Chapitre III

Nombres rationnels : calculer avec les fractions

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) :

- À rédiger !

Compétences :

- À rédiger !

La pêche à pied à Noirmoutier

Quatrieme

Tâche complexe

Nous sommes le 12 août 2022. La famille Cantor est en vacances sur l'ile de Noirmoutier. Ils souhaitent profiter des grandes marées pour organiser une sortie pêche à pied. Pour préparer cette journée, cette famille qui ne connaît pas bien la culture de la côte atlantique, a consulté la capitainerie du port pour obtenir des consignes de sécurité, le site Wikipédia et marée.info pour obtenir des informations.

En utilisant toutes ces informations, indiquer à la famille Cantor l'heure à laquelle ils pourront aller pêcher et celle où ils devront absolument rentrer.

Document nº 1 : conseils de la capitainerie

Prendre connaissance de la météo, des horaires de marée et anticiper la remontée de la mer. Vous pouvez commencer lorsque la marée descendante a atteint un quart du marnage. Vous devez absolument rentrer quand la marée montante a atteint un tiers du marnage. Éviter d'aller pêcher par temps de brume ou d'orage. Ne partez pas seul et prévenez quelqu'un resté à terre. Disposer d'un moyen de communication pour alerter les secours.

Document nº 2 : Wikipédia

Wikipédia
L'encyclopédie libre

Période de pêche : Du fait des conditions de pêches, les grandes marées sont très favorables à cette activité. Les zones découvertes à marée basse l'étant beaucoup moins souvent que lors des marées normales, la population de crustacés est nettement plus importante. Ces événements attirent en règle générale un grand nombre de pêcheurs à pied.
Marée : La marée est la variation de la hauteur du niveau des mers et des océans, causée par des forces gravitationnelles dues à la Lune et au Soleil, le tout conjugué à la rotation de la Terre sur son axe et la révolution de la Terre. Le niveau le plus élevé atteint par la mer au cours d'un cycle de marée est appelé pleine mer (PM) ou marée haute. Le niveau le plus bas est appelé basse mer (BM) ou marée basse.
Marnage : Le marnage est la différence de hauteur d'eau entre la pleine mer et la basse mer.

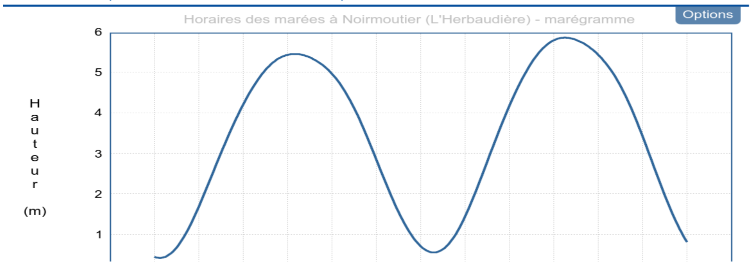
Document nº 3 : Maree.info

Samedi 13 Août 2022 UTC+2 Semaine 32 47°02' N 2°18' W **Noirmoutier (L'Herbaudière)**

Lever du soleil : 07h03 Lune gibbeuse décroissante Coucher du soleil : 21h21

	Coeff.	Heure	Durée de la marée	Heure de marée	Hauteur	Marnage	$^1/_{12}$	$^1/_4$	$^1/_2$
BM		00h14			0,41m				
PM	102	06h18	06h04	01h00	5,45m	5,04m	0,42m	1,26m	2,52m
BM		12h35	06h17	01h02	0,55m	4,90m	0,41m	1,23m	2,45m
PM	103	18h30	05h55	00h59	5,86m	5,31m	0,44m	1,33m	2,66m

Horaires des marées à Noirmoutier (L'Herbaudière) - marégramme



Date	Heure	Hauteur	Coeff.
Sam. 13	00h14	0,41m	
	06h18	5,45m	102
	12h35	0,55m	
	18h30	5,86m	103
Dim. 14	01h01	0,34m	
	06h50	5,44m	103
	13h21	0,55m	
	19h05	5,79m	102
Lun. 15	01h47	0,45m	
	07h20	5,34m	99
	14h06	0,70m	
	19h38	5,61m	95
Mar. 16	02h31	0,71m	
	07h50	5,16m	90
	14h51	0,98m	
	20h12	5,33m	84
Mer. 17	03h14	1,08m	
	08h20	4,93m	77
	15h37	1,34m	
	20h46	5,00m	70

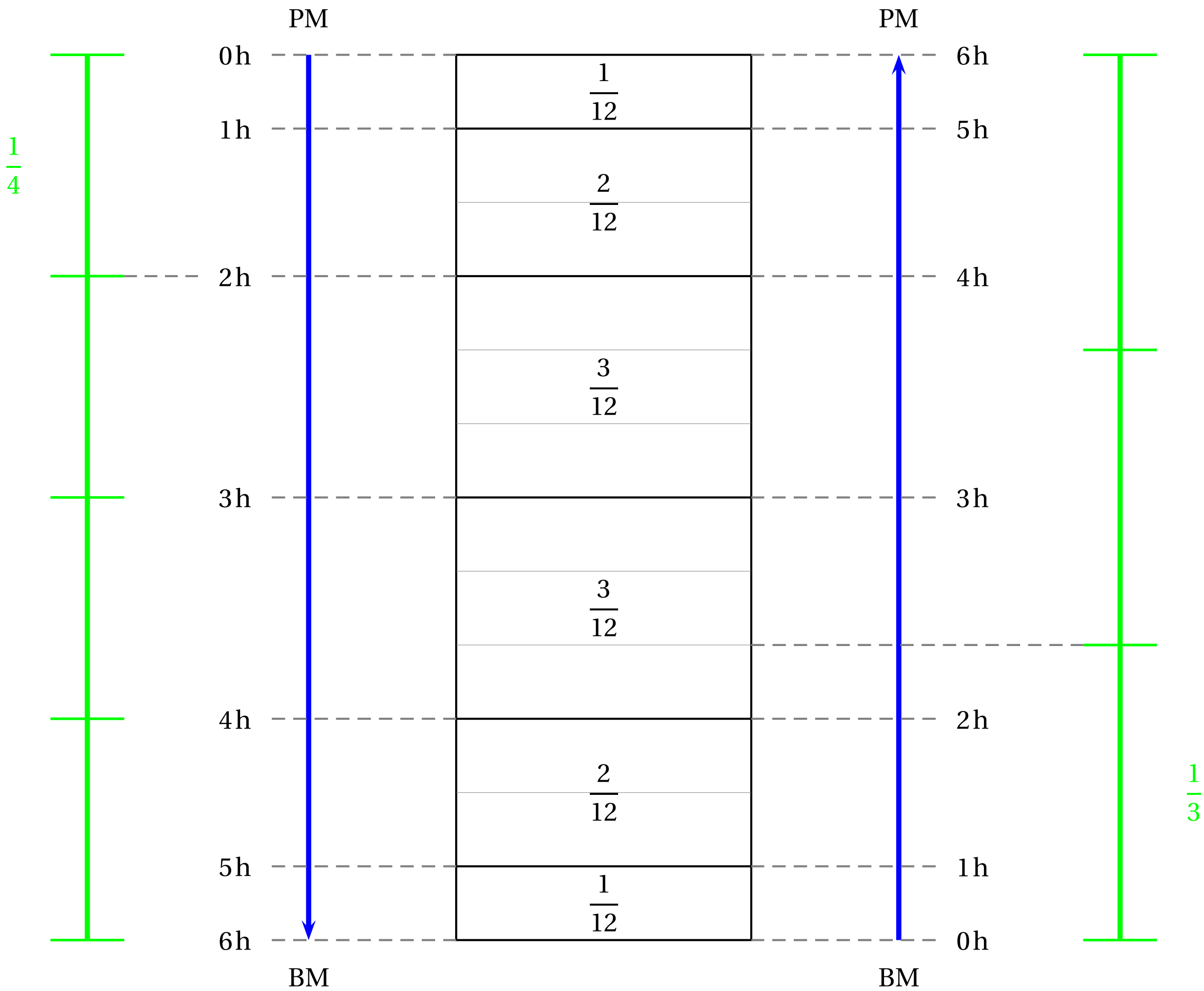
Document nº 4 : la règle des douzièmes

Proverbe marin : « *À partir de la marée haute, la marée descend de un douzième la première heure, de deux douzièmes la deuxième heure, de trois douzièmes la troisième heure, de trois douzièmes la quatrième heure, de deux douzièmes la cinquième heure et de un douzième la sixième heure pour arriver à la marée basse puis elle remonte de manière identique.* ».

Tâche complexe

La pêche à pied à Noirmoutier — Correction

Nous allons commencer par modéliser la règle des douzièmes pour comprendre la manière dont la marée monte et descend.



Nous avons représenté sous la forme d'un rectangle les six heures de marée montante ou descendante. Ce rectangle a été partagé en douze parts. Il est assez facile ensuite de représenter les heures de montée et descente en respectant la règle des douzièmes du **Document n° 4**.

En lisant le **Document n° 1** nous lisons qu'il est possible d'aller pêcher à partir du quart du marnage. D'après le **Document n° 2** le marnage correspond à la hauteur de montée ou de descente de la marée.

Comme $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ et que $\frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12}$ on en déduit qu'il est possible d'aller pêcher deux heures après le début de la marée descendante comme on peut le voir sur la modélisation ci-dessus.

Comme $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ et que $\frac{4}{12} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}$ on en déduit que l'heure de départ aura lieu durant la troisième heure après la marée basse. Comme la troisième heure correspond à trois douzièmes de la marée, il faut partir au premier douzième c'est-à-dire au tiers de la troisième heure.
Comme 1 h = 60 min, $\frac{1}{3} \times 60\,\text{min} = \frac{60\,\text{min}}{3} = 20\,\text{min}$, il faut partir 2 h 20 min après la marée basse.

En consultant le **Document n° 3** on constate que le 13 août 2022, la marée haute aura lieu à 6 h 18 min.

$\boxed{\text{Cette famille pourra donc pêcher à partir de 8 h 18 min.}}$

Comme la marée basse suivante est prévue à 12 h 35 min,

$\boxed{\text{ils devront quitter les lieux au plus tard à 14 h 55 min.}}$

Ils pourraient aussi aller pêcher après la marée haute du soir vers 20 h 30, mais pêcher à pied la nuit ne semble pas raisonnable !

I — Définition du quotient

Définition 3.1 : Fraction

a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$

La **fraction** $\dfrac{a}{b}$ désigne le quotient $a \div b$ de a par b, c'est-à-dire un nombre vérifiant :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

— a est le **numérateur** de la fraction ;
— b est le **dénominateur** de la fraction ;
— a et b sont séparés par **la barre de fraction** ou vinculum.

Remarque :

la division par 0 n'est pas une opération autorisée ![1]

Exemples :

$5 \times \dfrac{15}{5} = 15$ ainsi $\dfrac{15}{5} = 3$: une fraction peut correspondre à un **nombre entier** .

Réciproquement, comme $3 = 3 \div 1 = \dfrac{3}{1}$, tout nombre entier a peut s'écrire sous la forme d'une fraction $a = \dfrac{a}{1}$ [2]

$4 \times \dfrac{7}{4} = 7$ et $7 \div 4 = 1{,}75$ donc la fraction $\dfrac{7}{4}$ correspond à **un nombre décimal** .
Réciproquement, le nombre décimal $3{,}141\,592 = \dfrac{3\,141\,592}{1\,000\,000}$, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

$3 \times \dfrac{4}{3} = 4$ et $4 \div 3 \approx 1{,}333$, $\dfrac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal, c'est **un nombre rationnel** .[3]

II — Égalité de fractions : le produit en croix

Propriété 3.1 : Égalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ [4]

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times b}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre non nul on obtient une fraction égale.

Démonstration :

Sur un exemple générique :
Considérons la fraction $\dfrac{5}{3}$. Elle a pour propriété fondamentale de vérifier $3 \times \dfrac{5}{3} = 5$.

Choisissons un nombre entier quelconque, par exemple 9. On peut multiplier l'égalité précédente par 9 :

$$9 \times 3 \times \frac{5}{3} = 9 \times 5$$

$$27 \times \frac{5}{3} = 45$$

On sait également que par définition la fraction $\frac{45}{27}$ vérifie $27 \times \frac{45}{27} = 45$.

Par conséquent, $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$ c'est-à-dire $\frac{5}{3} = \frac{9 \times 5}{9 \times 3} = \frac{45}{27}$. [5]

De manière générale :

Pour a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$ on a $b \times \frac{a}{b} = a$
k un nombre entier relatif non nul, on peut multiplier l'égalité précédente par k :

$$k \times b \times \frac{a}{b} = a \times k$$

$$b \times k \times \frac{a}{b} = a \times k$$

Or par définition du quotient : $b \times k \times \frac{a \times b}{b \times k} = a \times k$

Finalement en observant ces deux égalités on constate que $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

CQFD

EXEMPLES :

Cette propriété permet de simplifier les fractions :
$A = \frac{56}{64} = \frac{8 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7}{8}$
Il y a souvent plusieurs manières de simplifier une fraction :
$A = \frac{56}{64} = \frac{2 \times 28}{2 \times 32} = \frac{28}{32} = \frac{2 \times 14}{2 \times 16} = \frac{14}{16} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} = \frac{7}{8}$

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales entre elles :

REMARQUE :

La connaissance des critères de divisibilité est souvent utile pour simplifier des fractions.

- un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8;
- un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3;
- un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par le chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4;
- un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5;
- un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3;
- un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9;
- un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

EXEMPLE :

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales à un dénominateur fixé à l'avance :

$\frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9} = \frac{7\times 2}{7\times 3} = \frac{14}{21} = \frac{12\times 2}{12\times 3} = \frac{24}{36} = \frac{9\times 2}{9\times 3} = \frac{18}{27} = \ldots$

PROPRIÉTÉ 3.2 : Le produit en croix

Dire que deux fractions sont égales revient exactement à dire que leurs produits en croix sont égaux.

Plus précisément,

a, b, c et d quatre nombres entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a \times d = b \times c$.

III — Somme algébrique de fractions

PROPRIÉTÉ 3.3 : Somme de fractions

a, b et c des nombres entiers rationnels avec $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

DÉMONSTRATION :

Sur un exemple générique :

Calculons la somme $\frac{7}{9} + \frac{13}{9}$.

On sait que $9 \times \frac{7}{9} = 7$ et que $9 \times \frac{13}{9} = 13$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$9 \times \frac{7}{9} + 9 \times \frac{13}{9} = 7 + 13$$

On factorise le facteur commun 9 :

$$9 \times \left(\frac{7}{9} + \frac{13}{9}\right) = 20$$

D'autre part on sait que :

$$9 \times \frac{20}{9} = 20$$

On en déduit que :

$$\frac{7}{9} + \frac{13}{9} = \frac{20}{9}$$

Dans un cas plus général, a, b et c des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$.

On souhaite calculer la somme $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}$.

On sait que $b\times\dfrac{a}{b}=a$ et que $b\times\dfrac{c}{b}=c$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$b\times\frac{a}{b}+b\times\frac{c}{b}=a+b$$

On factorise le facteur commun b :

$$b\times\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)=a+c$$

D'autre part on sait que :

$$b\times\frac{a+c}{b}=a+c$$

On en déduit que :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

CQFD

REMARQUE :

Les nombres entiers a et c sont relatifs. Cette propriété concerne donc la somme algébrique de fractions, c'est-à-dire l'addition et la soustraction ordinaire.

Ainsi $\dfrac{5}{3}+\dfrac{-4}{3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5+(-4)}{3}=\dfrac{1}{3}$

On a vu quand on a étudié le quotient des nombres relatifs que $\dfrac{4}{3}=\dfrac{-4}{-3}$ et que $\dfrac{-4}{3}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$.

On privilégiera les nombres entiers positifs au numérateur et au dénominateur des fractions !

EXEMPLES :

$\dfrac{3}{4}+\dfrac{6}{4}=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{6}{7}-\dfrac{11}{7}=-\dfrac{5}{7}$

REMARQUE IMPORTANTE :

On ne sait faire la somme algébrique que de fractions ayant le même dénominateur. Pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents il faut donc les modifier pour qu'elles puissent correspondre à la propriété !

MÉTHODE 3 . 1 : Somme algébrique des fractions
Premier cas : les fractions ont le même dénominateur.

Il suffit d'appliquer la propriété précédente.

$\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{5}-\dfrac{16}{5}=\dfrac{3+7-16}{5}=-\dfrac{-6}{5}$

Deuxième cas : une des fractions a un dénominateur multiple de l'autre.

Le dénominateur multiple de l'autre est un dénominateur commun.

$\dfrac{5}{7}+\dfrac{10}{21}$, $21=7\times3$ est un multiple de 7.

$\dfrac{5}{7}+\dfrac{10}{21}=\dfrac{5\times3}{7\times3}+\dfrac{10}{21}=\dfrac{15}{21}+\dfrac{10}{21}=\dfrac{35}{21}$

Il est souvent nécessaire de simplifier le résultat : $\dfrac{35}{21}=\dfrac{7\times 5}{7\times 3}=\dfrac{5}{3}$

Cas particulier : en présence d'unités !

$5+\dfrac{7}{9}=\dfrac{5}{1}+\dfrac{7}{9}$, tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 1.

$\dfrac{5\times 9}{1\times 9}+\dfrac{7}{9}=\dfrac{45}{9}+\dfrac{7}{9}=\dfrac{52}{9}$

Troisième cas : les deux dénominateurs n'ont rien en commun !

Le produit de ces dénominateurs est un dénominateur commun.

$\dfrac{7}{8}+\dfrac{6}{5}$, le produit $8\times 5=40$ est un multiple commun à 8 et 5.

$\dfrac{7\times 5}{8\times 5}+\dfrac{6\times 8}{5\times 8}=\dfrac{35}{40}+\dfrac{48}{40}=\dfrac{73}{40}$

Attention, le produit de deux dénominateurs n'est pas toujours le plus petit dénominateur commun !

$\dfrac{7}{12}-\dfrac{4}{15}$, $12\times 15=180$ est un dénominateur commun possible... mais il y a mieux !

On peut lister les multiples de 12 : $12-24-36-48-60-72$... et ceux de 15 : $15-30-45-60$...
60 est un dénominateur commun plus petit !

$\dfrac{7}{12}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{7\times 5}{12\times 5}-\dfrac{4\times 4}{15\times 4}=\dfrac{35}{60}-\dfrac{16}{60}=\dfrac{19}{60}$

IV — Produit des fractions

PROPRIÉTÉ 3.4 : Produit de deux fractions

a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs, $b\neq 0$ et $d\neq 0$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

DÉMONSTRATION :

Sur un exemple générique :

Calculons $\dfrac{5}{3}\times\dfrac{4}{7}$

On sait que $3\times\dfrac{5}{3}=5$ et que $7\times\dfrac{4}{7}=4$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$3\times\frac{5}{3}\times 7\times\frac{4}{7}=5\times 4$$

$$3\times 7\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}=20$$

$$21\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}=20$$

De plus on sait que :

$$21 \times \frac{20}{21} = 20$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21} = \frac{5 \times 4}{3 \times 7}$

De manière générale, a, b, c et d des entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Calculons $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

On sait que $b \times \frac{a}{b} = a$ et que $d \times \frac{c}{d} = c$

On peut multiplier les membres de ces égalités :

$$b \times \frac{a}{b} \times d \times \frac{c}{d} = a \times c$$

$$b \times d \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \times c$$

De plus on sait que :

$$b \times d \times \frac{a \times c}{b \times d} = a \times c$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

CQFD

EXEMPLES :

$\frac{5}{3} \times \frac{7}{13} = \frac{5 \times 7}{3 \times 13} = \frac{35}{39}$

Il est souvent conseillé de simplifier un produit avant de l'effectuer :

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{560}{360}$: mais il faut alors simplifier !

$\frac{16}{15} \times \frac{35}{24} = \frac{16 \times 35}{15 \times 24} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{8 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 3} = \frac{2 \times 7}{3 \times 3} = \frac{14}{9}$

De manière encore plus caricaturale ....

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{5\,184}{3\,528}$: oups !

$\frac{64}{63} \times \frac{81}{56} = \frac{64 \times 81}{63 \times 56} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 8 \times 9 \times 9}{7 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 7} = \frac{72}{49}$

V — Quotient des fractions

Définition 3.2 : Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

Exemples :

$0,5\times 2=1$: $0,5$ et 2 sont inverses l'un de l'autre.
On dit que 2 est l'inverse de $0,5$ ou que $0,5$ est l'inverse de 2.

$0,2\times 5=1$: $0,2$ et 5 sont inverses l'un de l'autre.

$1\times 1=1$: 1 est son propre inverse, $-1)\times(-1)=1$, -1 aussi.

Remarque :

Pour tout nombre k on sait que $0\times k=0$.
Le nombre 0 ne possède pas d'inverse.

Propriété 3.5 : Inverse d'un nombre entier relatif

a un entier relatif, $a\neq 0$.

$\dfrac{1}{a}$ est l'inverse de a.

Démonstration :

C'est la définition de la fraction quotient : $a\times\dfrac{1}{a}=1$!

Sur un exemple générique on a : $3\times\dfrac{1}{3}=1$

CQFD

Exemples :

$\dfrac{1}{2}=0,5$ est l'inverse de 2.

$\dfrac{1}{5}=0,2$ est l'inverse de 5.

Propriété 3.6 : Inverse d'un nombre rationnel

a et b deux nombres entiers relatifs et $a\neq 0$, $b\neq 0$

L'inverse de la fraction $\dfrac{a}{b}$ est la fraction $\dfrac{b}{a}$.

Démonstration :

Sur un exemple générique, il est évident de voir que $\dfrac{5}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{5\times 4}{4\times 5}=\dfrac{20}{20}=1$

Plus généralement on a $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{a\times b}{b\times a}=1$

Propriété 3.7 : Diviser deux fractions

Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse.

Plus précisément, a, b, c et d des nombres relatifs tous non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un entier positif,

Le quotient $5 \div 3$ correspond à la fraction $\frac{5}{3}$.

Or on sait que $5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Finalement $5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$.

De manière générale a et b deux entiers positifs non nuls,

On a $a \div b = \frac{a}{b}$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un nombre rationnel,

On veut calculer $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{7}{4} \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{4}{7}$ inverse de $\frac{7}{4}$. On obtient :

$$\frac{7}{4} \times \mathrm{Q} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{7}{4} \times \frac{4}{7} \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$1 \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$

De manière plus générale,

On veut calculer $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{c}{d} \times \mathrm{Q} = \frac{a}{b}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{d}{c}$ inverse de $\frac{c}{d}$. On obtient :

$$\frac{c}{d} \times Q \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$1 \times Q = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

CQFD

EXEMPLE :

$\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$

EXERCICE N° 3.1 : La fraction quotient

Recopier les égalités suivantes en complétant la partie manquante avec un nombre entier, un nombre décimal ou une fraction. Quand il y a plusieurs de ces réponses est possible, les écrire toutes !

$3 \times \quad = 15$	$3 \times \quad = 2$	$\quad \times \dfrac{3}{7} = 15$
$8 \times \quad = 12$	$\quad \times \dfrac{5}{4} = 5$	$\quad \times \dfrac{9}{4} = 18$
$5 \times \quad = 2$	$\quad \times \dfrac{7}{9} = 7$	$20 \times \dfrac{6}{5} = \quad$
$6 \times \quad = 10$	$8 \times \dfrac{11}{8} = \quad$	$48 \times \dfrac{11}{6} = \quad$

EXERCICE N° 3.2 : Simplification de fractions

Simplifier au maximum les fractions suivantes en détaillant votre réponse :

$\dfrac{6}{9}$	$\dfrac{9}{45}$	$\dfrac{56}{63}$
$\dfrac{16}{24}$	$\dfrac{45}{9}$	$\dfrac{128}{96}$
$\dfrac{11}{22}$	$\dfrac{64}{48}$	$\dfrac{315}{405}$

EXERCICE N° 3.3 : Égalité de fractions

Recopier les égalités suivantes en complétant les nombres manquants :

$$\frac{5}{4} = \frac{\quad}{20} = \frac{20}{\quad} = \frac{35}{\quad} = \frac{\quad}{36} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{\quad} = \frac{28}{\quad} = \frac{\quad}{56} = \frac{56}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{\quad}{5} = \frac{18}{\quad} = \frac{27}{\quad} = \frac{\quad}{55} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{32}{24} = \frac{\quad}{9} = \frac{28}{\quad} = \frac{\quad}{36} = \frac{\quad}{40} = \frac{\quad}{\quad}$$

EXERCICE N° 3.4 : Avec le même dénominateur et des nombres entiers

Pour ajouter ou soustraire deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'ajouter et soustraire les numérateurs. Le dénominateur du résultat est le même que celui des termes de départ.

$$\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5-1}{3}=\frac{4}{3} \text{ et } \frac{6}{7}+\frac{5}{7}=\frac{11}{7}$$

Calculer de même :

$A=\frac{5}{2}+\frac{6}{2}$ $\qquad$ $C=\frac{15}{4}+\frac{9}{4}$ $\qquad$ $E=\frac{8}{11}-\frac{13}{11}$

$B=\frac{7}{8}-\frac{5}{8}$ $\qquad$ $D=\frac{11}{7}-\frac{4}{7}$ $\qquad$ $F=\frac{7}{6}-\frac{11}{6}$

EXERCICE N° 3.5 : Avec le même dénominateur et des nombres entiers relatifs

Calculer :

$A=\frac{5}{2}+\frac{-6}{2}$ $\qquad$ $C=\frac{-15}{4}+\frac{9}{4}$ $\qquad$ $E=-\frac{8}{11}-\frac{-13}{11}$

$B=\frac{-7}{8}-\frac{-5}{8}$ $\qquad$ $D=\frac{-11}{7}-\frac{-4}{7}$ $\qquad$ $F=-\frac{-7}{6}-\frac{-11}{6}$

EXERCICE N° 3.6 : Avec des dénominateurs multiples l'un de l'autre

Quand les fractions ont des dénominateurs différents, il faut les modifier pour qu'elles aient le même dénominateur. Ce dénominateur commun est un multiple des dénominateurs des fractions de départ.

$$\frac{5}{2}+\frac{7}{8}=\frac{5\times4}{2\times4}+\frac{7}{8}=\frac{20}{8}+\frac{7}{8}=\frac{27}{8}$$

Calculer :

$A=\frac{5}{3}-\frac{8}{9}$ $\qquad$ $C=\frac{-15}{7}+\frac{9}{28}$ $\qquad$ $E=\frac{8}{9}-\frac{5}{27}$

$B=\frac{7}{4}+\frac{3}{16}$ $\qquad$ $D=\frac{-11}{2}-\frac{1}{10}$ $\qquad$ $F=\frac{1}{6}-\frac{1}{36}$

EXERCICE N° 3.7 : Avec des dénominateurs différents

Quand les fractions ont des dénominateurs différents, il faut les modifier pour qu'elles aient le même dénominateur. Ce dénominateur commun est un multiple des dénominateurs des fractions de départ.

$$\frac{5}{2}+\frac{7}{3}=\frac{5\times3}{2\times3}+\frac{7\times2}{3\times2}=\frac{15}{6}+\frac{14}{6}=\frac{29}{6}$$

Calculer :

$A=\frac{5}{3}+\frac{7}{4}$ $\qquad$ $C=\frac{4}{9}-\frac{3}{5}$ $\qquad$ $E=1+\frac{5}{3}$

$B=\frac{7}{5}+\frac{8}{7}$ $\qquad$ $D=\frac{5}{12}-\frac{3}{15}$ $\qquad$ $F=\frac{8}{5}-5$

Exercice n° 3.8 : **Avec des dénominateurs différents**

Calculer :

$A = 3 - \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{4}$

$B = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

$C = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{8}$

$D = \dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{18}$

$E = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{5}$

$F = \dfrac{3}{7} - \dfrac{5}{2} + \dfrac{4}{3}$

Contrôle de mathématiques

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Exercice n° 1 : *(4 points)*

Cet exercice est à compléter directement sur le sujet.

Compléter les fractions suivantes :

$$\frac{7}{3} = \frac{\ldots}{24} = \frac{49}{\ldots} = \frac{56}{\ldots}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{\ldots}{36} = \frac{60}{\ldots} = \frac{36}{\ldots}$$

$$\frac{12}{7} = \frac{\ldots}{49} = \frac{36}{\ldots} = \frac{60}{\ldots}$$

Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$A = \frac{42}{49} =$$

$$B = \frac{75}{55} =$$

$$C = \frac{84}{96} =$$

Exercice n° 2 : *(6 points)*

Cet exercice doit être rédigé sur votre copie.
Calculer et simplifier les expressions suivantes en détaillant votre démarche :

$$A = \frac{5}{3} - \frac{11}{3} + \frac{4}{3} \qquad B = \frac{3}{5} - \frac{2}{15} \qquad C = 2 + \frac{3}{4} - \frac{4}{3} \qquad D = \frac{2}{7} - \frac{8}{5}$$

Exercice n° 3 : *(4 points)*

Cet exercice doit être rédigé sur votre copie.
Calculer et simplifier au maximum les expresssions suivantes en détaillant votre démarche :

$$E = \frac{5}{3} \times \frac{8}{7} \qquad F = \frac{15}{16} \times \frac{4}{5} \qquad G = \frac{12}{5} \times \frac{5}{36} \qquad H = \frac{64}{63} \times \frac{49}{72}$$

Exercice n° 4 : *(6 points)*

Cet exercice doit être rédigé sur votre copie.
Calculer et simplifier au maximum les expresssions suivantes en détaillant votre démarche :

$$I = \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} - \frac{7}{3} \qquad J = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \times \frac{2}{5} \qquad K = \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) \qquad L = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(2 + \frac{1}{3}\right)$$

Contrôle de mathématiques — CORRECTION

Exercice n° 1 : Simplification de fractions CORRECTION

Simplification de fractions

$$\frac{7}{3}=\frac{7\times 8}{3\times 8}=\frac{56}{24}=\frac{7\times 7}{3\times 7}=\frac{49}{21}=\frac{56}{24}$$

$$A=\frac{42}{49}=\frac{6\times 7}{7\times 7}=\boxed{\frac{6}{7}}$$

$$\frac{12}{6}=\frac{12\times 6}{6\times 6}=\frac{72}{36}=\frac{12\times 5}{6\times 5}=\frac{60}{30}=\frac{12\times 3}{6\times 3}=\frac{36}{18}$$

$$B=\frac{75}{55}=\frac{5\times 15}{5\times 11}=\boxed{\frac{15}{11}}$$

$$\frac{12}{7}=\frac{12\times 7}{7\times 7}=\frac{84}{49}=\frac{12\times 3}{7\times 3}=\frac{36}{21}=\frac{12\times 5}{7\times 5}\frac{60}{35}$$

$$C=\frac{84}{96}=\frac{2\times 42}{2\times 48}=\frac{42}{48}=\frac{6\times 7}{6\times 8}=\boxed{\frac{7}{8}}$$

Exercice n° 2 : Somme algébrique de fractions CORRECTION

Somme algébrique de fractions

$$A=\frac{5}{3}-\frac{11}{3}+\frac{4}{3}$$

$$\boxed{A=-\frac{2}{3}}$$

$$B=\frac{3}{5}-\frac{2}{15}$$

$$B=\frac{3\times 3}{5\times 3}-\frac{2}{15}$$

$$B=\frac{9}{15}-\frac{2}{15}$$

$$\boxed{B=\frac{7}{15}}$$

$$C=2+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}$$

$$C=\frac{2\times 12}{1\times 12}+\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{4\times 4}{3\times 4}$$

$$C=\frac{24}{12}+\frac{9}{12}-\frac{16}{12}$$

$$\boxed{C=\frac{17}{12}}$$

$$D=\frac{2}{7}-\frac{8}{5}$$

$$D=\frac{2\times 5}{7\times 5}-\frac{8\times 7}{5\times 7}$$

$$D=\frac{10}{35}-\frac{56}{35}$$

$$\boxed{D=-\frac{46}{35}}$$

Exercice n° 3 : Produit de fractions CORRECTION

Produit de fractions

$$E=\frac{5}{3}\times\frac{8}{7}$$

$$\boxed{E=\frac{40}{21}}$$

$$F=\frac{15}{16}\times\frac{4}{5}$$

$$F=\frac{3\times 5\times 4}{4\times 4\times 5}$$

$$\boxed{F=\frac{3}{4}}$$

$$G=\frac{12}{5}\times\frac{5}{36}$$

$$G=\frac{12\times 5}{5\times 12\times 3}$$

$$\boxed{G=\frac{1}{3}}$$

$$H=\frac{64}{63}\times\frac{49}{72}$$

$$H=\frac{8\times 8\times 7\times 7}{7\times 9\times 8\times 9}$$

$$H=\frac{8\times 7}{9\times 9}$$

$$\boxed{H=\frac{56}{81}}$$

Exercice n° 4 : Expression complexe utilisant les fractions CORRECTION

Fractions et priorité

$I = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{3}$

$I = \dfrac{5}{12} - \dfrac{7}{3}$

$I = \dfrac{5}{12} - \dfrac{28}{12}$

$\boxed{I = -\dfrac{23}{12}}$

$J = \dfrac{8}{3} - \dfrac{8}{3} \times \dfrac{2}{5}$

$J = \dfrac{8}{3} - \dfrac{16}{15}$

$J = \dfrac{40}{15} - \dfrac{16}{15}$

$\boxed{J = \dfrac{24}{15}}$

$K = \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3}\right)$

$K = \left(\dfrac{6}{15} - \dfrac{25}{15}\right)\left(\dfrac{9}{15} + \dfrac{5}{15}\right)$

$K = -\dfrac{19}{15} \times \dfrac{14}{15}$

$\boxed{K = -\dfrac{266}{225}}$

$L = \left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4}\right)\left(2 + \dfrac{1}{3}\right)$

$L = \left(\dfrac{12}{12} - \dfrac{4}{12} + \dfrac{9}{12}\right)\left(\dfrac{6}{3} + \dfrac{1}{3}\right)$

$L = \dfrac{17}{12} \times \dfrac{7}{3}$

$\boxed{L = \dfrac{119}{36}}$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Fractions

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$\frac{7}{3} = \frac{\ldots}{21} = \frac{35}{\ldots} = \frac{56}{\ldots}$

$\frac{5}{4} = \frac{\ldots}{16} = \frac{25}{\ldots} = \frac{60}{\ldots}$

$\frac{11}{6} = \frac{\ldots}{36} = \frac{55}{\ldots} = \frac{33}{\ldots}$

$\frac{12}{7} = \frac{\ldots}{49} = \frac{36}{\ldots} = \frac{60}{\ldots}$

$\frac{16}{12} = \frac{\ldots}{27} = \frac{40}{\ldots} = \frac{24}{\ldots}$

$\frac{25}{15} = \frac{\ldots}{21} = \frac{45}{\ldots} = \frac{65}{\ldots}$

Exercice 2 : Simplifier les fractions suivantes :

$A = \frac{42}{49} =$

$B = \frac{56}{64} =$

$C = \frac{63}{72} =$

$D = \frac{75}{55} =$

$E = \frac{84}{96} =$

$F = \frac{128}{196} =$

$G = \frac{108}{162} =$

Exercice 3 : Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier votre réponse.

1. $\frac{13}{8}$ et $\frac{21}{13}$

2. $\frac{65}{39}$ et $\frac{95}{57}$

3. $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Fractions

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$\dfrac{9}{4} = \dfrac{\ldots}{16} = \dfrac{45}{\ldots} = \dfrac{63}{\ldots}$

$\dfrac{7}{3} = \dfrac{\ldots}{24} = \dfrac{49}{\ldots} = \dfrac{56}{\ldots}$

$\dfrac{12}{6} = \dfrac{\ldots}{36} = \dfrac{60}{\ldots} = \dfrac{36}{\ldots}$

$\dfrac{12}{7} = \dfrac{\ldots}{49} = \dfrac{36}{\ldots} = \dfrac{60}{\ldots}$

$\dfrac{16}{12} = \dfrac{\ldots}{27} = \dfrac{40}{\ldots} = \dfrac{24}{\ldots}$

$\dfrac{25}{15} = \dfrac{\ldots}{21} = \dfrac{45}{\ldots} = \dfrac{65}{\ldots}$

Exercice 2 : Simplifier les fractions suivantes :

$A = \dfrac{56}{64} =$

$B = \dfrac{42}{49} =$

$C = \dfrac{75}{55} =$

$D = \dfrac{63}{72} =$

$E = \dfrac{128}{196} =$

$F = \dfrac{84}{96} =$

$G = \dfrac{108}{162} =$

Exercice 3 : Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier votre réponse.

1. $\dfrac{65}{39}$ et $\dfrac{95}{57}$

2. $\dfrac{13}{8}$ et $\dfrac{21}{13}$

3. $\dfrac{22}{7}$ et $\dfrac{333}{106}$

Évaluation – Fractions — Correction

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times7}{21} = \frac{49}{21} = \frac{35}{5\times3} = \frac{35}{15} = \frac{56}{3\times8} = \frac{56}{24}$$

$$\frac{12}{7} = \frac{12\times7}{49} = \frac{84}{49} = \frac{36}{3\times7} = \frac{36}{21} = \frac{60}{7\times5} = \frac{60}{35}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5\times4}{16} = \frac{20}{16} = \frac{25}{5\times4} = \frac{25}{20} = \frac{60}{12\times4} = \frac{60}{48}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{4\times4}{4\times3} = \frac{4}{3} = \frac{36}{27} = \frac{40}{30} = \frac{24}{18}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{11\times6}{36} = \frac{66}{36} = \frac{55}{6\times5} = \frac{55}{30} = \frac{33}{3\times6} = \frac{33}{18}$$

$$\frac{25}{15} = \frac{5\times5}{5\times3} = \frac{5}{3} = \frac{35}{21} = \frac{45}{27} = \frac{65}{39}$$

Exercice 2 : Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{42}{49} = \frac{6\times7}{7\times7} = \frac{6}{7}$$

$$B = \frac{56}{64} = \frac{8\times7}{8\times8} = \frac{7}{8}$$

$$C = \frac{63}{72} = \frac{9\times7}{8\times9} = \frac{7}{8}$$

$$D = \frac{75}{55} = \frac{5\times15}{5\times11} = \frac{15}{11}$$

$$E = \frac{84}{96} = \frac{2\times42}{2\times48} = \frac{42}{48} = \frac{6\times7}{6\times8} = \frac{7}{8}$$

$$F = \frac{128}{196} = \frac{2\times64}{2\times98} = \frac{64}{98} = \frac{2\times32}{2\times49} = \frac{32}{49}$$

$$G = \frac{108}{162} = \frac{2\times54}{2\times81} = \frac{54}{81} = \frac{9\times6}{9\times9} = \frac{6}{9} = \frac{3\times2}{3\times3} = \frac{2}{3}$$

Exercice 3 : Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier votre réponse.

1. $\frac{13}{8}$ et $\frac{21}{13}$

$13\times13 = 169$ et $8\times21 = 168$ donc ces fractions ne sont pas égales.

2. $\frac{65}{39}$ et $\frac{95}{57}$

$65\times57 = 3\,705$ et $39\times95 = 3\,705$ donc elles sont égales.

3. $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$

$22\times106 = 2\,332$ et $7\times333 = 2\,333$ donc ces fractions ne sont pas égales.

Évaluation – Fractions — Correction

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$$\frac{9}{4} = \frac{9\times 4}{16} = \frac{36}{16} = \frac{45}{9\times 4} = \frac{45}{36} = \frac{63}{7\times 4} = \frac{60}{28}$$

$$\frac{12}{7} = \frac{12\times 7}{49} = \frac{84}{49} = \frac{36}{3\times 7} = \frac{36}{21} = \frac{60}{7\times 5} = \frac{60}{35}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times 7}{21} = \frac{49}{21} = \frac{35}{5\times 3} = \frac{35}{15} = \frac{56}{3\times 8} = \frac{56}{24}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{4\times 4}{4\times 3} = \frac{4}{3} = \frac{36}{27} = \frac{40}{30} = \frac{24}{18}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{12\times 6}{36} = \frac{72}{36} = \frac{60}{6\times 5} = \frac{60}{30} = \frac{36}{3\times 6} = \frac{36}{18}$$

$$\frac{25}{15} = \frac{5\times 5}{5\times 3} = \frac{5}{3} = \frac{35}{21} = \frac{45}{27} = \frac{65}{39}$$

Exercice 2 : Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{56}{64} = \frac{8\times 7}{8\times 8} = \frac{7}{8}$$

$$E = \frac{128}{196} = \frac{2\times 64}{2\times 98} = \frac{64}{98} = \frac{2\times 32}{2\times 49} = \frac{32}{49}$$

$$B = \frac{42}{49} = \frac{6\times 7}{7\times 7} = \frac{6}{7}$$

$$E = \frac{84}{96} = \frac{2\times 42}{2\times 48} = \frac{42}{48} = \frac{6\times 7}{6\times 8} = \frac{7}{8}$$

$$C = \frac{75}{55} = \frac{5\times 15}{5\times 11} = \frac{15}{11}$$

$$G = \frac{108}{162} = \frac{2\times 54}{2\times 81} = \frac{54}{81} = \frac{9\times 6}{9\times 9} = \frac{6}{9} = \frac{3\times 2}{3\times 3} = \frac{2}{3}$$

$$D = \frac{63}{72} = \frac{9\times 7}{8\times 9} = \frac{7}{8}$$

Exercice 3 : Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier votre réponse.

1. $\frac{65}{39}$ et $\frac{95}{57}$

$65\times 57 = 3705$ et $39\times 95 = 3705$ donc elles sont égales.

2. $\frac{13}{8}$ et $\frac{21}{13}$

$13\times 13 = 169$ et $8\times 21 = 168$ donc ces fractions ne sont pas égales.

3. $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$

$22\times 106 = 2332$ et $7\times 333 = 2333$ donc ces fractions ne sont pas égales.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Fractions

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$6\times \quad = 5$ $8\times \quad = 7$

$9\times \quad = 1$ $7\times \quad = 8$

Exercice 2 : Compléter en indiquant les étapes :

$A = \frac{7}{3} = \qquad = \frac{28}{}$ $E = \frac{21}{14} = \qquad = \frac{}{18}$

$B = \frac{5}{8} = \qquad = \frac{}{48}$ $F = \frac{27}{36} = \qquad = \frac{}{16}$

$C = \frac{7}{11} = \qquad = \frac{}{77}$ $G = \frac{45}{35} = \qquad = \frac{}{49}$

$D = \frac{8}{3} = \qquad = \frac{56}{}$ $H = \frac{48}{32} = \qquad = \frac{}{22}$

Exercice 3 : Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$I = \frac{42}{49} =$ $M = \frac{84}{96} =$

$J = \frac{56}{64} =$

$N = \frac{128}{196} =$

$K = \frac{63}{72} =$

$O = \frac{108}{162} =$

$L = \frac{75}{55} =$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation – Fractions

Exercice 1 : Compléter les égalités suivantes :

$7\times \quad = 5$ $6\times \quad = 7$

$11\times \quad = 1$ $7\times \quad = 6$

Exercice 2 : Compléter en indiquant les étapes :

$A = \frac{8}{3} = \qquad = \frac{32}{\quad}$ $E = \frac{24}{16} = \qquad = \frac{\quad}{18}$

$B = \frac{5}{6} = \qquad = \frac{\quad}{48}$ $F = \frac{27}{36} = \qquad = \frac{\quad}{16}$

$C = \frac{9}{11} = \qquad = \frac{\quad}{77}$ $G = \frac{45}{35} = \qquad = \frac{\quad}{49}$

$D = \frac{8}{5} = \qquad = \frac{56}{\quad}$ $H = \frac{48}{32} = \qquad = \frac{\quad}{22}$

Exercice 3 : Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$I = \frac{56}{64} =$ $M = \frac{84}{96} =$

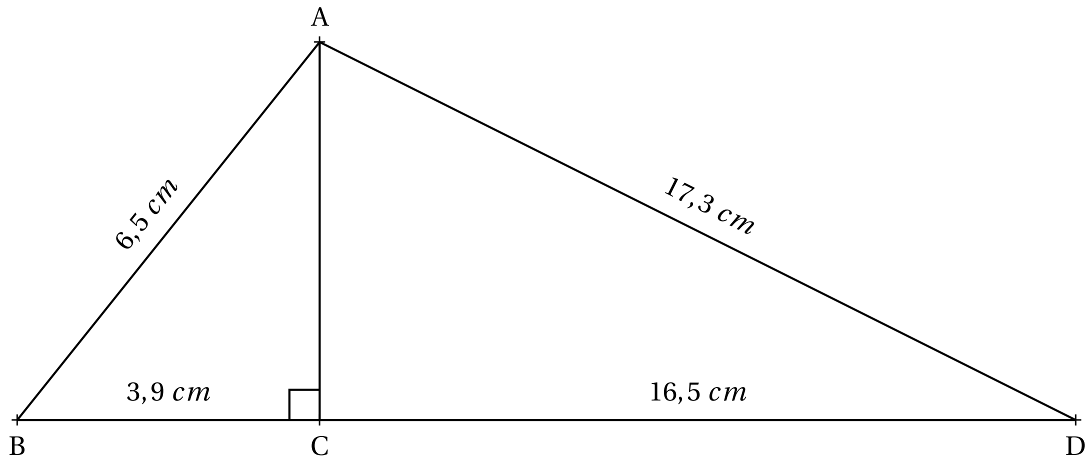
$J = \frac{42}{49} =$ $N = \frac{196}{128} =$

$K = \frac{72}{63} =$ $O = \frac{162}{108} =$

$L = \frac{75}{55} =$

Évaluation de mathématiques

Exercice 1 *(6 points)*



1. Calculer la longueur AC

2. On admettra dans cette question que AC = 5,2 cm. Le triangle ACD est-il rectangle ?

3. Sachant que les points B, C et D sont alignés, le triangle BAD est-il rectangle ?

Exercice 2 : Calculer en détaillant vos calculs et en simplifiant au maximum votre résultat : *(10 points)*

$A = \frac{7}{9} + \frac{8}{9} - \frac{14}{9}$ $\quad$ $D = \frac{7}{5} - \frac{8}{7}$ $\quad$ $G = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} - \frac{11}{12}$

$B = 3 - \frac{3}{10} - \frac{33}{10}$ $\quad$ $E = 5 - \frac{8}{3}$ $\quad$ $H = \frac{4}{7} - \frac{1}{4} + 3$

$C = \frac{5}{3} - \frac{7}{15}$ $\quad$ $F = 3 + \frac{5}{4} - \frac{1}{20}$ $\quad$ $I = \frac{7}{12} - \frac{17}{15} - \frac{31}{60}$

Exercice 3 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies. Justifier à chaque fois votre réponse. *(4 points)*

1. Lorsque l'on multiplie $\frac{7}{3}$ par 7 on obtient 3.

2. Les fractions $\frac{78}{102}$ et $\frac{143}{187}$ sont égales.

3. $\frac{99}{70}$ et $\frac{577}{408}$ sont égales.

Évaluation de mathématiques — Correction

Exercice 1

1.
Dans le triangle ABC rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2=\mathrm{AB}^2$$
$$\mathrm{CA}^2+3,9^2=6,5^2$$
$$\mathrm{CA}^2+15,21=42,25$$
$$\mathrm{CA}^2=42,25-15,21$$
$$\mathrm{CA}^2=27,04$$
$$\mathrm{CA}=\sqrt{27,04}$$
$$\mathrm{CA}=5,2$$

$\boxed{\mathrm{CA}=5,2\ cm}$

2.
Comparons $\mathrm{CA}^2+\mathrm{CD}^2$ et AD^2 :

$\mathrm{CA}^2+\mathrm{CD}^2$	AD^2
$5,2^2+16,5^2$	$17,3^2$
$27,04+272,25$	
$299,29$	$299,29$

Comme $\mathrm{CA}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AD}^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle CAD est rectangle en C}}$.

3.
Comparons $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2$ et BD^2 :

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2$	BD^2
$6,5^2+17,3^2$	$(3,9+16,5)^2$
$42,25+299,29$	$20,4^2$
$341,54$	$416,16$

Comme

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2\neq\mathrm{BD}^2$$

, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle ABD n'est pas rectangle}}$.

Exercice 2 : Calculer en détaillant vos calculs et en simplifiant au maximum votre résultat : *(10 points)*

$A = \frac{7}{9} + \frac{8}{9} - \frac{14}{9}$

$\boxed{A = \frac{1}{9}}$

$B = 3 - \frac{3}{10} - \frac{33}{10}$

$B = \frac{3 \times 10}{1 \times 10} - \frac{3}{10} - \frac{33}{10}$

$B = \frac{30}{10} - \frac{3}{10} - \frac{33}{10}$

$B = \frac{-6}{10}$

$B = \frac{3 \times 2}{5 \times 2}$

$\boxed{B = \frac{3}{5}}$

$C = \frac{5}{3} - \frac{7}{15}$

$C = \frac{5 \times 5}{3 \times 5} - \frac{7}{15}$

$C = \frac{25}{15} - \frac{7}{15}$

$C = \frac{18}{15}$

$C = \frac{6 \times 3}{3 \times 5}$

$\boxed{C = \frac{6}{5}}$

$D = \frac{7}{5} - \frac{8}{7}$

$D = \frac{7 \times 7}{5 \times 7} - \frac{8 \times 5}{7 \times 5}$

$D = \frac{49}{35} - \frac{40}{35}$

$\boxed{D = \frac{9}{35}}$

$E = 5 - \frac{8}{3}$

$E = \frac{5 \times 3}{1 \times 3} - \frac{8}{3}$

$E = \frac{15}{3} - \frac{8}{3}$

$\boxed{E = \frac{7}{3}}$

$F = 3 + \frac{5}{4} - \frac{1}{20}$

$F = \frac{3 \times 20}{1 \times 20} + \frac{5 \times 5}{4 \times 5} - \frac{1}{20}$

$F = \frac{60}{20} + \frac{25}{20} - \frac{1}{20}$

$F = \frac{84}{20}$

$F = \frac{4 \times 21}{4 \times 5}$

$\boxed{F = \frac{21}{5}}$

$G = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} - \frac{11}{12}$

$G = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{4 \times 4}{3 \times 4} - \frac{11}{12}$

$G = \frac{9}{12} - \frac{16}{12} - \frac{11}{12}$

$G = \frac{-18}{12}$

$G = \frac{-3 \times 6}{6 \times 2}$

$\boxed{G = \frac{-3}{2}}$

$H = \frac{4}{7} - \frac{1}{4} + 3$

$H = \frac{4 \times 4}{7 \times 4} - \frac{1 \times 7}{4 \times 7} + \frac{3 \times 28}{1 \times 28}$

$H = \frac{16}{28} - \frac{7}{28} + \frac{84}{28}$

$\boxed{H = \frac{93}{28}}$

$I = \frac{7}{12} - \frac{17}{15} - \frac{31}{60}$

$I = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} - \frac{17 \times 4}{15 \times 4} - \frac{31}{60}$

$I = \frac{35}{60} - \frac{68}{60} - \frac{31}{60}$

$I = \frac{-64}{60}$

$I = \frac{-16 \times 4}{15 \times 4}$

$\boxed{I = \frac{-16}{15}}$

Exercice 3 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies. Justifier à chaque fois votre réponse. *(4 points)*

1. Lorsque l'on multiplie $\frac{7}{3}$ par 7 on obtient 3. On sait que $3 \times \frac{7}{3} = 7$ donc $\boxed{\text{Affirmation n° 1 est fausse}}$.

2. Les fractions $\frac{78}{102}$ et $\frac{143}{187}$ sont égales. Comme $78 \times 187 = 14\,586$ et $102 \times 143 = 14\,586$, $\boxed{\text{Affirmation n° 2 est vraie}}$.

3. $\frac{99}{70}$ et $\frac{577}{408}$ sont égales. Comme $99 \times 408 = 40\,392$ et $70 \times 577 = 40\,390$, $\boxed{\text{Affirmation n° 3 est fausse}}$.

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

[2]De plus $\dfrac{15}{5} = 3$ et $\dfrac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\dfrac{a}{b}$ telle que $b \times \dfrac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

[5]L'identification précédente entre $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \dfrac{5}{3} = 45$ et $27 \times \dfrac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \dfrac{5}{3} - 27 \times \dfrac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\dfrac{5}{3} = \dfrac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!