
Notes

¹Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

²De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$

³Certains nombres ne sont pas rationnels comme $\sqrt{2}$, π , $\cos(10^\circ)$...

⁴Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a , b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

⁵L'identification précédente entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \frac{5}{3} = 45$ et $27 \times \frac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \frac{5}{3} - 27 \times \frac{45}{27} = 0$

Ainsi $27 \left(\frac{5}{3} - \frac{45}{27} \right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre. Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!

