Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.
On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$
De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(NH'C) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(NH'H)$
Ainsi $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AH'C) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AHN)$ c'est-à-dire $\dfrac{AH' \times HC}{2} = \dfrac{AH \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$
$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$
$$MN \times HC = H'N \times BC$$

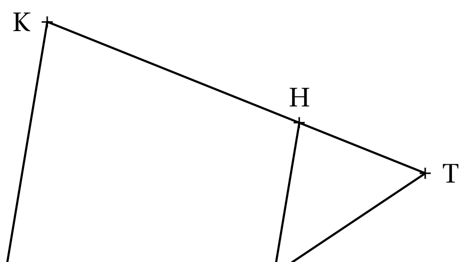
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC} = \dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

MÉTHODE 5 . 1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

TE = 3 cm

TU = 10 cm

UK = 15 cm

(TH)//(UK) TH = 4 cm

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\frac{\text{TH}}{\text{TK}}$

Nous en sommes à : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{TK} = \frac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \frac{40}{3}\ cm \approx 13{,}3\ cm$

Comme $\dfrac{3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{\text{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{EK} = \dfrac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \dfrac{45}{10}\ cm = 4,5\ cm$

Ainsi $\boxed{\text{TK} \approx 13,3\ cm}$ et $\boxed{\text{EK} = 4,5\ cm}$.

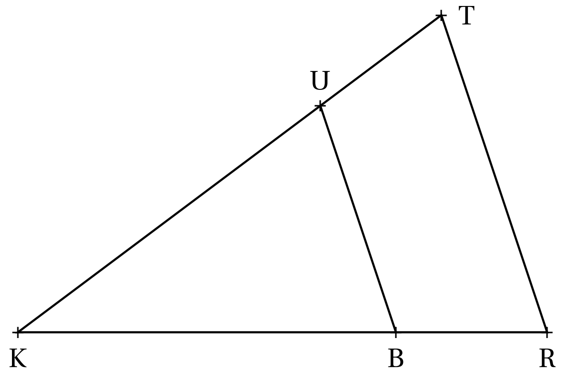
En pratique, quand on rédige seule la partie ***3.*** *doit apparaître sur une copie!*

Évaluation de mathématiques

Exercice n° 1 : *(8 points)* ☆☆

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

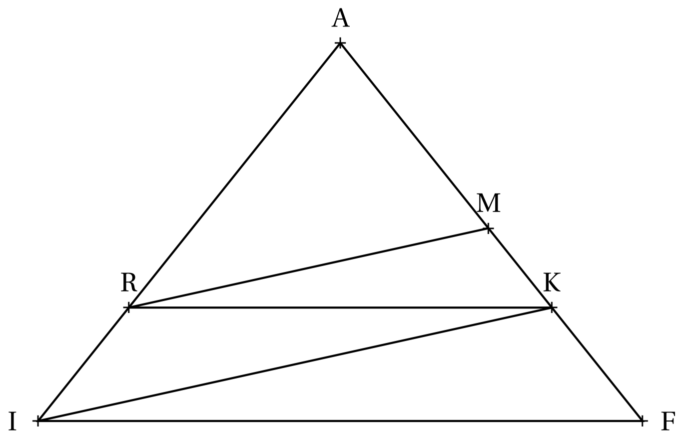
- KTR est un triangle;
- K, B et R sont alignés;
- K, U et T sont alignés;
- KU = 12 cm;
- KT = 15 cm;
- KB = 14 cm;
- UB = 8 cm.



1. Calculer TR et KR.

2. Le triangle KUB est-il rectangle?

Exercice n° 2 : *(6 points)* ☆☆



Sur la figure ci-après, nous avons les informations suivantes :

- AIF est un triangle;
- les points A, I et R sont alignés;
- les points A, M, K et F sont alignés;
- AR = 160 mm et AI = 256 mm;
- AK = 180 mm et AF = 288 mm;
- AM = 112 mm.

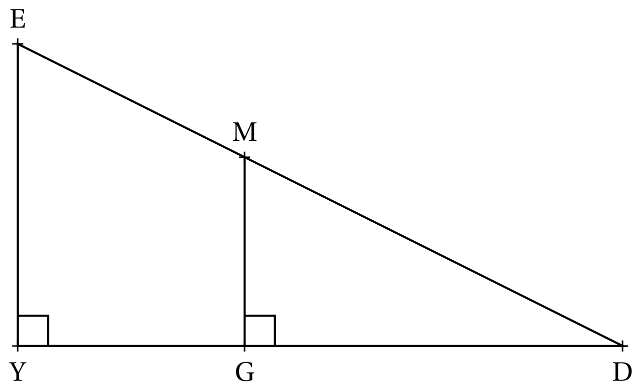
1. Les droites IF et RK sont-elles parallèles?

2. Les droites IK et RM sont-elles parallèles?

Exercice n° 3 : *(6 points)* ☆☆☆

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on a :

- DYE et DGM sont des triangles rectangles;
- DG = 48 dm et DM = 60 dm;
- YE = 54 dm



1. Montrer que MG = 36 dm.

2. Calculer YG et EM.