Paradoxe — Le puzzle de Lewis Carroll

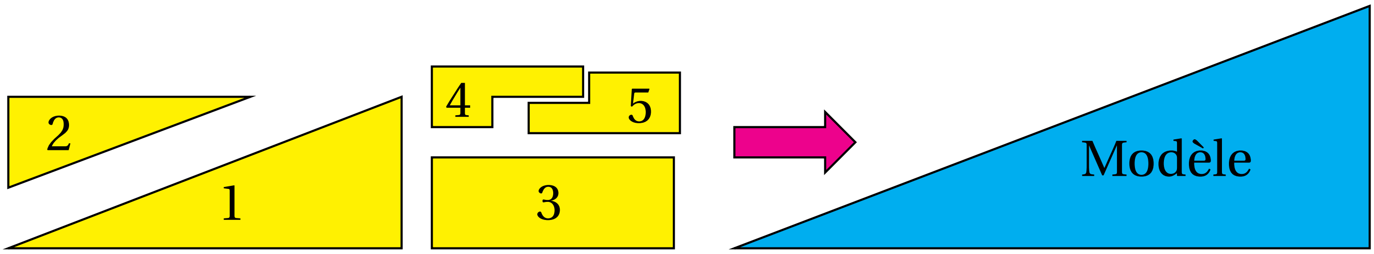
Première partie : les deux puzzles

Sur le document fourni en annexe se trouve deux rectangles quadrillés et les pièces nécessaires pour construire deux puzzles.

Découper les cinq pièces identiques de chaque puzzle et les deux rectangles quadrillés.

Les pièces du puzzle A et du puzzle B permettent de construire la même figure par **deux méthodes différentes**, plus précisément aucune des pièces du puzzle A et du puzzle B ne doivent se situer au même endroit.

À vous de trouver ces deux méthodes puis de coller les pièces sur les rectangles quadrillés une fois votre construction validée.



Que constatez-vous ?

Deuxième partie : comparaison des aires

1. Indiquez la nature géométrique de chacune des pièces de ce puzzle et du modèle.

2. En utilisant pour unité d'aire un carreau du quadrillage, déterminer l'aire du modèle.

3. Déterminer les aires de chacune des pièces du puzzle en utilisant la même unité.

4. En observant chacune des constructions obtenues avec les puzzles, déterminer à nouveau l'aire du grand modèle.

5. Quel paradoxe observe-t-on ?

Troisième partie : démonstration

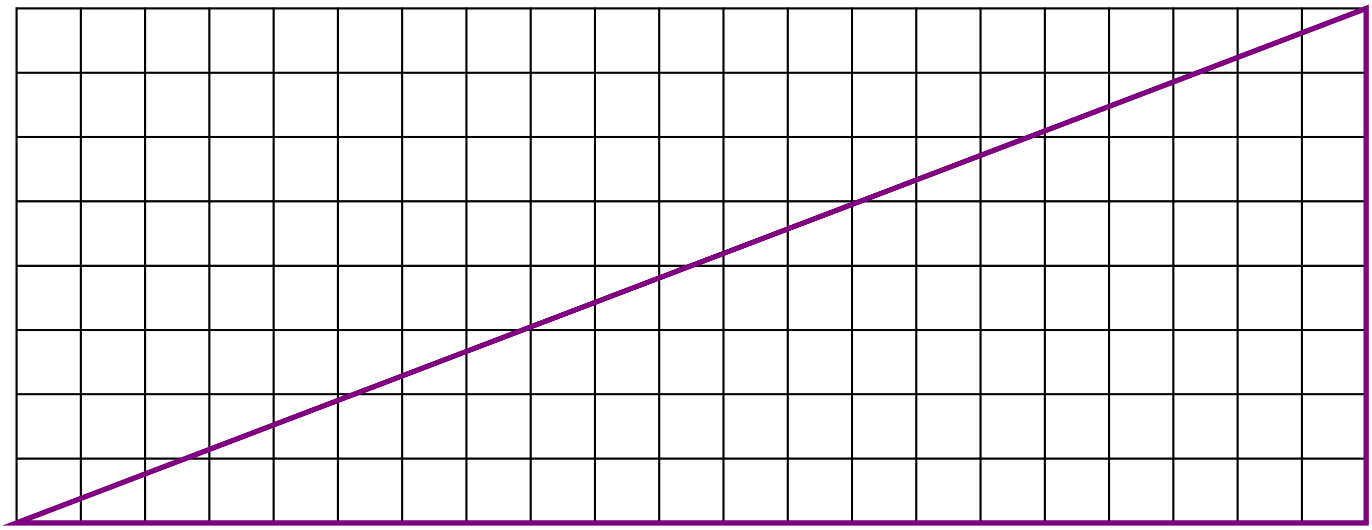
L'unité de mesure utilisée dans cette partie est la mesure du côté d'un carreau du quadrillage.

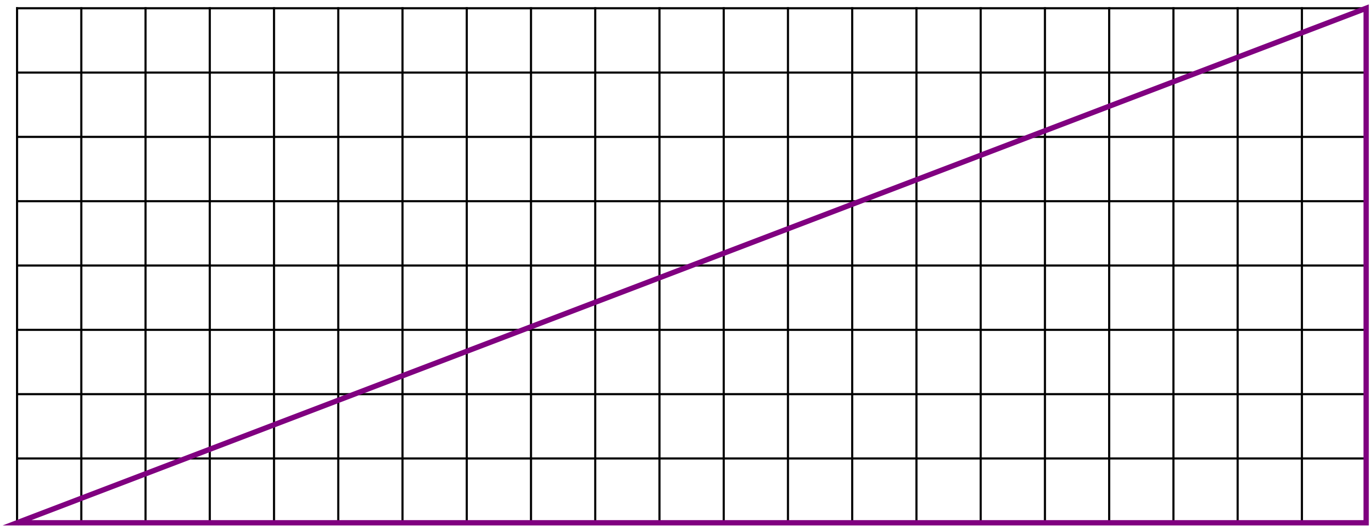
1. Calculer la mesure de l'hypoténuse du grand triangle rectangle obtenu après la construction du puzzle.

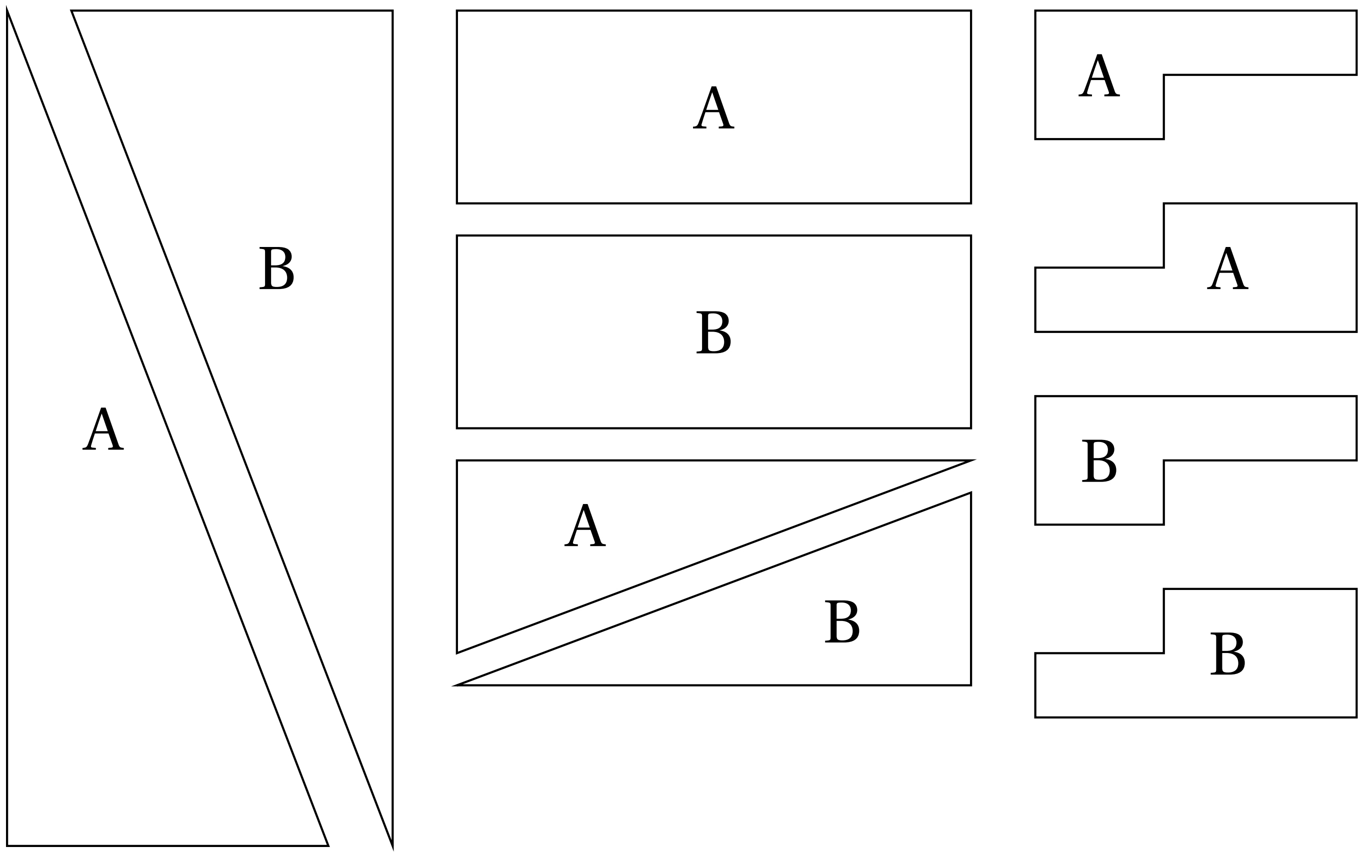
2. Calculer la mesure de l'hypoténuse de chacune des deux pièces en forme de triangle rectangle du puzzle.

3. Quelle relation devrait-on trouver entre les mesures calculées aux questions **1.** et **2.**.

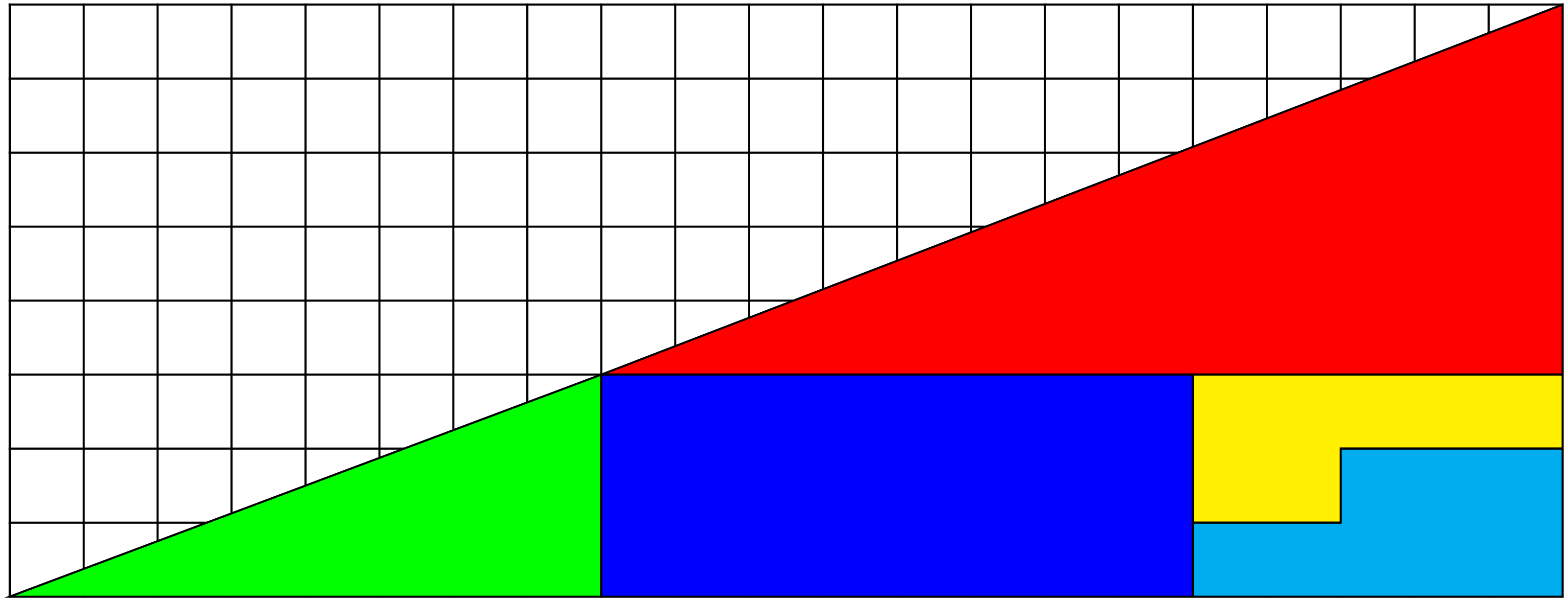
4. Voyez-vous une explication au paradoxe observé dans la deuxième partie ?

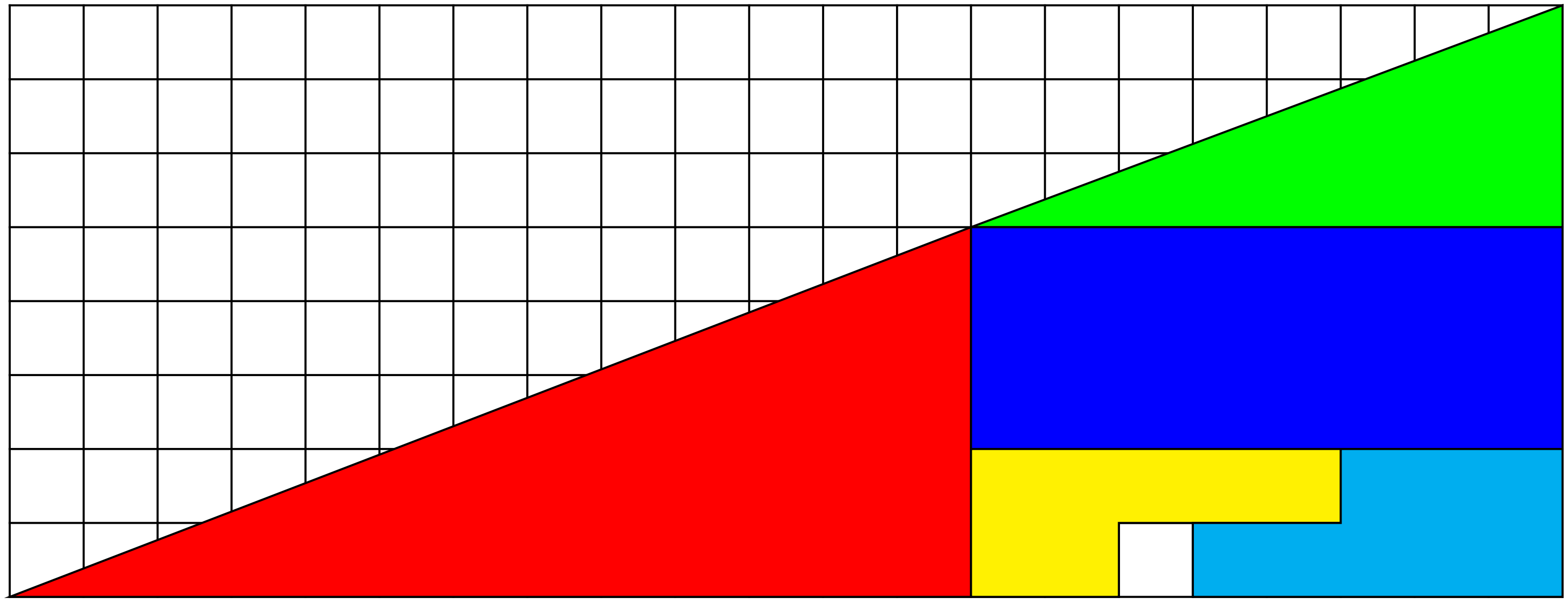





B
A
A
B
A
B
A
A
B
B

Paradoxe — Le puzzle de Lewis Carroll — Correction





Paradoxe — Le puzzle de Lewis Carroll — Correction

Première partie : les deux puzzles

Voir page précédente.

Seconde partie : comparaison des aires

1. Il y a deux triangles rectangles, un rectangle et deux hexagones.

2. Le grand triangle rectangle a une base qui mesure 21 carreaux et une hauteur qui mesure 8 carreaux.

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = \frac{21 \times 8}{2} = \frac{168}{2} = 84$$

3. En unité d'aire on obtient pour le puzzle :

$$\text{Aire(petit triangle rectangle)} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = \frac{13 \times 5}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

$$\text{Aire(rectangle)} = 8 \times 3 = 24$$

$$\text{Aire(petit hexagone)} = 7$$

$$\text{Aire(grand hexagone)} = 8$$

4. On obtient pour l'un des puzzles :

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = 32,5 + 12 + 24 + 7 + 8 = 83,5$$

Et pour l'autre :

$$\text{Aire(grand triangle rectangle)} = 32,5 + 12 + 24 + 7 + 8 + {\color{red}+1} = 84,5$$

5. Nous avons obtenu trois mesures différentes de l'aire avec trois méthodes différentes !!

Troisième partie : démonstration

1. La grand triangle rectangle a une base qui mesure 21 et une hauteur de 8.
En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :
Comme $21^2 + 8^2 = 441 + 64 = 505$ son hypoténuse mesure $\sqrt{505} \approx 22,47$

2. Les deux triangles rectangles du puzzle ont respectivement des côtés de l'angle droit dont les mesures sont :
8 et 3 pour l'un et 13 et 8 pour l'autre.
En utilisant le théorème de Pythagore dans ces deux cas on obtient :
Comme $8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$ l'un des hypoténuses mesure $\sqrt{73} \approx 8,54$
Et $13^2 + 8^2 = 169 + 64 = 233$ l'autre mesure $\sqrt{233} \approx 15,26$

3. La somme des mesures des deux hypoténuses des pièces du puzzle devrait être égale à l'hypoténuse du grand triangle rectangle.
Or on constate que $\sqrt{73} + \sqrt{233} \approx 23,8$

Donc $\sqrt{73} + \sqrt{233} > \sqrt{505}$

4. Le plus court chemin entre deux points est le segment. Nous déduisons des calculs précédents que les deux hypoténuses des triangles des pièces du puzzle ne sont pas alignés avec l'hypoténuse du grand triangle.
Contrairement à ce que nous voyons, les pièces du puzzle proposés ne permettent pas de construire un triangle rectangle.
Les angles des deux pièces en forme de triangle rectangle ne sont pas superposables. C'est invisible à l'oeil nu ! Le tracé imparfait et le découpage empêchent d'observer ce décalage !

PARADOXE — Le puzzle de Lewis Carroll — Synthèse

La connaissance scientifique

La **connaissance scientifique** est fondée sur quatre piliers :

- **Premier pilier** : **La question initiale** .
  À l'origine de toute connaissance scientifique se trouve une **question** qui interroge le monde dans lequel nous vivons. Une connaissance est une réponse à une question.
  « Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on en dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. » — Gaston Bachelard
- **Deuxième pilier** : **Le réalisme** .
  Le monde des idées n'a pas la priorité sur le monde physique. Le monde là dehors existe indépendamment et antérieurement à la perception que j'en ai et aux descriptions que l'on en fait.
- **Troisième pilier** : **La rationnalité** .
  Cela consiste à respecter les lois de la logique fournies par les mathématiques. Cela demande également d'accepter seulement les théories les plus économiques en hypothéses de départ.
- **Quatrième pilier** : **Le matérialisme** .
  Les expériences scientifiques n'utilisent que des éléments du monde réel et matériel, cela exclu les définitions immatérielles comme par exemple les esprits.

Croyance et opinion

Croyance :
« La croyance est le processus mental expérimenté par une personne qui adhère à une thèse ou une hypothèse, de façon qu'elle les considère comme vérité, indépendamment des faits, ou de l'absence de faits, confirmant ou infirmant cette thèse ou cette hypothèse. Ainsi, les croyances sont souvent des certitudes sans preuve. » — Wikipédia

Opinion :
« L'opinion est un jugement que l'on porte sur un individu, un être vivant, un phénomène, un fait, un objet ou une chose. Elle peut être considérée comme bonne ou mauvaise. » — Wikipédia

Biais cognitifs

Je suis le frère de deux aveugles.
Pourtant, ces deux aveugles ne sont pas mes frères.
Comment est-ce possible ?

Biais cognitif :
Ce sont des **heuristiques** ou raccourci mentaux qui nous conduisent presque toujours à porter un faux jugement.
Nous utilisons les biais cognitifs lorsque :

- il y a un trop grand nombre d'informations à traiter ;
- nous avons besoin de donner du sens au monde qui nous entoure ;
- nous avons besoin d'agir vite ;
- nous avons besoin de mémoriser les choses pour plus tard.

Voici quatre exemples :

Biais d'ancrage	Effet d'entraînement	Biais de confirmation	Biais de Blind-Spot
On a tendance à être trop dépendant de la première information entendue ou observée.	La probabilité pour qu'une personne adopte une croyance augmente proportionnellement au nombre de personnes qui ont cette croyance.	Tendance à ne porter attention qu'aux informations qui confirment nos opinions.	Le fait de ne pas réussir à identifier ses propres biais est un biais en lui-même.

POUR LE PROF : Paradoxe du carré manquant — Suite de Fibonnacci

À compléter

Notes

[1]du latin hypotenusa venant du grec hypoteinousa, c'est le participe présent de hypoteínô qui signifie sous-tendre ou soutenir. Dans la proposition I.19 des Éléments d'Euclide, il est dit que « Dans tout triangle, le plus grand côté est celui opposé au plus grand angle. »

[2]Les nombres $(3;4;5)$ forment un triplet Pythagoricien. C'est un triplet primitif au sens où ces trois nombres n'ont pas de diviseurs communs. Voici les triplets primitifs inférieurs à 100

$$(3;4;5)--(5;12;13)--(8;15;17)--(7;24;25)--(20;21;29)--(12;35;37)--(9;40;41)--(28;45,53)--(11;60;61)--(16;63;65)--(33;56;65)--(48;55;73$$

[3]Il faut bien sur supposer connu le fait que la fonction racine carrée est croissante. Le raisonnement suivant demanderait d'utiliser la continuité et la stricte croissante de la fonction carrée pour obtenir son inverse et la continuité de la fonction racine. C'est hors de propos en troisième...