Les nombres relatifs

Nombres opposés

Deux nombres relatifs sont **opposés** si leur somme est nulle.

0 est égal à son opposé.
Quand deux nombres sont opposés, l'un des deux est **positif** et l'autre est **négatif**.
Deux nombres opposés sont situés à la même distance de zéro.

Exemples :

$(-5)+(+5)=0$, (-5) et $(+5)$) sont opposés. (-5) est négatif et $(+5)$ est positif.
Ces deux nombres sont situés à la même distance de zéro : 5 unités.
$0+0=0$: 0 est son propre opposé.

Somme de deux nombres relatifs

Pour faire la somme de deux nombres relatifs :

- Si les deux nombres ont **le même signe** :
  - on **ajoute** les distances à zéro ;
  - la somme a le même signe que les deux nombres.
- Si les deux nombres ont **des signes différents** :
  - on **soustrait** les distances à zéro ;
  - la somme est du même signe que celui des nombres le plus éloigné de zéro.

Exemples :

$(+5)+(+7)=(+12)$ car $5+7=12$ et les deux nombres sont positifs.
$(-5)+(-7)=(-12)$ car $5+7=12$ et les deux nombres sont négatifs.
$(+5)+(-7)=(-2)$ car $7-5=2$ et -7 est le plus éloigné de zéro.
$(-5)+(+7)=(+2)$ car $7-5=2$ et $+7$ est le plus éloigné de zéro.

Différence de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemples :

$(-5)-(+7)=(-5)+(-7)=(-12)$
$(-6)-(-7)=(-6)+(+7)=(+1)$

Écriture algébrique

L'expression $-5+7-8-9+9$ est une somme algébrique.
Elle correspond à la somme suivante : $(-5)+(+7)+(-8)+(-9)+(+9)$.
L'expression $5-7-8+9-9$ est une somme algébrique.
Elle correspond à la somme suivante : $(+5)+(-7)+(-8)+(+9)+(-9)$.

Dans cette écriture les symboles + et − donne le signe du nombre qui suit.
Ce ne sont plus des symboles opératoires car l'addition est sous-entendue.

On n'écrit pas le signe + devant le premier terme d'une somme algébrique.

Exemple pratique :

$A=(-6)+(-3)-(+7)-(-5)+(+9)$ peut s'écrire $A=(-6)+(-3)+(-7)+(+5)+(+9)$
Ainsi $A=-6-3-7+5+9$
On remarque que deux signes + consécutifs correspondent à un +, que deux signes − à un + et un signe + suivi d'un − ou le contraire à un −.

Produit de deux nombres relatifs

Pour faire le produit de deux nombres relatifs :

- Si les deux nombres ont **le même signe** :
  - on multiplie les distances à zéro ;
  - le produit est **positif**.
- Si les deux nombres ont **des signes différents** :
  - on multiplie les distances à zéro ;
  - le produit est **négatif**.

Exemples :

$(+5)\times(+7)=(+35)$ $(-5)+(-7)=(+35)$ $(+5)+(-7)=(-35)$ $(-5)+(+7)=(-35)$

Quotient de deux nombres relatifs

La règle est la même que pour le produit en calculant les quotients des distances à zéro.

Remarque :

$(+5)\div(+3)$ est positif.
$(-5)\div(-3)$ est positif.
$(-5)\div(+3)$ est négatif.
$(+5)\div(-3)$ est négatif.

$$\frac{+5}{+3}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{-5}{+3}=\frac{+5}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Notes

[1]Il aurait été plus judicieux d'utiliser un autre symbole que $-$ pour désigner l'opposé d'un nombre, par exemple $opp(a)$ ce qui aurait pour mérite d'éviter la confusion quand on aborde la soustraction

[2]C'est une des constructions possibles de cet ensemble.

[3]On suppose sans le dire que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe ordonné.

[4]L'idée est de prolonger la somme des nombres positifs aux nombres relatifs. Cette prolongation doit respecter les propriétés usuelles de l'addition dont la commutativité

[5]Une démonstration dans le cas général demande d'utiliser la notation $opp(a)$ pour l'opposé de a un nombre relatif et éviter la confusion avec la soustraction.

a et b deux relatifs, $S = a+b$

$S+opp(a)+opp(b) = a+b+opp(a)+opp(b) = 0$ donc $opp(a)+opp(b)$ est l'opposé de $a+b$ c'est-à-dire $opp(a+b) = opp(a)+opp(b)$

- Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ on a la somme habituelle ;
- Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ alors $opp(a) \geqslant 0$ et $opp(b) \geqslant 0$ ainsi $opp(a)+opp(b) = opp(a+b) > O$ Ainsi $a+b \leqslant 0$ et sa distance à zéro est la même que celle de $opp(a)+opp(b)$
- Si $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $S = a+b$ donc $S+opp(a) = a+b+opp(a)$ ainsi $S+opp(a) = b$
  - si $b \geqslant opp(a)$ alors S est la différence entre b et $opp(a)$, $S = b-opp(a) \geqslant 0$
  - si $b \leqslant opp(a)$ On a $S+opp(a) = b$ donc $opp(S+opp(a)) = opp(b)$ et $opp(S)+a = opp(b)$ Comme $b \leqslant opp(a)$ on a $opp(b) \geqslant a$ Ainsi $opp(S)$ est la différence entre $opp(b)$ et a, $opp(S) = opp(b)-a \geqslant 0$. Finalement S est négatif.

[6]Une démonstration dans le cas général demanderait pour plus de clarté de noter l'opposé d'un nombre relatif a sous la forme $opp(a)$ par exemple, pour éviter la confusion entre les symboles.

Dans ce cas on obtiendrait pour a et b deux relatifs, $D = a-b$ donc D vérifie $D+b = a$ (par définition étendue de la différence de deux nombres).

Comme $D+b = a$ on arrive à $D+b+opp(b) = a+opp(b)$ et finalement $D = a+opp(b)$

[7]On définit la soustraction comme nombre répondant à la question des « additions à trous ». Dans une théorie plus axiomatique des opérations dans $\mathbb{Z}$, la soustraction n'est pas une opération en tant que telle, elle est définit comme somme de l'opposé.

[8]J'aime à dire à ce moment-là que nous venons de faire disparaître la soustraction. Plus précisément, nous avions quatre opérations fondamentales sur les nombres avant ce chapitre et il n'en reste maintenant plus que trois ! La soustraction n'est qu'une addition particulière. Ce sera bientôt le tour de la division. Cette manière de penser tient à la structure de groupe additif de $\mathbb{Z}$ et celle de corps pour $\mathbb{R}$.

[9]C'est une règle usuelle mais qui peut présenter une difficulté didactique. Cela n'a en effet aucun lien avec la multiplication des nombres relatifs et cela peut contribuer à créer de la confusion entre l'addition et la multiplication des nombres relatifs. Il est nécessaire de bien distinguer à l'oral ces deux notions.

Ainsi « $--5$ devient $+5$ »est une phrase à proscrire. Il est raisonnable de dire « $--5$ revient à soustraire l'opposé de 5 c'est-à-dire ajouter 5 ce qu'on écrit $+5$ »

[10]On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.

a et b deux nombres relatifs.

$a \times \left(b+opp(b)\right) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$

Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$

En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :

$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\left(a+opp(a)\right)\left(b+opp(b)\right) = 0$

$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$

Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$

$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$

$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$

C'est-à-dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

[11]On se gardera bien à l'oral de dire que « $-$ par $+$ égal $-$ »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »