Le théorème de Thalès

Version quatrième

La règle de trois et égalité des produits en croix

Les produits en croix

Deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

a, b, c et d des nombres non nuls.

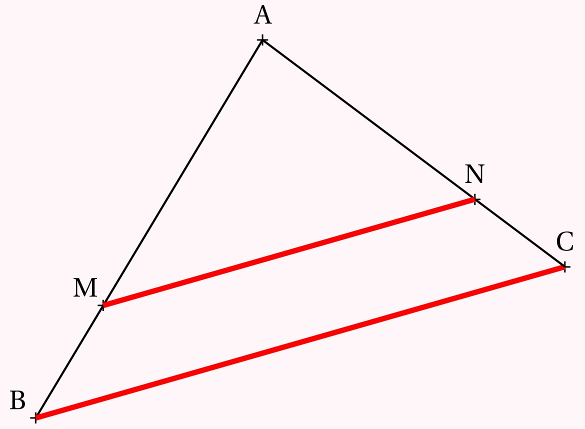
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

La règle de trois

a, b et c des nombres connus non nuls.

Le nombre x vérifiant $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ est $x = \frac{b \times c}{a}$

Le théorème

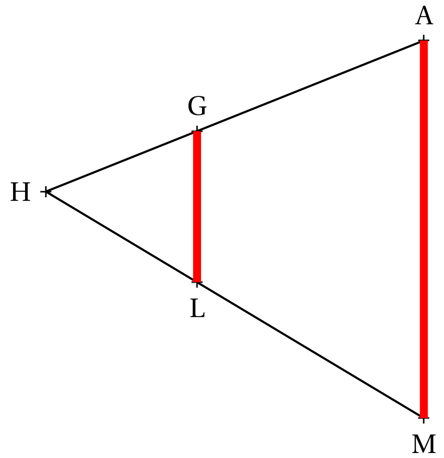


Si dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et (MN)//(BC)
Alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exemple :

On sait que :



- G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
- (GL)//(AM)
- HL = 4 cm, HA = 12 cm,
- GL = 3 cm, AM = 15 cm

On veut calculer HG **et** HM**.**

Dans le triangle HAM on sait que G ∈ [HA] et L ∈ [HM]
Les droites (GL) et (AM) sont parallèles,
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{HL}{HM} = \frac{HG}{HA} = \frac{LG}{MA}$$

$$\frac{4\ cm}{HM} = \frac{HG}{12\ cm} = \frac{3\ cm}{15\ cm}$$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{4\ cm}{HM}$ on a $HM = \frac{4\ cm \times 15\ cm}{3\ cm} = \frac{60}{3}\ cm = \boxed{20\ cm}$

Comme $\frac{3\ cm}{15\ cm} = \frac{HG}{12\ cm}$ on a $HG = \frac{12\ cm \times 3\ cm}{15\ cm} = \frac{36}{15}\ cm = \boxed{2{,}4\ cm}$

Remarque :

Cette égalité signifie que les longueurs AM, AN et MN sont proportionnelles aux longueurs AB, AC et BC. Elle signifie aussi que le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN ou que AMN est une réduction de ABC.

Notes

[1]On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.

a et b deux nombres relatifs.

$a \times \left(b + opp(b)\right) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$

Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$

En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :

$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\left(a + opp(a)\right)\left(b + opp(b)\right) = 0$

$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$

Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$

$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$

$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$

C'est à dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

[2]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »