Chapitre VI

Le théorème de Thalès

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (*BO n^o 30 du 26-7-2018*) :

– À rédiger !

Compétences :

– À rédiger !

SITUATION INITIALE : La droite des milieux, la droite des tiers

La droite des milieux

1. Tracer une une feuille blanche le triangle ABC tel que AB = 8 cm, AC = 12 cm et BC = 14 cm.
Placer M le milieu de [AB] puis la droite parallèle à la droite (BC) passant par M.
Cette droite coupe le segment [AC] en N.

2. Mesurer le segment [MN]. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur la position du point N et sur la longueur MN ?

Nous allons démontrer que N est le milieu du segment [AC] et quelques petites choses en plus...

3. Placer N′ le symétrique du point N par rapport au point M.

4. Que dire du quadrilatère AN′BN ? Démontrer cette conjecture.

5. Que dire du quadrilatère NN′BC ? Démontrer cette conjecture.

6. Expliquer pourquoi AN = N′B et N′B = NC. Que pouvez-vous dire du point N ?

7. Expliquer pourquoi NN′ = BC. Que dire de la longueur MN par rapport la longueur BC ?

8. Calculer les quotients : $\frac{\text{AM}}{\text{AB}}$, $\frac{\text{AN}}{\text{AC}}$ et $\frac{\text{MN}}{\text{BC}}$.

Quelle est votre conclusion ?

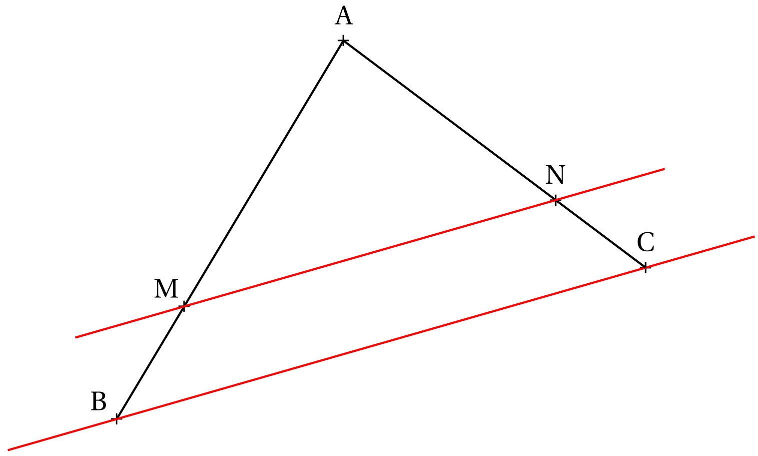
La droite des tiers

1. Tracer sur une feuille blanche un triangle ABC tel que AB = 6 cm, AC = 9 cm et BC = 12 cm.
Placer M sur le segment [AB] tel que AM = 2 cm.
Tracer la parallèle à (BC) passant par M, elle coupe le segment [AC] en N.

2. En mesurant AM et MN calculer les trois quotients comme à la question **8.** de la première partie.
Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

I — Le théorème de Thalès

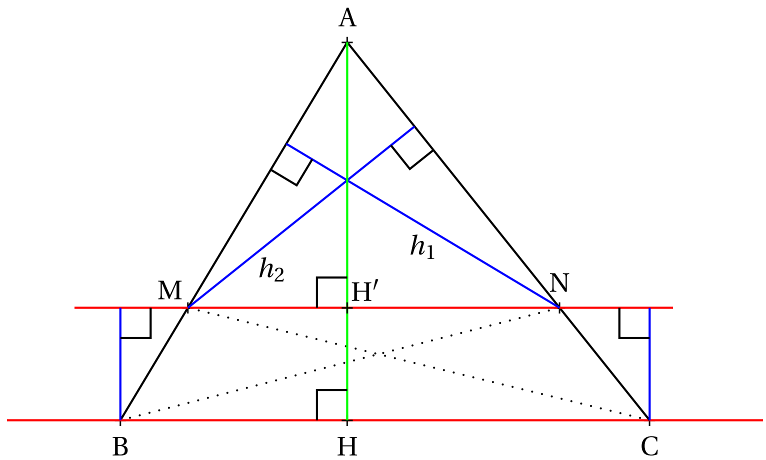
Théorème 6.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNB) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNC)$

$\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN) = AM \times h_1$ et $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ABN) = AB \times h_1$ ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN)}{\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ABN)} = \dfrac{AM}{AB}$

$\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN) = AN \times h_2$ et $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ACM) = AC \times h_2$ ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN)}{\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ACM)} = \dfrac{AN}{AC}$

On constate que $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ABN) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN) + \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNB)$ et que $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ACM) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(AMN) + \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNC)$
Comme $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNB) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(MNC)$ on prouve ainsi que $\mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ABN) = \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(ACM)$

Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.

On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$

De même dans le triangle AHC, on obtient $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{NH'C}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{NH'H})$
Ainsi $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AH'C}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AHN})$ c'est-à-dire $\frac{\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC}}{2} = \frac{\mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}}{2}$.

On prouve ainsi que $\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}$ et d'après l'égalité des produits en croix $\frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$

On prouve de même que $\frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}}$.

Nous avons donc $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ or on sait que $\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N} = \mathrm{MN}$ et que $\mathrm{HB} + \mathrm{HC} = \mathrm{BC}$

Comme $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ on a :

$$\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB}$$

Ajoutons $\mathrm{H'N} \times \mathrm{HC}$ à chaque membre de l'égalité :

$$\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC}$$
$$(\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N}) \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times (\mathrm{HB} + \mathrm{HC})$$
$$\mathrm{MN} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{BC}$$

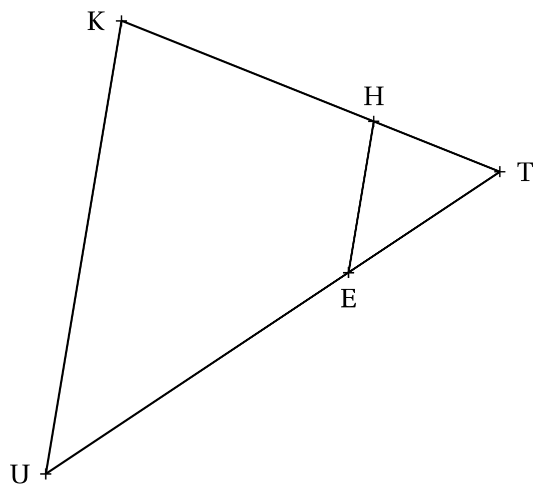
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

MÉTHODE 6 . 1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

(TH)//(UK)

TE = 3 cm

TU = 10 cm

UK = 15 cm

TH = 4 cm

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}}$

Nous en sommes à : $\frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur ; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{TE}}{\mathrm{TU}} = \frac{\mathrm{TH}}{\mathrm{TK}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\mathrm{TK}} = \frac{\mathrm{EH}}{15\ cm}$$

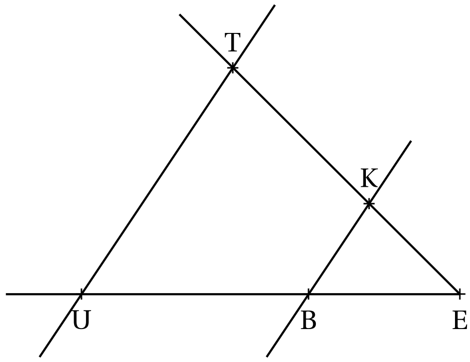
Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\mathrm{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\mathrm{TK} = \frac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \frac{40}{3}\ cm \approx 13{,}3\ cm$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{\mathrm{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\mathrm{EK} = \frac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \frac{45}{10}\ cm = 4{,}5\ cm$

Ainsi $\boxed{\mathrm{TK} \approx 13{,}3\ cm}$ et $\boxed{\mathrm{EK} = 4{,}5\ cm}$.

*En pratique, quand on rédige seule la partie **3.** doit apparaître sur une copie !*

EXERCICE N° 6.1 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

- (TK) et (UB) sont sécantes en E ;
- BE = 5 m, UE = 12 m, BK = 4 m et TE = 10 m ;
- (UT)//(BK)

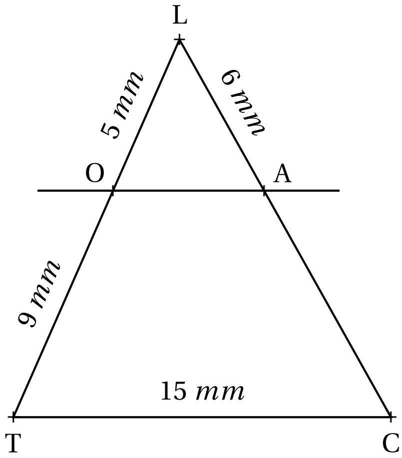
Calculer les valeurs exactes de UT et KE et,le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

EXERCICE N° 6.2 : Thalès triangle — Épisode 2

Sur la figure ci-après, qui n'est pas représentée en vraies grandeurs, nous savons que :

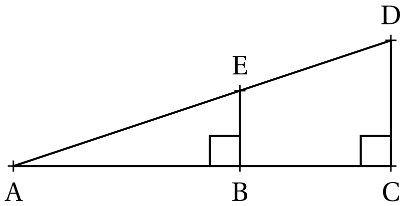
- les points L, O et T sont alignés ;
- les points L, A et C sont alignés ;
- les droites (OA) et (TC) sont parallèles.

Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.



EXERCICE N° 6.3 : Thalès ou Pythagore ?

La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.

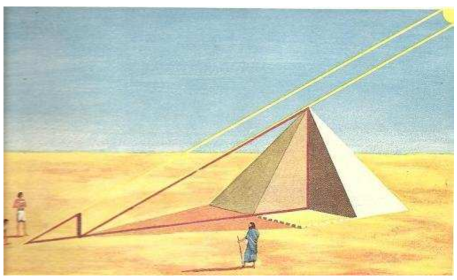


- ABE est rectangle en B ;
- ACD est rectangle en C ;
- AB = 36 m, AE = 60 m, DC = 72 m.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

EXERCICE N° 6.4 : La légende de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.
Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :
« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».

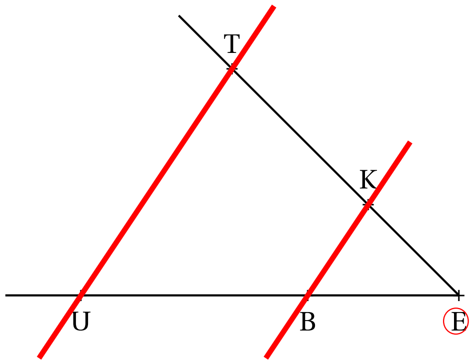


Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

- la canne de Thalès mesurait 3 coudées ;
- l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées ;
- la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide ;
- une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer ?

EXERCICE N° 6.1 : Thalès triangle CORRECTION



Dans le triangle EUT, B ∈ [UE] et K ∈ [TE]
Les droites (KB) et (TU) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

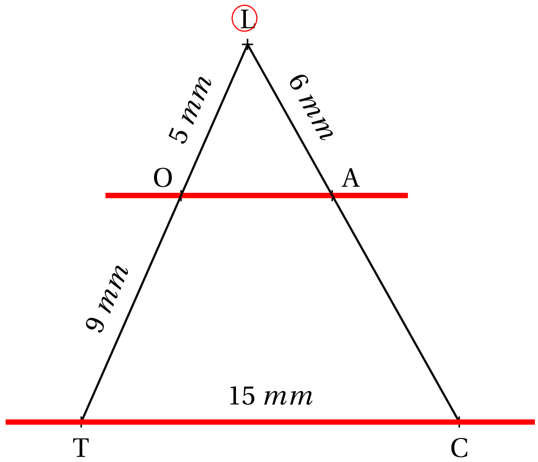
$$\frac{EB}{EU} = \frac{EK}{ET} = \frac{BK}{UT}$$

$$\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{EK}{10\ m} = \frac{4\ m}{UT}$$

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{EK}{10\ m}$ donc $EK = \frac{10\ m \times 5\ m}{12\ m} = \frac{50}{12}\ m \approx 4,17\ m$ à $1\ cm$ près.

Comme $\frac{5\ m}{12\ m} = \frac{4\ m}{UT}$ donc $UT = \frac{4\ m \times 12\ m}{5\ m} = \frac{48}{5}\ m = 9,6\ m$

EXERCICE N° 6.2 : Thalès triangle — Épisode 2 CORRECTION



Les droites (OT) et (AC) sont sécantes en L, les droites (OA) et (TC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LO}{LT} = \frac{LA}{LC} = \frac{OA}{TC}$$

$$\frac{5\ mm}{5\ mm + 9\ mm} = \frac{6\ mm}{LC} = \frac{OA}{15\ mm}$$

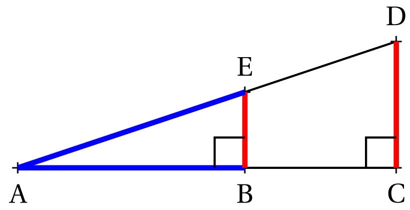
$$\frac{5\ mm}{14\ mm} = \frac{6\ mm}{LC} = \frac{OA}{15\ mm}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$LC = \frac{6\ mm \times 14\ mm}{5\ mm}$ d'où $LC = \frac{84\ mm^2}{5\ mm}$ et $LC = 16,8\ mm$

$OA = \frac{15\ mm \times 5\ mm}{14\ mm}$ d'où $OA = \frac{75\ mm^2}{14\ mm}$ et $OA \approx 5,357\ mm$

EXERCICE N° 6.3 : Thalès ou Pythagore ? CORRECTION



Dans le triangle rectangle ABE *on connait deux mesures sur trois : on peut donc utiliser le théorème de Pythagore.*

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BE^2 = AE^2$$
$$36^2 + BE^2 = 60^2$$
$$1\,296 + BE^2 = 3\,600$$
$$BE^2 = 3\,600 - 1\,296$$
$$BE^2 = 2\,304$$
$$BE = \sqrt{2\,304}$$
$$BE = 48$$

Pour calculer BC *il faut calculer* AC *car* BC = AC − AB. *Pareil pour* ED *il faut d'abord calculer* AD.

(EB) ⊥ (AC) et (DC) ⊥ (AC)
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (EB)//(DC)

Dans le triangle ADC, B ∈ [AC] et E ∈ [AD],
Les droites (EB) et (DC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{36\ m}{AC} = \frac{60\ m}{AD} = \frac{48\ m}{72\ m}$$

Comme $\frac{36\ m}{AC} = \frac{48\ m}{72\ m}$ on a $AC = \frac{36\ m \times 72\ m}{48\ m} = \frac{2\,592}{48}\ m = 54\ m$.

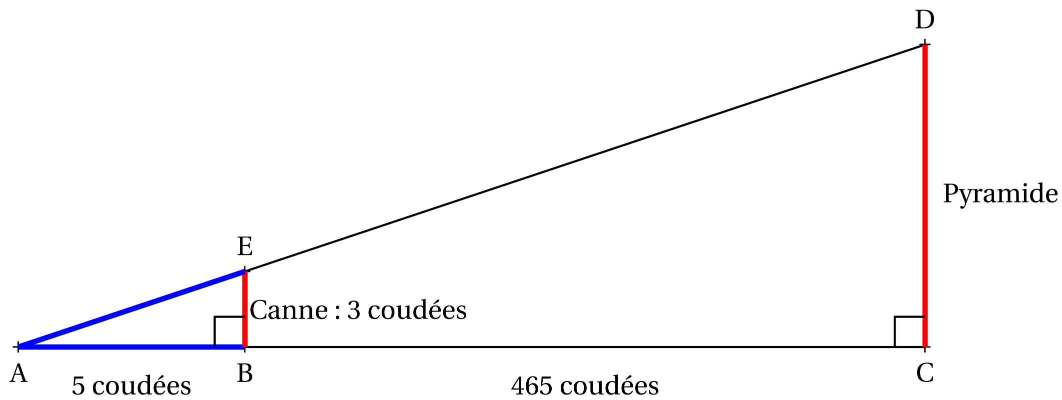
Comme $\frac{60\ m}{AD} = \frac{48\ m}{72\ m}$ on a $AD = \frac{60\ m \times 72\ m}{48\ m} = \frac{4\,320}{48}\ m = 90\ m$.

Donc $BC = AC - AB = 54\ m - 36\ m = \boxed{18\ m}$ et $ED = AD - AE = 90\ m - 60\ m = \boxed{30\ m}$.

EXERCICE N° 6.4 : La légende de Thalès

CORRECTION

Il faut modéliser la situation en faisant un schéma !



Comme la canne et la pyramide sont perpendiculaires au sol, on peut dire que la canne et la pyramide sont parallèles.

Dans le triangle ACD, B $\in$ [AC] et E $\in$ [AD] et (EB)//(DC),
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+465} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{CD}$$

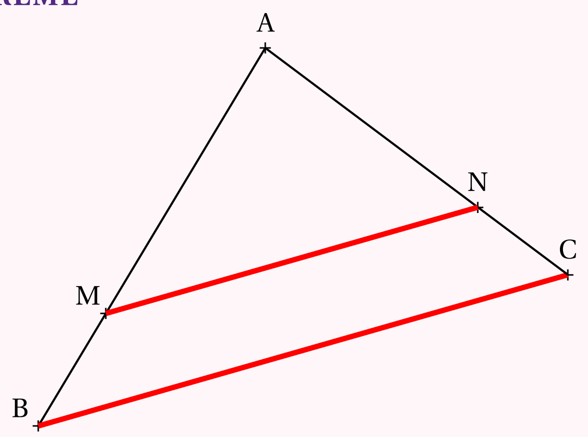
Donc $\frac{3}{CD} = \frac{5}{470}$ donc $CD = \frac{3 \times 470}{5} = \frac{1\,410}{5} = 282$

Or une coudée mesure 52 cm. La pyramide mesure donc $282 \times 52\ cm = 14\,664\ cm = \boxed{146,64\ m}$

LE THÉORÈME DE THALÈS

Version quatrième

LE THÉORÈME



Si dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN)//(BC)
Alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

REMARQUE :

Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

LA RÈGLE DE TROIS ET ÉGALITÉ DES PRODUITS EN CROIX

Les produits en croix

Deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

a, b, c et d des nombres non nuls.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

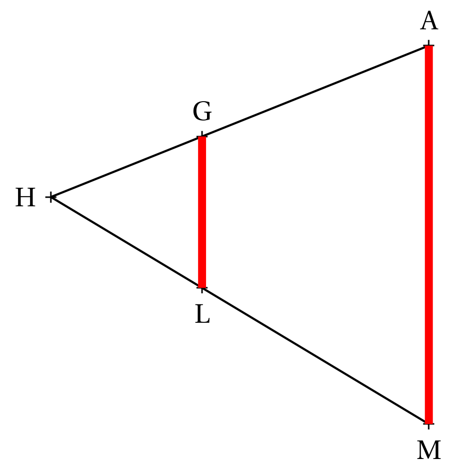
La règle de trois

a, b et c des nombres connus non nuls.

Le nombre x vérifiant $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ est $x = \frac{b \times c}{a}$

EXEMPLE :

On sait que :



- G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
- (GL)//(AM)
- HL = 4 cm, HA = 12 cm,
- GL = 3 cm, AM = 15 cm

On veut calculer HG **et** HM**.**

Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{HL}{HM} = \frac{HG}{HA} = \frac{LG}{MA}$$

$$\frac{4\ cm}{HM} = \frac{HG}{12\ cm} = \frac{3\ cm}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{4\ cm}{HM}$ on a $HM = \frac{4\ cm \times 15\ cm}{3\ cm} = \frac{60}{3}\ cm = \boxed{20\ cm}$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{HG}{12\ cm}$ on a $HG = \frac{12\ cm \times 3\ cm}{15\ cm} = \frac{36}{15}\ cm = \boxed{2{,}4\ cm}$

Notes

[1]On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.

a et b deux nombres relatifs.

$a \times \left(b + opp(b)\right) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$

Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$

En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :

$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\left(a + opp(a)\right)\left(b + opp(b)\right) = 0$

$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$

Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$

$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$

$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$

C'est à dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

[2]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »