On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$

De même dans le triangle AHC, on obtient $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{NH'C}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{NH'H})$
Ainsi $\mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AH'C}) = \mathscr{A}\rangle\nabla](\mathrm{AHN})$ c'est-à-dire $\frac{\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC}}{2} = \frac{\mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}}{2}$.

On prouve ainsi que $\mathrm{AH'} \times \mathrm{HC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{H'N}$ et d'après l'égalité des produits en croix $\frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$

On prouve de même que $\frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}}$.

Nous avons donc $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ or on sait que $\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N} = \mathrm{MN}$ et que $\mathrm{HB} + \mathrm{HC} = \mathrm{BC}$

Comme $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$ on a :

$$\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB}$$

Ajoutons $\mathrm{H'N} \times \mathrm{HC}$ à chaque membre de l'égalité :

$$\mathrm{H'M} \times \mathrm{HC} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{HB} + \mathrm{H'N} \times \mathrm{HC}$$
$$(\mathrm{H'M} + \mathrm{H'N}) \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times (\mathrm{HB} + \mathrm{HC})$$
$$\mathrm{MN} \times \mathrm{HC} = \mathrm{H'N} \times \mathrm{BC}$$

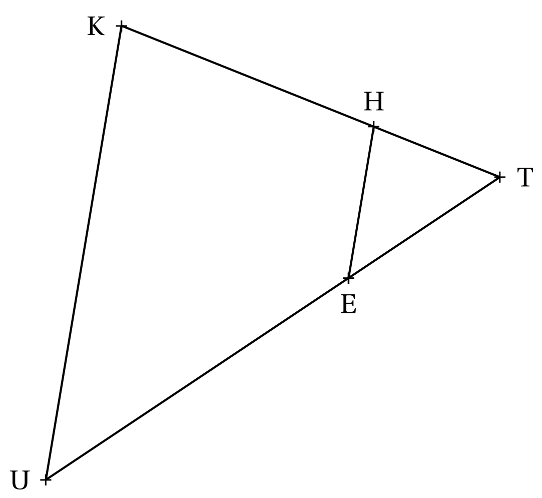
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\frac{\mathrm{H'M}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{H'N}}{\mathrm{HC}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

CQFD

II — Usage du théorème de Thalès

MÉTHODE 6 . 1 : Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès



On sait que :

(TH)//(UK)

TE = 3 cm

TU = 10 cm

UK = 15 cm

TH = 4 cm

On souhaite calculer les longueurs EH et TK

1. Analyse de la figure

Les droites parallèles sont (EH) et (UK).
Dans le triangle TUK le point T est situé « en face »des deux droites parallèles.
Le point T est donc le point important pour appliquer le théorème de Thalès.

2. Recherche des trois quotients égaux

On part du point T : le point important.

Sur le segment [TU] nous avons le point E. Donc en regardant dans l'ordre on a T, E et U.

On écrit dans cet ordre le premier quotient : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}}$.

Sur le segment [TK] nous avons le point H. Donc en regardant dans l'ordre on a : T, H et K.

On écrit dans cet ordre le second quotient : $\frac{\text{TH}}{\text{TK}}$

Nous en sommes à : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}}$.

En observant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux quotients, on obtient le troisième en oubliant T : $\frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

Voici donc l'égalité attendue : $\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$

On vérifie la cohérence de l'écriture : E et H sont au numérateur; U et K au dénominateur.

3. Rédaction

Dans le triangle TUK, E ∈ [TU] et H ∈ [TK] (cela veut juste dire que E est sur [TU] et H sur [TK] !)
Les droites (EH) et (UK) sont parallèles.

D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{TE}}{\text{TU}} = \frac{\text{TH}}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{\text{UK}}$$

Remplaçons par les grandeurs connues :

$$\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{4\ cm}{\text{TK}}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{TK} = \frac{4\ cm \times 10\ cm}{3\ cm} = \frac{40}{3}\ cm \approx 13,3\ cm$

Comme $\frac{3\ cm}{10\ cm} = \frac{\text{EH}}{15\ cm}$, on peut appliquer la règle de trois : $\text{EK} = \frac{15\ cm \times 3\ cm}{10\ cm} = \frac{45}{10}\ cm = 4,5\ cm$

Ainsi $\boxed{\text{TK} \approx 13,3\ cm}$ et $\boxed{\text{EK} = 4,5\ cm}$.

*En pratique, quand on rédige seule la partie **3.** doit apparaître sur une copie !*
