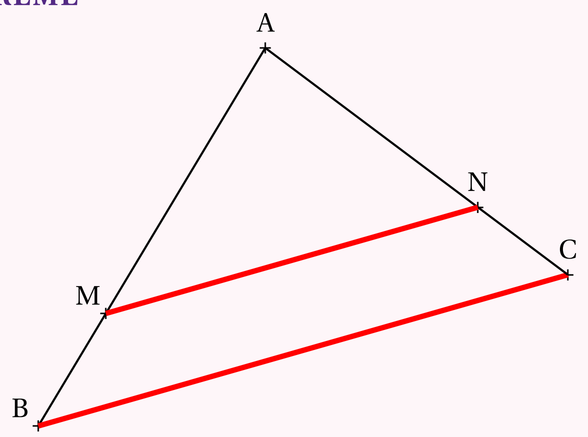
Le théorème de Thalès

Version quatrième

Le théorème



Si dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN)//(BC)
Alors

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Remarque :

Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

La règle de trois et égalité des produits en croix

Les produits en croix

Deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

a, b, c et d des nombres non nuls.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \textbf{ si et seulement si } a\times d=b\times c$$

La règle de trois

a, b et c des nombres connus non nuls.

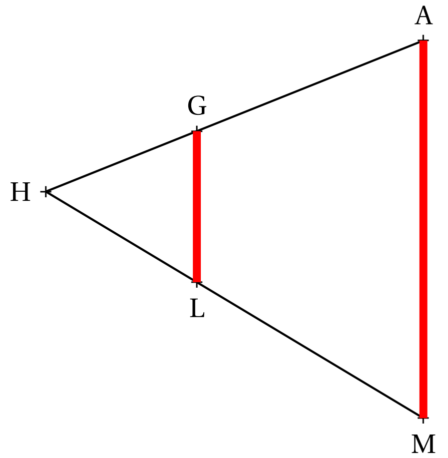
Le nombre x vérifiant $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ est $x=\frac{b\times c}{a}$

Exemple :

On sait que :

- G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
- (GL)//(AM)
- HL = 4 cm, HA = 12 cm,
- GL = 3 cm, AM = 15 cm

On veut calculer HG **et** HM**.**



Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{HL}{HM}=\frac{HG}{HA}=\frac{LG}{MA}$$

$$\frac{4\ cm}{HM}=\frac{HG}{12\ cm}=\frac{3\ cm}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm}=\frac{4\ cm}{HM}$ on a $HM=\frac{4\ cm\times 15\ cm}{3\ cm}=\frac{60}{3}\ cm=\boxed{20\ cm}$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm}=\frac{HG}{12\ cm}$ on a $HG=\frac{12\ cm\times 3\ cm}{15\ cm}=\frac{36}{15}\ cm=\boxed{2{,}4\ cm}$

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

[2]De plus $\dfrac{15}{5} = 3$ et $\dfrac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\dfrac{a}{b}$ telle que $b \times \dfrac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

[5]L'identification précédente entre $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \dfrac{5}{3} = 45$ et $27 \times \dfrac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \dfrac{5}{3} - 27 \times \dfrac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\dfrac{5}{3} = \dfrac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!