II — Somme algébrique des nombres relatifs

1 Somme des nombres relatifs

4

PROPRIÉTÉ 1.2 : Somme des nombres relatifs

a et b deux nombres relatifs.

— Si a et b ont le même signe (positif ou négatif) alors la somme $a+b$ est du même signe et sa distance à zéro est égale à la somme des distances à zéro de a et b.

— Si a et b ont des signes différents alors la somme $a+b$ est du signe de celui des deux qui à la plus grande distance à zéro et la distance à zéro de cette somme est égale à la différence des deux distances à zéro.

DÉMONSTRATION :

Nous raisonnerons sur des exemples génériques :[5]

— $\mathrm{S} = (+5) + (+3)$

  $\mathrm{S} = 5+3 = 8$: il s'agit de l'addition habituelle sur les nombres décimaux positifs;

— $\mathrm{S} = (-5) + (-3)$

  $\mathrm{S} + (+5) + (+3) = \mathrm{S} + 8$ et $\mathrm{S} + (+5) + (+3) = (-5) + (-3) + (+5) + (+3) = 0$

  Ainsi $\mathrm{S} + 8 = 0$ ce qui signifie que S est l'opposé de 8;

  $\mathrm{S} = (-8)$

— $\mathrm{S} = (-5) + (+3)$

  $\mathrm{S} + (-3) = (-5) + (+3) + (-3) = (-5)$ donc $\mathrm{S} + (-3) = (-5)$

  S est le nombre qui ajouté à (-3) donne (-5) or on sait que $(-3) + (-2) = (-5)$

  $\mathrm{S} = (-2)$

— $\mathrm{S} = (+5) + (-3)$

  $\mathrm{S} + (-5) + (+3) = (+5) + (-3) + (-5) + (+3) = 0$ donc $(+5) + (-3)$ est l'opposé de $(-5) + (+3)$.

  $\mathrm{A} = (+2)$

CQFD

MÉTHODE 1 . 1 : Ajouter des nombres relatifs

Pour ajouter des nombres relatifs il est souvent pratique de commencer par ajouter ensemble les nombres de même signe puis d'effectuer à la fin la somme entre les deux nombres de signes différents.

$\mathrm{A} = (-3) + (+6) + (-2) + (+8) + (-4)$

$\mathrm{A} = \underbrace{(+8) + (+6)}_{(+14)} + \underbrace{(-3) + (-2) + (-4)}_{(-9)}$

$\mathrm{A} = (+14) + (-9)$

$\mathrm{A} = (+5)$

2 La soustraction — Somme algébrique

PROPRIÉTÉ 1.3 : Soustraction des nombres relatifs

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

DÉMONSTRATION :

Démontrons ce résultat sur un exemple générique : [6]
Calculons $D = (-7) - (5)$
On sait que D vérifie $D + (-5) = (-7)$ par définition de la soustraction, D est en effet la différence entre (-7) et (-5) c'est-à-dire le nombre qu'il faut ajouter à (-5) pour obtenir (-7).[7]
$D + (-5) = (-7)$ donc en ajoutant $(+5)$ dans chaque membre on obtient :

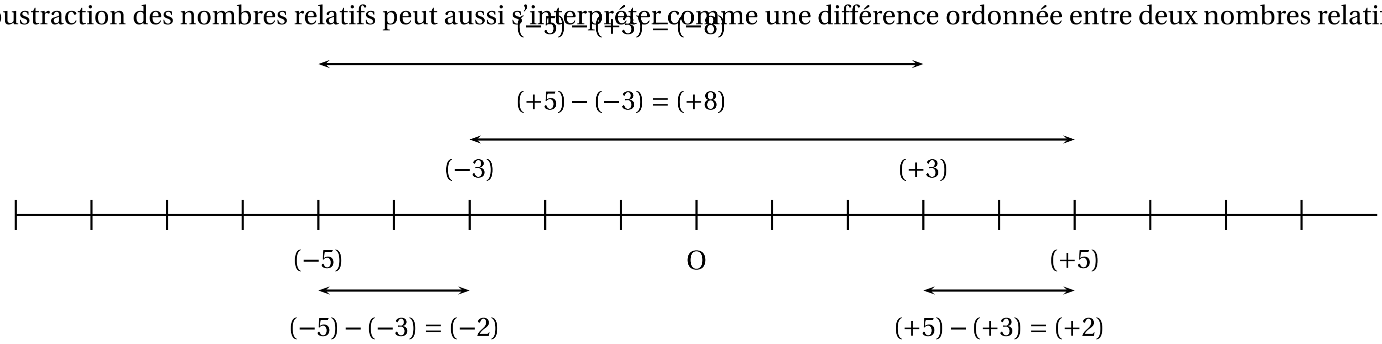
$$D + (-5) + (+5) = (-7) + (+5)$$

$$D = (-7) + (+5)$$

CQFD

EXEMPLES :
$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = (+2) = 2$: la soustraction usuelle est devenue une addition. [8]
$(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = (+8)$
$(-5) - (-3) = (-5) + (+3) = (-2)$
$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = (-8)$

INTERPRÉTATION :
La soustraction des nombres relatifs peut aussi s'interpréter comme une différence ordonnée entre deux nombres relatifs.



CONVENTION :
On sait que la somme de relatifs $(+7) + (+6) + (+4)$ revient à la somme habituelle $7 + 6 + 4$
On sait aussi que toutes expressions contenant une soustraction peut s'écrire sous la forme d'une somme :
$(-3) + (+7) - (-4) - (+6) + (-3) = (-3) + (+7) + (+4) + (-6) + (-3)$

On convient dorénavant de ne plus écrire les symboles opératoires + dans une somme. On écrit seulement les nombres relatifs précédés des signes + ou −, signes qui indiquent les caractères positifs ou négatif du nombre.

Ainsi $(-6) + (+7) + (-3) + (-4) = -6 + 7 - 3 - 4$ ou encore $(+7) + (-3) + (-2) + (+3) = 7 - 3 - 2 + 3$: le signe + en première position est sous-entendu.

MÉTHODE 1 . 2 : Écrire une expression sous forme de somme algébrique
Dans une expression ne contenant que des additions et des soustractions :

— on transforme toutes les soustractions en addition en utilisant la propriété I.3 ;
— on élimine ensuite les symboles d'addition entre les parenthèses ;
— on supprime alors les parenthèses ;
— un signe + qui débute l'expression peut être supprimé.

Un moyen commode d'obtenir une expression algébrique consiste à appliquer les règles suivantes :[9]