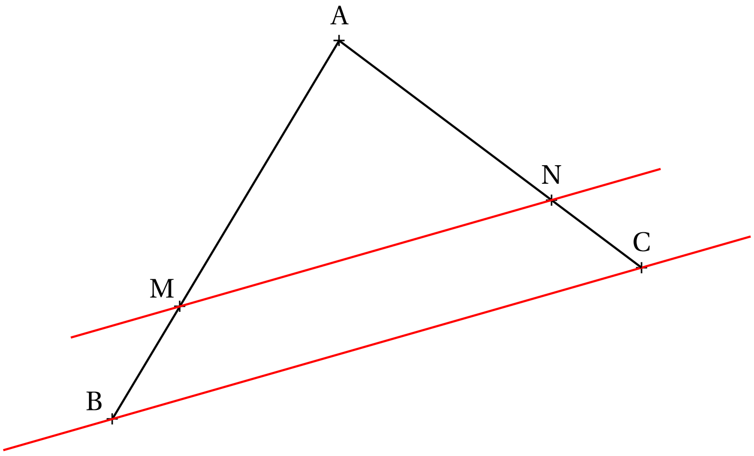
I — Le théorème de Thalès

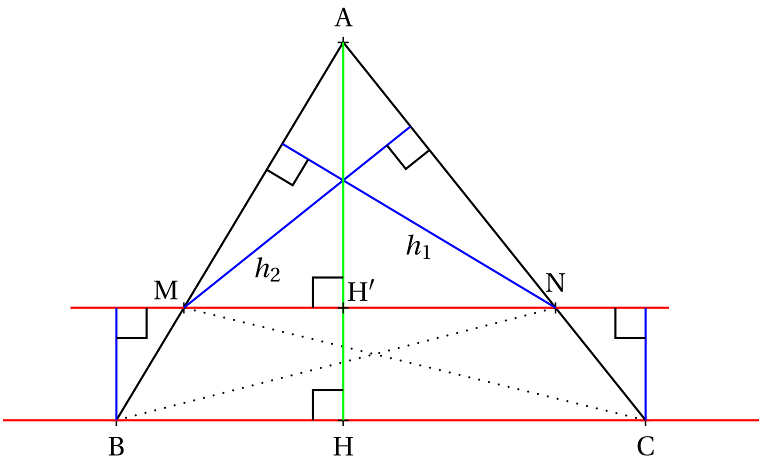
THÉORÈME 6.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

DÉMONSTRATION :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNB}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNC})$

$\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN}) = \mathrm{AM} \times h_1$ et $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ABN}) = \mathrm{AB} \times h_1$ ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN})}{\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ABN})} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

$\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN}) = \mathrm{AN} \times h_2$ et $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ACM}) = \mathrm{AC} \times h_2$ ainsi $\dfrac{\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN})}{\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ACM})} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

On constate que $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ABN}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNB})$ et que $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ACM}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNC})$
Comme $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNB}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{MNC})$ on prouve ainsi que $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ABN}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{ACM})$

Finalement $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.