V — Quotient des fractions

DÉFINITION 3.2 : Inverse d'un nombre

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit est égal à 1.

EXEMPLES :

$0,5 \times 2 = 1$: $0,5$ et 2 sont inverses l'un de l'autre.
On dit que 2 est l'inverse de $0,5$ ou que $0,5$ est l'inverse de 2.

$0,2 \times 5 = 1$: $0,2$ et 5 sont inverses l'un de l'autre.

$1 \times 1 = 1$: 1 est son propre inverse, $-1) \times (-1) = 1$, -1 aussi.

REMARQUE :

Pour tout nombre k on sait que $0 \times k = 0$.
Le nombre 0 ne possède pas d'inverse.

PROPRIÉTÉ 3.5 : Inverse d'un nombre entier relatif

a un entier relatif, $a \neq 0$.

$\frac{1}{a}$ est l'inverse de a.

DÉMONSTRATION :

C'est la définition de la fraction quotient : $a \times \frac{1}{a} = 1$!

Sur un exemple générique on a : $3 \times \frac{1}{3} = 1$

CQFD

EXEMPLES :

$\frac{1}{2} = 0,5$ est l'inverse de 2.

$\frac{1}{5} = 0,2$ est l'inverse de 5.

PROPRIÉTÉ 3.6 : Inverse d'un nombre rationnel

a et b deux nombres entiers relatifs et $a \neq 0$, $b \neq 0$

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

DÉMONSTRATION :

Sur un exemple générique, il est évident de voir que $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{5 \times 4}{4 \times 5} = \frac{20}{20} = 1$

Plus généralement on a $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$

Propriété 3.7 : Diviser deux fractions

Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse.

Plus précisément, a, b, c et d des nombres relatifs tous non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Démonstration :

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un entier positif,

Le quotient $5 \div 3$ correspond à la fraction $\frac{5}{3}$.

Or on sait que $5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Finalement $5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$.

De manière générale a et b deux entiers positifs non nuls,

On a $a \div b = \frac{a}{b}$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sur un exemple générique dans le cas de la division par un nombre rationnel,

On veut calculer $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{7}{4} \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{4}{7}$ inverse de $\frac{7}{4}$. On obtient :

$$\frac{7}{4} \times \mathrm{Q} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{7}{4} \times \frac{4}{7} \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$1 \times \mathrm{Q} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$$

On en déduit que $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7}$

De manière plus générale,

On veut calculer $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. On note Q ce résultat.

D'après la définition d'un quotient, le nombre Q vérifie l'égalité $\frac{c}{d} \times \mathrm{Q} = \frac{a}{b}$.

L'idée géniale consiste à multiplier cette égalité par le nombre rationnel non nul $\frac{d}{c}$ inverse de $\frac{c}{d}$. On obtient :

$$\frac{c}{d} \times \mathrm{Q} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} \times \mathrm{Q} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$1 \times \mathrm{Q} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On en déduit que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

CQFD

EXEMPLE :

$\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$