dans l'égalité $0 \times ? = a$, on arrive à une difficulté majeure.
Pour tous les nombres x, le produit $0 \times x = 0$. Par conséquent, si a est non nul, il n'existe aucun nombre vérifiant $0 \times ? = a$.
Le seul cas restant est celui où a vaut zéro. Mais dans cette situation, tous les nombres x répondent au problème puisque $0 \times x = 0$.
Finalement, si $b = 0$, alors soit a est non nul et aucun nombre ne convient. Soit $a = 0$ et tous les nombres conviennent. Dans les deux cas, on ne peut pas définir un nombre qui répond à la question. Le dénominateur d'une fraction ne peut pas être nul !

On peut aussi se demander pour quelle raison le quotient de, par exemple 20 par 0 n'existe pas.
On sait que $56 \div 8 = 7$ car $7 \times 8 = 56$.
Ainsi le nombre x qui serait le quotient de 20 par 0 vérifierait $0 \times x = 20$. Or pour tous les nombres x, $0 \times x = 0$. Donc le nombre x cherché n'existe pas !

Enfin, on peut raisonner avec la notion de partage, comme à l'école primaire.
Diviser 20 par 2, revient à partager 20 objets en 2 paquets, soit 2 paquets de 10.
Diviser 20 par 1, revient à partager 20 objets en 1 paquet de 20 objets.
Diviser 20 par 0, revient à partager 20 objets en 0 paquet. Or il forme au minimum 1 paquet de 20, d'où l'impossibilité :

Exemples :

$5 \times \frac{15}{5} = 15$ ainsi $\frac{15}{5} = 3$: une fraction peut correspondre à un **nombre entier** .

Réciproquement, comme $3 = 3 \div 1 = \frac{3}{1}$, tout nombre entier a peut s'écrire sous la forme d'une fraction $a = \frac{a}{1}$.
De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$.

$4 \times \frac{7}{4} = 7$ et $7 \div 4 = 1,75$ donc la fraction $\frac{7}{4}$ correspond à **un nombre décimal** .
Réciproquement, le nombre décimal $3,141\,592 = \frac{3\,141\,592}{1\,000\,000}$, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

$3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $4 \div 3 \approx 1,333$, $\frac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal, c'est **un nombre rationnel** .
Certains nombres ne sont pas rationnels comme par $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

II — Égalité de fractions : le produit en croix

Propriété 3.1 : Égalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ [24]

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times b}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre non nul on obtient une fraction égale.

Démonstration :

Sur un exemple générique :
Considérons la fraction $\frac{5}{3}$. Elle a pour propriété fondamentale de vérifier $3 \times \frac{5}{3} = 5$.

Choisissons un nombre entier quelconque, par exemple 9. On peut multiplier l'égalité précédente par 9 :

$$9 \times 3 \times \frac{5}{3} = 9 \times 5$$

$$27 \times \frac{5}{3} = 45$$

On sait également que par définition la fraction $\frac{45}{27}$ vérifie $27 \times \frac{45}{27} = 45$.

Par conséquent, $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$ c'est-à-dire $\frac{5}{3} = \frac{9 \times 5}{9 \times 3} = \frac{45}{27}$. [25]

De manière générale :

Pour a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$ on a $b \times \frac{a}{b} = a$
k un nombre entier relatif non nul, on peut multiplier l'égalité précédente par k :

$$k \times b \times \frac{a}{b} = a \times k$$

$$b \times k \times \frac{a}{b} = a \times k$$

Or par définition du quotient : $b \times k \times \frac{a \times b}{b \times k} = a \times k$

Finalement en observant ces deux égalités on constate que $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

CQFD

Exemples :
Cette propriété permet de simplifier les fractions :
$A = \frac{56}{64} = \frac{8 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7}{8}$
Il y a souvent plusieurs manières de simplifier une fraction :
$A = \frac{56}{64} = \frac{2 \times 28}{2 \times 32} = \frac{28}{32} = \frac{2 \times 14}{2 \times 16} = \frac{14}{16} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} = \frac{7}{8}$

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales entre elles :

Remarque :
La connaissance des critères de divisibilité est souvent utile pour simplifier des fractions.

— un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
— un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
— un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par le chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4 ;
— un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
— un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3 ;
— un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
— un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemple :
Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales à un dénominateur fixé à l'avance :

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9} = \frac{7\times 2}{7\times 3} = \frac{14}{21} = \frac{12\times 2}{12\times 3} = \frac{24}{36} = \frac{9\times 2}{9\times 3} = \frac{18}{27} = \dots$$

Propriété 3.2 : Le produit en croix

Dire que deux fractions sont égales revient exactement à dire que leurs produits en croix sont égaux.

Plus précisément,

a, b, c et d quatre nombres entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a \times d = b \times c$.

III — Somme algébrique de fractions

Propriété 3.3 : Somme de fractions

a, b et c des nombres entiers rationnels avec bă $\neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique :

Calculons la somme $\frac{7}{9} + \frac{13}{9}$.

On sait que $9 \times \frac{7}{9} = 7$ et que $9 \times \frac{13}{9} = 13$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$9\times\frac{7}{9} + 9\times\frac{13}{9} = 7 + 13$$

On factorise le facteur commun 9 :

$$9\times\left(\frac{7}{9} + \frac{13}{9}\right) = 20$$

D'autre part on sait que :

$$9 \times \frac{20}{9} = 20$$

On en déduit que :

$$\frac{7}{9} + \frac{13}{9} = \frac{20}{9}$$

Dans un cas plus général, a, b et c des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$.

On souhaite calculer la somme $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$.

On sait que $b \times \frac{a}{b} = a$ et que $b \times \frac{c}{b} = c$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$b \times \frac{a}{b} + b \times \frac{c}{b} = a + b$$

On factorise le facteur commun b :

$$b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) = a + c$$

D'autre part on sait que :

$$b \times \frac{a+c}{b} = a + c$$

On en déduit que :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

CQFD

Remarque :
Les nombres entiers a et c sont relatifs. Cette propriété concerne donc la somme algébrique de fractions, c'est-à-dire l'addition et la soustraction ordinaire.

Ainsi $\frac{5}{3} + \frac{-4}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5+(-4)}{3} = \frac{1}{3}$

On a vu quand on a étudié le quotient des nombres relatifs que $\frac{4}{3} = \frac{-4}{-3}$ et que $\frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

On privilégiera les nombres entiers positifs au numérateur et au dénominateur des fractions !

Exemples :
$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{6}{7} - \frac{11}{7} = -\frac{5}{7}$

Remarque importante :
On ne sait faire la somme algébrique que de fractions ayant le même dénominateur. Pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents il faut donc les modifier pour qu'elles puissent correspondre à la propriété !

Méthode 3 . 1 : Somme algébrique des fractions
Premier cas : les fractions ont le même dénominateur.

Il suffit d'appliquer la propriété précédente.

$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{16}{5} = \frac{3+7-16}{5} = -\frac{-6}{5}$

Deuxième cas : une des fractions a un dénominateur multiple de l'autre.

Le dénominateur multiple de l'autre est un dénominateur commun.

$\frac{5}{7}+\frac{10}{21}$, $21 = 7 \times 3$ est un multiple de 7.

$$\frac{5}{7}+\frac{10}{21}=\frac{5\times 3}{7\times 3}+\frac{10}{21}=\frac{15}{21}+\frac{10}{21}=\frac{35}{21}$$

Il est souvent nécessaire de simplifier le résultat : $\frac{35}{21}=\frac{7\times 5}{7\times 3}=\frac{5}{3}$

Cas particulier : en présence d'unités !

$5+\frac{7}{9}=\frac{5}{1}+\frac{7}{9}$, tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 1.

$$\frac{5\times 9}{1\times 9}+\frac{7}{9}=\frac{45}{9}+\frac{7}{9}=\frac{52}{9}$$

Troisième cas : les deux dénominateurs n'ont rien en commun !

Le produit de ces dénominateurs est un dénominateur commun.

$\frac{7}{8}+\frac{6}{5}$, le produit $8 \times 5 = 40$ est un multiple commun à 8 et 5.

$$\frac{7\times 5}{8\times 5}+\frac{6\times 8}{5\times 8}=\frac{35}{40}+\frac{48}{40}=\frac{73}{40}$$

Attention, le produit de deux dénominateurs n'est pas toujours le plus petit dénominateur commun !

$\frac{7}{12}-\frac{4}{15}$, $12 \times 15 = 180$ est un dénominateur commun possible... mais il y a mieux !

On peut lister les multiples de 12 : 12 – 24 – 36 – 48 – 60 – 72... et ceux de 15 : 15 – 30 – 45 – 60...
60 est un dénominateur commun plus petit !

$$\frac{7}{12}-\frac{4}{15}=\frac{7\times 5}{12\times 5}-\frac{4\times 4}{15\times 4}=\frac{35}{60}-\frac{16}{60}=\frac{19}{60}$$

IV — Produit des fractions

Propriété 3.4 : Produit de deux fractions

a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique :

Calculons $\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}$

On sait que $3\times\frac{5}{3}=5$ et que $7\times\frac{4}{7}=4$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$3 \times \frac{5}{3} \times 7 \times \frac{4}{7} = 5 \times 4$$

$$3 \times 7 \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = 20$$

$$21 \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = 20$$

De plus on sait que :

$$21 \times \frac{20}{21} = 20$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7}$

De manière générale, a, b, c et d des entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Calculons $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

On sait que $b \times \frac{a}{b} = a$ et que $d \times \frac{c}{d} = c$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$b \times \frac{a}{b} \times d \times \frac{c}{d} = a \times c$$

$$b \times d \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \times c$$

De plus on sait que :

$$b \times d \times \frac{a \times c}{b \times d} = a \times c$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

CQFD

Exemples :

$\frac{5}{3} \times \frac{7}{13} = \frac{5 \times 7}{3 \times 13} = \frac{35}{39}$

Il est souvent conseillé de simplifier un produit avant de l'effectuer :

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{560}{360}$: mais il faut alors simplifier !

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{16 \times 35}{15 \times 24} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{2 \times 7}{3 \times 3} = \frac{14}{9}$

De manière encore plus caricaturale ....

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{5184}{3528}$: oups !

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{64 \times 81}{63 \times 56} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 7} = \frac{72}{49}$

V — Quotient des fractions

Définition 3.1 : Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

Exemples :
$0,5 \times 2 = 1$: 0,5 et 2 sont inverses l'un de l'autre.
On dit que 2 est l'inverse de 0,5 ou que 0,5 est l'inverse de 2.

$0,2 \times 5 = 1$: 0,2 et 5 sont inverses l'un de l'autre.

$1 \times 1 = 1$: 1 est son propre inverse, $-1) \times (-1) = 1$, -1 aussi.

Remarque :
Pour tout nombre k on sait que $0 \times k = 0$.
Le nombre 0 ne possède pas d'inverse.

Propriété 3.5 : Inverse d'un nombre entier relatif

a un entier relatif, $a \neq 0$.

$\frac{1}{a}$ est l'inverse de a.

Démonstration :

C'est la définition de la fraction quotient : $a \times \frac{1}{a} = 1$!

Sur un exemple générique on a : $3 \times \frac{1}{3} = 1$

CQFD

Exemples :
$\frac{1}{2} = 0,5$ est l'inverse de 2.

$\frac{1}{5} = 0,2$ est l'inverse de 5.

Propriété 3.6 : Inverse d'un nombre rationnel

a et b deux nombres entiers relatifs et $a \neq 0$, $b \neq 0$

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

Démonstration :

Sur un exemple générique, il est évident de voir que $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{5 \times 4}{4 \times 5} = \frac{20}{20} = 1$

Plus généralement on a $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$

Propriété 3.7 : Diviser deux fractions

Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse.

Plus précisément, a, b, c et d des nombres relatifs tous non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un entier positif,

Le quotient $5 \div 3$ correspond à la fraction $\frac{5}{3}$.

Or on sait que $5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Finalement $5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$.

De manière générale a et b deux entiers positifs non nuls,

On a $a \div b = \frac{a}{b}$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un nombre rationnel,

On veut calculer $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{7}{4} \times Q = \frac{5}{3}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{4}{7}$ inverse de $\frac{7}{4}$. On obtient :

$$\frac{7}{4} \times Q \times \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{7}{4} \times \frac{4}{7} \times Q = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$1 \times Q = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$

De manière plus générale,

On veut calculer $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{c}{d} \times Q = \frac{a}{b}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{d}{c}$ inverse de $\frac{c}{d}$. On obtient :

$$\frac{c}{d} \times Q \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$1 \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

CQFD

Exemple :
$\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$

La leçon — Version élève

I — Définition du quotient

Définition 3.2 : Définition de la fraction quotient

a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$

La **fraction** $\frac{a}{b}$ désigne le quotient $a \div b$ de a par b, c'est-à-dire un nombre vérifiant :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

- a est le **numérateur** de la fraction ;
- b est le **dénominateur** de la fraction ;

Remarque : la division par 0 n'est pas une opération autorisée !

Exemples :

$5 \times \frac{15}{5} = 15$ ainsi $\frac{15}{5} = 3$: une fraction peut correspondre à un **nombre entier** .

Réciproquement, comme $3 = 3 \div 1 = \frac{3}{1}$, tout nombre entier a peut s'écrire sous la forme d'une fraction $a = \frac{a}{1}$.
De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$.

$4 \times \frac{7}{4} = 7$ et $7 \div 4 = 1,75$ donc la fraction $\frac{7}{4}$ correspond à **un nombre décimal** .
Réciproquement, le nombre décimal $3,141\,592 = \frac{3\,141\,592}{1\,000\,000}$, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

$3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $4 \div 3 \approx 1,333$, $\frac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal, c'est **un nombre rationnel** .

II — Égalité de fractions : le produit en croix

Propriété 3.8 : Égalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ [26]

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times b}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre non nul on obtient une fraction égale.

Démonstration :

Sur un exemple générique :
Considérons la fraction $\frac{5}{3}$. Elle a pour propriété fondamentale de vérifier $3 \times \frac{5}{3} = 5$.

Choisissons un nombre entier quelconque, par exemple 9. On peut multiplier l'égalité précédente par 9 :

$$9 \times 3 \times \frac{5}{3} = 9 \times 5$$

$$27 \times \frac{5}{3} = 45$$

On sait également que par définition la fraction $\frac{45}{27}$ vérifie $27 \times \frac{45}{27} = 45$.

Par conséquent, $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$ c'est-à-dire $\frac{5}{3} = \frac{9 \times 5}{9 \times 3} = \frac{45}{27}$.[27]

De manière générale :

Pour a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$ on a $b \times \frac{a}{b} = a$
k un nombre entier relatif non nul, on peut multiplier l'égalité précédente par k :

$$k \times b \times \frac{a}{b} = a \times k$$

$$b \times k \times \frac{a}{b} = a \times k$$

Or par définition du quotient : $b \times k \times \frac{a \times b}{b \times k} = a \times k$

Finalement en observant ces deux égalités on constate que $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

CQFD

Exemples :
Cette propriété permet de simplifier les fractions :
$A = \frac{56}{64} = \frac{8 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7}{8}$
Il y a souvent plusieurs manières de simplifier une fraction :
$A = \frac{56}{64} = \frac{2 \times 28}{2 \times 32} = \frac{28}{32} = \frac{2 \times 14}{2 \times 16} = \frac{14}{16} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} = \frac{7}{8}$

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales entre elles :

Remarque :
La connaissance des critères de divisibilité est souvent utile pour simplifier des fractions.

- un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par le chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4 ;
- un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3 ;
- un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemple :
Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales à un dénominateur fixé à l'avance :

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 3}{3\times 3}=\frac{6}{9}=\frac{7\times 2}{7\times 3}=\frac{14}{21}=\frac{12\times 2}{12\times 3}=\frac{24}{36}=\frac{9\times 2}{9\times 3}=\frac{18}{27}=\dots$$

Propriété 3.9 : Le produit en croix

Dire que deux fractions sont égales revient exactement à dire que leurs produits en croix sont égaux.

Plus précisément,

a, b, c et d quatre nombres entiers avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a\times d=b\times c$.

III — Somme algébrique de fractions

Propriété 3.10 : Somme de fractions

a, b et c des nombres entiers rationnels avec bă $\neq 0$.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique :

Calculons la somme $\frac{7}{9}+\frac{13}{9}$.

On sait que $9\times\frac{7}{9}=7$ et que $9\times\frac{13}{9}=13$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$9\times\frac{7}{9}+9\times\frac{13}{9}=7+13$$

On factorise le facteur commun 9 :

$$9\times\left(\frac{7}{9}+\frac{13}{9}\right)=20$$

D'autre part on sait que :

$$9\times\frac{20}{9}=20$$

On en déduit que :

$$\frac{7}{9}+\frac{13}{9}=\frac{20}{9}$$

Dans un cas plus général, a, b et c des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$.

On souhaite calculer la somme $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$.

On sait que $b \times \frac{a}{b} = a$ et que $b \times \frac{c}{b} = c$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$b \times \frac{a}{b} + b \times \frac{c}{b} = a + b$$

On factorise le facteur commun b :

$$b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) = a + c$$

D'autre part on sait que :

$$b \times \frac{a+c}{b} = a + c$$

On en déduit que :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

CQFD

Remarque :
Les nombres entiers a et c sont relatifs. Cette propriété concerne donc la somme algébrique de fractions, c'est-à-dire l'addition et la soustraction ordinaire.

Ainsi $\frac{5}{3} + \frac{-4}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5+(-4)}{3} = \frac{1}{3}$

On a vu quand on a étudié le quotient des nombres relatifs que $\frac{4}{3} = \frac{-4}{-3}$ et que $\frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

On privilégiera les nombres entiers positifs au numérateur et au dénominateur des fractions !

Exemples :
$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{6}{7} - \frac{11}{7} = -\frac{5}{7}$

Remarque importante :
On ne sait faire la somme algébrique que de fractions ayant le même dénominateur. Pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents il faut donc les modifier pour qu'elles puissent correspondre à la propriété !

Méthode 3 . 2 : Somme algébrique des fractions
Premier cas : les fractions ont le même dénominateur.

Il suffit d'appliquer la propriété précédente.

$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{16}{5} = \frac{3+7-16}{5} = -\frac{-6}{5}$

Deuxième cas : une des fractions a un dénominateur multiple de l'autre.

Le dénominateur multiple de l'autre est un dénominateur commun.

$\frac{5}{7} + \frac{10}{21}$, $21 = 7 \times 3$ est un multiple de 7.

$\frac{5}{7} + \frac{10}{21} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} + \frac{10}{21} = \frac{15}{21} + \frac{10}{21} = \frac{35}{21}$

Il est souvent nécessaire de simplifier le résultat : $\frac{35}{21} = \frac{7 \times 5}{7 \times 3} = \frac{5}{3}$

Cas particulier : en présence d'unités !

$5+\frac{7}{9}=\frac{5}{1}+\frac{7}{9}$, tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 1.

$\frac{5\times 9}{1\times 9}+\frac{7}{9}=\frac{45}{9}+\frac{7}{9}=\frac{52}{9}$

Troisième cas : les deux dénominateurs n'ont rien en commun !

Le produit de ces dénominateurs est un dénominateur commun.

$\frac{7}{8}+\frac{6}{5}$, le produit $8\times 5=40$ est un multiple commun à 8 et 5.

$\frac{7\times 5}{8\times 5}+\frac{6\times 8}{5\times 8}=\frac{35}{40}+\frac{48}{40}=\frac{73}{40}$

Attention, le produit de deux dénominateurs n'est pas toujours le plus petit dénominateur commun !

$\frac{7}{12}-\frac{4}{15}$, $12\times 15=180$ est un dénominateur commun possible... mais il y a mieux !

On peut lister les multiples de 12 : 12 – 24 – 36 – 48 – 60 – 72... et ceux de 15 : 15 – 30 – 45 – 60...
60 est un dénominateur commun plus petit !

$\frac{7}{12}-\frac{4}{15}=\frac{7\times 5}{12\times 5}-\frac{4\times 4}{15\times 4}=\frac{35}{60}-\frac{16}{60}=\frac{19}{60}$

IV — Produit des fractions

Propriété 3.11 : Produit de deux fractions

a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs, $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique :

Calculons $\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}$

On sait que $3\times\frac{5}{3}=5$ et que $7\times\frac{4}{7}=4$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$3\times\frac{5}{3}\times 7\times\frac{4}{7}=5\times 4$$

$$3\times 7\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}=20$$

$$21\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}=20$$

De plus on sait que :

$$21 \times \frac{20}{21} = 20$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7}$

De manière générale, a, b, c et d des entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Calculons $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

On sait que $b \times \frac{a}{b} = a$ et que $d \times \frac{c}{d} = c$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$b \times \frac{a}{b} \times d \times \frac{c}{d} = a \times c$$

$$b \times d \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \times c$$

De plus on sait que :

$$b \times d \times \frac{a \times c}{b \times d} = a \times c$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

CQFD

Exemples :
$\frac{5}{3} \times \frac{7}{13} = \frac{5 \times 7}{3 \times 13} = \frac{35}{39}$

Il est souvent conseillé de simplifier un produit avant de l'effectuer :

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{560}{360}$: mais il faut alors simplifier !

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{16 \times 35}{15 \times 24} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{2 \times 7}{3 \times 3} = \frac{14}{9}$

De manière encore plus caricaturale ....

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{5184}{3528}$: oups !

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{64 \times 81}{63 \times 56} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 7} = \frac{72}{49}$

V — Quotient des fractions

Définition 3.2 : Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

Exemples :
$0,5 \times 2 = 1$: $0,5$ et 2 sont inverses l'un de l'autre.
On dit que 2 est l'inverse de $0,5$ ou que $0,5$ est l'inverse de 2.

$0,2 \times 5 = 1$: $0,2$ et 5 sont inverses l'un de l'autre.

$1 \times 1 = 1$: 1 est son propre inverse, $-1) \times (-1) = 1$, -1 aussi.

Remarque :
Pour tout nombre k on sait que $0 \times k = 0$.
Le nombre 0 ne possède pas d'inverse.

Propriété 3.12 : Inverse d'un nombre entier relatif

a un entier relatif, $a \neq 0$.

$\frac{1}{a}$ est l'inverse de a.

Démonstration :

C'est la définition de la fraction quotient : $a \times \frac{1}{a} = 1$!

Sur un exemple générique on a : $3 \times \frac{1}{3} = 1$

CQFD

Exemples :
$\frac{1}{2} = 0,5$ est l'inverse de 2.

$\frac{1}{5} = 0,2$ est l'inverse de 5.

Propriété 3.13 : Inverse d'un nombre rationnel

a et b deux nombres entiers relatifs et $a \neq 0$, $b \neq 0$

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

Démonstration :

Sur un exemple générique, il est évident de voir que $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{5 \times 4}{4 \times 5} = \frac{20}{20} = 1$

Plus généralement on a $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$

CQFD

Propriété 3.14 : Diviser deux fractions

Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse.

Plus précisément, a, b, c et d des nombres relatifs tous non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un entier positif,

Le quotient $5 \div 3$ correspond à la fraction $\frac{5}{3}$.

Or on sait que $5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Finalement $5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$.

De manière générale a et b deux entiers positifs non nuls,

On a $a \div b = \frac{a}{b}$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un nombre rationnel,

On veut calculer $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{7}{4} \times Q = \frac{5}{3}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{4}{7}$ inverse de $\frac{7}{4}$. On obtient :

$$\frac{7}{4} \times Q \times \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{7}{4} \times \frac{4}{7} \times Q = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$1 \times Q = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$

De manière plus générale,

On veut calculer $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{c}{d} \times Q = \frac{a}{b}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{d}{c}$ inverse de $\frac{c}{d}$. On obtient :

$$\frac{c}{d} \times Q \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$1 \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

CQFD

Exemple :

$\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr
- **Dernière modification :** 12 novembre 2026 à 20:42

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur VIM - Vi Improved Vim 9.1.2141
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Resolute Raccoon (Le Raton Laveur résolu) 26.04 avec la distribution TeX Live 2025.20260124 et LuaTex 1.22.0

Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim.

J'aimerais beaucoup rendre disponibles mes sources en TeX. Dans un monde idéal, je le ferai immédiatement. J'ai plusieurs fois constaté que des pilleurs du Net me volent mes fichiers pdf, retirent cette dernière page de licence, pour les mettre en ligne et parfois même les rendre payants. N'ayant pas les moyens de mettre un cabinet d'avocats sur cette contravention à la licence CC BY-NC-SA 4.0, je fais le choix de ne pas rendre mes sources disponibles.
La plupart des pdf proposés sur ce blog ne contiennent aucun filigrane, je ne les signe pas. Cela permet aux collègues, aux parents, aux élèves, de disposer d'un document anonyme dont chacun peut disposer en respectant la licence qui est particulièrement souple pour les utilisateurs non commerciaux. Je me suis contenté d'ajouter mes références sur cette dernière page. Seules les corrections d'examens contiennent un filigrane vertical. J'ai en effet constaté que certains sites peu scrupuleux, vendaient mes corrections alors qu'elles sont disponibles librement et gratuitement sur mon site. Cette solution est insatisfaisante, je n'ai pas trouvé mieux !
Les QR codes présents sur certains documents pointent vers le fichier pdf lui-même et sa correction. Ce lien ne pointe ni vers une page de mon blog ni vers une quelconque publicité. Vous pouvez le laisser si vous souhaitez que vos élèves accèdent au document en ligne avec sa correction.
Si vous êtes un enseignant et que vous diffusez ce document dans le cadre strict de votre établissement scolaire, inutile de vous poser des questions sur la licence ci-dessous ! Dans la mesure où vous limitez cette diffusion à votre classe ou un environnement numérique de travail privé, n'hésitez pas à vous servir !

Licence CC BY-NC-SA 4.0



Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats
Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.

Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.

Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Comment créditer cette œuvre ?

Ce document, , a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 12 novembre 2026 à 20:42.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article :