I — Le théorème de Pythagore

Définition 2.1 : Vocabulaire du triangles rectangle

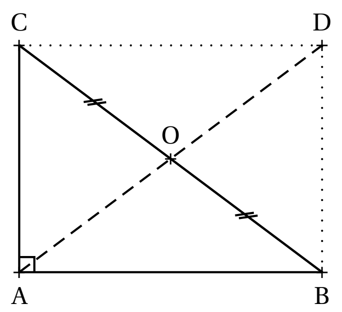
Un triangle ayant un angle droit est un **triangle rectangle** .
Les deux côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle sont les **côtés de l'angle droit** . Le côté restant est l' **hypoténuse** du triangle rectangle. C'est le **côté opposé** à l'angle droit.

Propriété 2.1 : Hypoténuse Admise

Si un triangle est rectangle **alors** son plus grand côté est l'hypoténuse. [1]

Démonstration :

Montrons que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus long côté.
Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse [BC].
On place D le symétrique du point A par rapport au point O.



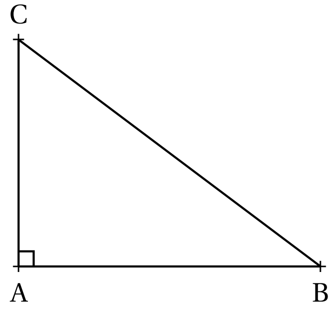
Les diagonales du quadrilatère ABDC se coupent en leur milieu O donc ABCD est un parallélogramme.
De plus ABDC est un parallélogramme ayant un angle droit, il s'agit donc d'un rectangle.
On sait que dans un rectangle les diagonales ont la même longueur, elles ont le même milieu O.
Ainsi $OA = OB = OC = OD$

Dans le triangle OBA l'inégalité triangulaire affirme que $AB \leqslant AO + OB$ or $AO = OC$ d'où $AB \leqslant OB + OC$. Comme $OB + OC = BC$ on a $AB \leqslant BC$
De même dans le triangle OCA on prouve que $AC \leqslant BC$.
Le segment [BC] est bien le plus grand côté du triangle ABC rectangle en A

CQFD

Théorème 2.1 : Le théorème de Pythagore Admis

Si un triangle est rectangle **alors** la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse.

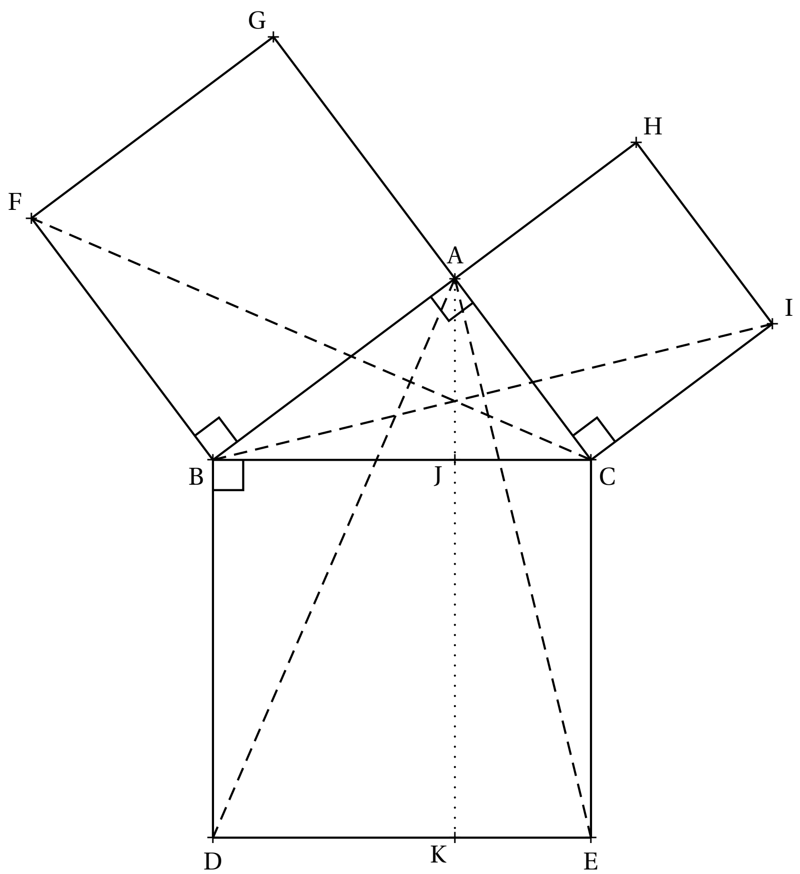


Si ABC est un triangle rectangle en A **alors** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (**Égalité de Pythagore**)

Démonstration :

Les carrés dans l'égalité de Pythagore correspondent aux aires des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle. Les démonstrations proposées ici visent donc à montrer que la somme des aires des deux petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

Voici la démonstration que l'on trouve dans les Éléments d'Euclide.



Dans le triangle ABD, l'angle $\widehat{DBA} = 90° + \widehat{CBA}$.
Dans le triangle BCF, l'angle $\widehat{CBF} = 90° + \widehat{CBA}$.
Ainsi $\widehat{DBA} = \widehat{CBF}$. De plus FB = AB et BC = BD.
Les triangles CBF et ABD ont deux angles égaux dont les côtés ont la même longueur. Les triangles ABD et CBF sont donc superposables.
On arrive enfin à $Aire(ABD) = Aire(CBF)$.

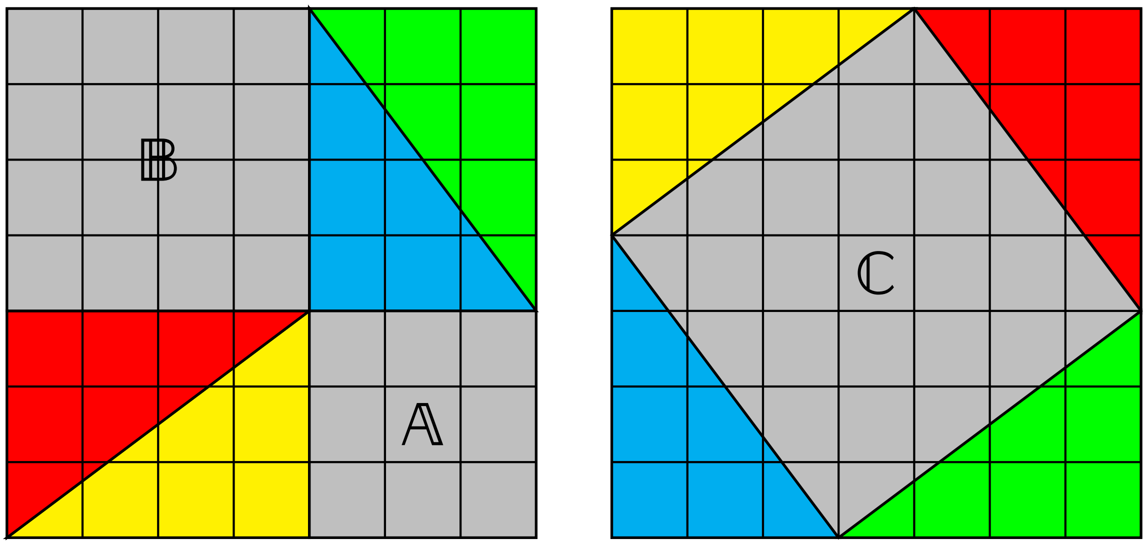
Par le même raisonnement au fait que les triangles BCI et ACE sont aussi superposables.
De même $Aire(BCI) = Aire(ACE)$

Le triangle FBC a pour base le segment [FB] et sa hauteur mesure la longueur AB puisque ABFG est un carré.
Ainsi l'aire du triangle FBC vaut $FB \times AB \div 2$ soit la moitié de l'aire du carré ABFG.
Par le même raisonnement on prouve que l'aire du triangle BCI vaut la moitié de l'aire du carré ACIH

Le triangle ABD a pour base le segment [BD] et sa hauteur mesure la longueur BJ puisque BDKJ est un rectangle.
Ainsi l'aire du triangle ABD vaut la moitié de celle du rectangle BDKJ.
De même l'aire du triangle ACE vaut la moitié de celle du rectangle CEKJ.

Finalement l'aire du carré ABFG vaut le double de celle du triangle FBC donc le double de celle du triangle ABD soit l'aire du rectangle BDKJ.
De même l'aire du carré ACIH est égale à celle du rectangle CEKJ.
On arrive enfin au fait que la somme des aires des petits carrés est égale à l'aire du plus grand.

Démonstration par soustraction d'aires égales



On constate l'égalité suivante entre les aires :

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

Pour justifier la construction il peut être utile de faire la remarque suivante :