

- Nommer le triangle rectangle et bien repérer l'angle droit ;
- invoquer le théorème de Pythagore et écrire l'égalité en veillant à l'angle droit ;
- si on cherche la mesure de l'hypoténuse, on effectue la somme des carrés des deux autres côtés ;
- si on cherche la mesure d'un autre côté, on fait la différence du carré de l'hypoténuse et de l'autre côté ;
- une fois le carré obtenu il suffit de calculer la racine carrée pour obtenir la mesure.

III — La réciproque du théorème de Pythagore

🌀 THÉORÈME 2.2 : Contraposée du théorème de Pythagore

(Admis)

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée **alors** ce triangle n'est pas rectangle.

🌀 DÉMONSTRATION :

C'est une conséquence de la logique des propositions.

Prenons un exemple simple :

Propriété : Si nous sommes le 25 décembre alors je ne vais pas à l'école.

La propriété contraposée est : Si je ne vais pas à l'école alors nous ne sommes pas le 25 décembre.

On comprend que quand une propriété est vraie alors la propriété contraposée est également vraie.

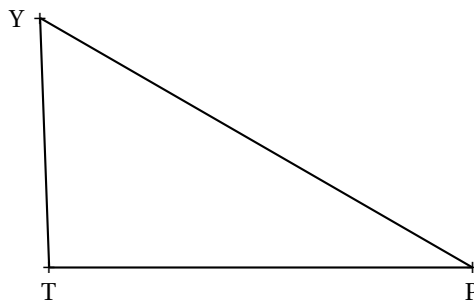
Dans le cas du théorème de Pythagore, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle car s'il était rectangle l'égalité serait vérifiée!

CQFD

EXEMPLE :

Un triangle TYP est tel que $TY = 33 \text{ mm}$, $TP = 56 \text{ mm}$ et $YP = 66 \text{ mm}$

En dessinant ce triangle, il semble rectangle.



Vérifions : comparons $TY^2 + TP^2$ et YP^2

$$TY^2 + TP^2 = 33^2 + 56^2$$

$$TY^2 + TP^2 = 1089 + 3136$$

$$TY^2 + TP^2 = 4225$$

$$YP^2 = 66^2$$

$$YP^2 = 4356$$

Ainsi $TY^2 + TP^2 \neq YP^2$

D'après le **théorème contraposé de Pythagore**, le triangle TYP n'est pas rectangle.

🌀 THÉORÈME 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore

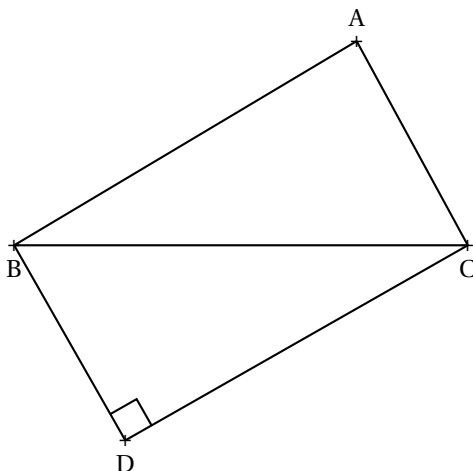
(Admis)

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore est vérifiée **alors** ce triangle est rectangle.

DÉMONSTRATION :

Ce théorème, contrairement au théorème contraposé, demande une démonstration.

Soit ABC un triangle à priori quelconque vérifiant l'égalité de Pythagore, par exemple $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ce qui suppose que BC est le plus long côté.



Plaçons de l'autre côté du segment [BC] un point D tel que BCD soit rectangle en D et $BD = AC$. (Cela revient à tracer un triangle rectangle connaissant la mesure de l'hypoténuse et un côté de l'angle droit).

Comme BCD est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$DB^2 + DC^2 = BC^2$$

Or $BD = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$ d'où $AC^2 + DC^2 = AB^2 + AC^2$ c'est à dire $DC^2 = AB^2$ donc $DC = AB$ (ce sont des longueurs!).

Le quadrilatère ABDC a donc ses côtés opposés AB et DC de même longueur, ainsi que les côtés opposés BD et AC

On sait que **Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.**

On en déduit que ABDC est un parallélogramme.

De plus ce parallélogramme a un angle droit en D.

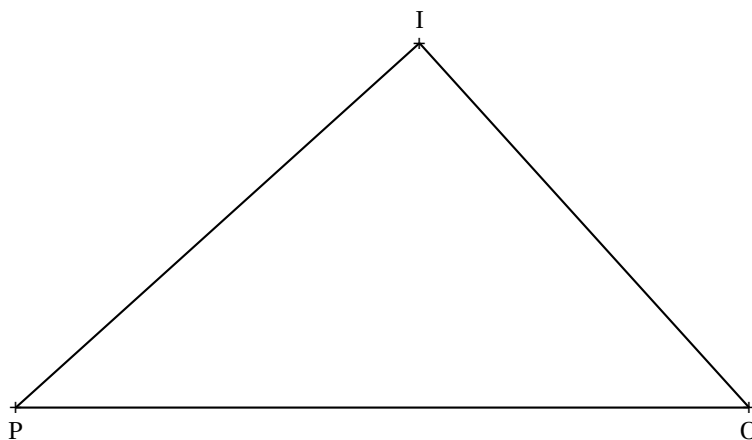
On sait que **Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.**

Finalement ABDC est un rectangle, ce qui prouve que ABC est un triangle rectangle en A.

CQFD

EXEMPLE :

POI un triangle tel que : $PO = 97 \text{ mm}$, $PI = 72 \text{ mm}$ et $OI = 65 \text{ mm}$.



Ce triangle est-il rectangle?

Comme PO est le plus long côté, comparons PO^2 et $IP^2 + IO^2$

$$PO^2 = 97^2$$

$$PO^2 = 9409$$

$$IP^2 + IO^2 = 72^2 + 65^2$$

$$IP^2 + IO^2 = 5184 + 4225$$

$$IP^2 + IO^2 = 9409$$

Ainsi $IP^2 + IO^2 = PO^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle POI est rectangle en P.

MÉTHODE 2.2 : Déterminer si un triangle est rectangle

Étant données les trois mesures des côtés d'un triangle :

- Déterminer le plus grand côté (il est candidat pour être l'hypoténuse);
- calculer le carré de la mesure du plus grand côté;
- calculer la somme des carrés des mesures des deux plus petits côtés;
- vérifier si les deux calculs précédent sont égaux ou non :
 - si les deux calculs sont exactement égaux, l' **égalité de Pythagore** est vérifiée, la réciproque du théorème de Pythagore affirme que le triangle est rectangle;
 - si les deux calculs ne sont pas égaux, l' **égalité de Pythagore** n'est pas vérifiée, la contraposée du théorème de Pythagore affirme que le triangle n'est pas rectangle.