I — Définition du quotient

Définition 3.1 : Fraction

a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$

La **fraction** $\dfrac{a}{b}$ désigne le quotient $a \div b$ de a par b, c'est-à-dire un nombre vérifiant :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

- a est le **numérateur** de la fraction ;
- b est le **dénominateur** de la fraction ;
- a et b sont séparés par **la barre de fraction** ou vinculum.

Remarque :

la division par 0 n'est pas une opération autorisée ![1]

Exemples :

$5 \times \dfrac{15}{5} = 15$ ainsi $\dfrac{15}{5} = 3$: une fraction peut correspondre à un **nombre entier** .

Réciproquement, comme $3 = 3 \div 1 = \dfrac{3}{1}$, tout nombre entier a peut s'écrire sous la forme d'une fraction $a = \dfrac{a}{1}$ [2]

$4 \times \dfrac{7}{4} = 7$ et $7 \div 4 = 1,75$ donc la fraction $\dfrac{7}{4}$ correspond à **un nombre décimal** .
Réciproquement, le nombre décimal $3{,}141\,592 = \dfrac{3\,141\,592}{1\,000\,000}$, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

$3 \times \dfrac{4}{3} = 4$ et $4 \div 3 \approx 1,333$, $\dfrac{4}{3}$ n'est pas un nombre décimal, c'est **un nombre rationnel** .[3]

II — Égalité de fractions : le produit en croix

Propriété 3.1 : Égalité de fractions

a, b et k des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ [4]

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times b}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre non nul on obtient une fraction égale.

Démonstration :

Sur un exemple générique :
Considérons la fraction $\dfrac{5}{3}$. Elle a pour propriété fondamentale de vérifier $3 \times \dfrac{5}{3} = 5$.

Choisissons un nombre entier quelconque, par exemple 9. On peut multiplier l'égalité précédente par 9 :

$$9 \times 3 \times \frac{5}{3} = 9 \times 5$$

$$27 \times \frac{5}{3} = 45$$

On sait également que par définition la fraction $\frac{45}{27}$ vérifie $27 \times \frac{45}{27} = 45$.

Par conséquent, $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$ c'est-à-dire $\frac{5}{3} = \frac{9 \times 5}{9 \times 3} = \frac{45}{27}$. [5]

De manière générale :

Pour a et b deux nombres entiers relatifs et $b \neq 0$ on a $b \times \frac{a}{b} = a$
k un nombre entier relatif non nul, on peut multiplier l'égalité précédente par k :

$$k \times b \times \frac{a}{b} = a \times k$$

$$b \times k \times \frac{a}{b} = a \times k$$

Or par définition du quotient : $b \times k \times \frac{a \times b}{b \times k} = a \times k$

Finalement en observant ces deux égalités on constate que $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

CQFD

EXEMPLES :

Cette propriété permet de simplifier les fractions :
$A = \frac{56}{64} = \frac{8 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7}{8}$
Il y a souvent plusieurs manières de simplifier une fraction :
$A = \frac{56}{64} = \frac{2 \times 28}{2 \times 32} = \frac{28}{32} = \frac{2 \times 14}{2 \times 16} = \frac{14}{16} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} = \frac{7}{8}$

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales entre elles :

REMARQUE :

La connaissance des critères de divisibilité est souvent utile pour simplifier des fractions.

- un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8;
- un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3;
- un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par le chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4;
- un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5;
- un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3;
- un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9;
- un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.