EXEMPLE :

Cette propriété permet aussi d'obtenir des fractions égales à un dénominateur fixé à l'avance :

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3} = \frac{14}{21} = \frac{12 \times 2}{12 \times 3} = \frac{24}{36} = \frac{9 \times 2}{9 \times 3} = \frac{18}{27} = \ldots$

PROPRIÉTÉ 3.2 : Le produit en croix

Dire que deux fractions sont égales revient exactement à dire que leurs produits en croix sont égaux.

Plus précisément,

a, b, c et d quatre nombres entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a \times d = b \times c$.

III — Somme algébrique de fractions

PROPRIÉTÉ 3.3 : Somme de fractions

a, b et c des nombres entiers rationnels avec $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

DÉMONSTRATION :

Sur un exemple générique :

Calculons la somme $\frac{7}{9} + \frac{13}{9}$.

On sait que $9 \times \frac{7}{9} = 7$ et que $9 \times \frac{13}{9} = 13$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$9 \times \frac{7}{9} + 9 \times \frac{13}{9} = 7 + 13$$

On factorise le facteur commun 9 :

$$9 \times \left(\frac{7}{9} + \frac{13}{9}\right) = 20$$

D'autre part on sait que :

$$9 \times \frac{20}{9} = 20$$

On en déduit que :

$$\frac{7}{9} + \frac{13}{9} = \frac{20}{9}$$

Dans un cas plus général, a, b et c des nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$.

On souhaite calculer la somme $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$.

On sait que $b\times\frac{a}{b}=a$ et que $b\times\frac{c}{b}=c$.

On peut ajouter ces deux égalités :

$$b\times\frac{a}{b}+b\times\frac{c}{b}=a+b$$

On factorise le facteur commun b :

$$b\times\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)=a+c$$

D'autre part on sait que :

$$b\times\frac{a+c}{b}=a+c$$

On en déduit que :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

CQFD

REMARQUE :

Les nombres entiers a et c sont relatifs. Cette propriété concerne donc la somme algébrique de fractions, c'est-à-dire l'addition et la soustraction ordinaire.

Ainsi $\frac{5}{3}+\frac{-4}{3}=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5+(-4)}{3}=\frac{1}{3}$

On a vu quand on a étudié le quotient des nombres relatifs que $\frac{4}{3}=\frac{-4}{-3}$ et que $\frac{-4}{3}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$.

On privilégiera les nombres entiers positifs au numérateur et au dénominateur des fractions!

EXEMPLES :

$\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{9}{4}$

$\frac{6}{7}-\frac{11}{7}=-\frac{5}{7}$

REMARQUE IMPORTANTE :

On ne sait faire la somme algébrique que de fractions ayant le même dénominateur. Pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents il faut donc les modifier pour qu'elles puissent correspondre à la propriété!

MÉTHODE 3 . 1 : Somme algébrique des fractions
Premier cas : les fractions ont le même dénominateur.

Il suffit d'appliquer la propriété précédente.

$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}-\frac{16}{5}=\frac{3+7-16}{5}=-\frac{-6}{5}$

Deuxième cas : une des fractions a un dénominateur multiple de l'autre.

Le dénominateur multiple de l'autre est un dénominateur commun.

$\frac{5}{7}+\frac{10}{21}$, $21=7\times3$ est un multiple de 7.

$\frac{5}{7}+\frac{10}{21}=\frac{5\times3}{7\times3}+\frac{10}{21}=\frac{15}{21}+\frac{10}{21}=\frac{35}{21}$