Chapitre VII

Les puissances de 10

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (*BO nº 30 du 26-7-2018*) :

– À rédiger !

Compétences :

– À rédiger !

SITUATION INITIALE : Le coeur de mon arrière-grand-mère

Mon arrière-grand-mère vient de fêter ses 97 ans.
Je me demande combien de fois son coeur a battu depuis sa naissance.

Donner un ordre de grandeur de ce nombre.

SITUATION INITIALE : La légende du jeu d'échecs

La légende la plus célèbre sur l'origine du jeu d'échecs raconte l'histoire d'un roi légendaire des Indes (appelé Balhait ou Shihram suivant les versions de la légende) qui cherchait à tout prix à tromper son ennui. Il promit donc une récompense exceptionnelle à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait.
Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmane Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain, enthousiaste, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.
Humblement, Sissa demanda au prince de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case. Le prince accorda immédiatement cette récompense en apparence modeste, mais son conseiller lui expliqua qu'il venait de signer la mort du royaume car les récoltes de l'année ne suffiraient à s'acquitter du prix du jeu.

1. Sachant que le jeu d'échec se joue sur un plateau de 64 cases, donner un ordre de grandeur du nombre de grains de riz sur la dernière case.

2. On sait qu'un grain de riz à une masse de $0,02\ g$. Quelle serait la masse en tonnes de riz présent sur la dernière case ?

3. En décembre 2019 la tonne de riz se vendait en moyenne au prix de 390 €. En 2019 le PIB (Produit Intérieur Brut) des États-Unis s'élevait à 19 210 milliards d'euros. Comparer le prix du riz sur la dernière case avec le PIB des États-Unis.

☞ INTENTIONS PÉDAGOGIQUES ET ÉLÉMENTS DE CORRECTION : **Le coeur de mon arrière-grand-mère**

Cette activité permet de manipuler des grands nombres et de comprendre la notion d'ordre de grandeur. Les calculatrices récentes donnent la réponse à cet exercice sous forme d'un nombre décimal. Cependant, en fonction des choix effectués par l'élève (nombre de battements par minutes, considération des années bissextiles...), le résultat final n'est pas le même. On peut même indiquer que, bien que ce nombre de battements soit définis en tant que nombre, il est inaccessible par le calcul.
Les élèves se demandent souvent comment savoir combien de fois bat un coeur par minute, certains envisagent un battement par seconde. En faisant référence au cours d'EPS on peut leur demander de prendre leur poul pour obtenir cette grandeur manquante.
L'idée est également d'utiliser le résultat final pour obtenir à la calculatrice un nombre dont l'écriture sera une écriture scientifique et de commencer à raisonner sur le fait que la calculatrice affiche des nombres dont on ne comprend pas encore le sens.

On peut faire plusieurs hypothèses sur le nombre de battements par minute du coeur de mon arrière-grand-mère.
Imaginons que le battement moyen de son coeur a été de 75 battements par minute.
Comme $1\ h = 60\ min$, $1\ j = 24\ h$, $1\ a = 365\ j$, le nombre de battements total sur l'ensemble de sa vie est donné par :
$75 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 3\,823\,740\,000$
En faisant varier le nombre de battements par minute on obtient :
$65 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 3\,313\,908\,000$
$85 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 4\,333\,572\,000$
$95 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 4\,843\,404\,000$
$100 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 5\,098\,320\,000$
En tenant compte des années bissextiles :
$75 \times 60 \times 24 \times 365,25 \times 97 = 3\,826\,359\,000$

Un ordre de grandeur du nombre de battements de coeur pourrait être $4\,500\,000\,000$.

Pour forcer l'écriture scientifique à la calculatrice, je demande aux élèves de multiplier le nombre précédent par 100.
On obtient $4\,500\,000\,000 \times 100 = 450\,000\,000\,000$ la calculatrice affiche $4,5 \times 10^{11}$.
C'est l'occasion de se demander ce que signifie cette nouvelle écriture, le sens du 10 et de l'exposant 11.

I — Exposant et puissances - Définition

Définition 7.1 : Puissances d'un nombre

a un nombre quelconque et n un nombre entier positif supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

On dit a **exposant** n.

n est **l'exposant** de a^n et a^n est une **puissance** de a.

Exemples :

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Ne pas confondre $3^2 = 9$ et $3 \times 2 = 6$. En effet $3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 fois}}$ et $3 \times 2 = \underbrace{3 + 3}_{\text{2 fois}}$

$7^5 = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{\text{5 fois}} = 16\,807$

$2,4^3 = \underbrace{2,4 \times 2,4 \times 2,4}_{\text{3 fois}} = 13,824$

$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}_{\text{5 fois}} = -32$

$(-1)^{2020} = 1$ et $(-1)^{2019} = -1$: le signe dépend de la parité de l'exposant !

$0^{15} = \underbrace{0 \times 0 \times \ldots \times 0}_{\text{15 fois}} = 0$

II — Les puissances de 10

À rédiger !

III — Quelques propriétés opératoires

À rédiger !

IV — L'écriture scientifique

DÉFINITION 7.2 : Écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

EXEMPLES :

$2\,020 = 2,02 \times 10^3$
$0,007 = 7 \times 10^{-3}$
$3,141\,59 = 3,14159 \times 10^0$
$123\,000\,000\,000 = 1,23 \times 10^{11}$
$0,000\,000\,006\,7 = 6,7 \times 10^{-9}$

REMARQUE :
L'écriture scientifique permet de noter facilement des nombres dont l'écriture décimale demande beaucoup de chiffres.
La **mantisse** peut être plus ou moins précise.
La puissance de 10 utilisée est très importante, elle permet d'avoir un ordre de grandeur du résultat et de comparer des nombres entre eux.

EXEMPLE :
L'eau est constituée d'hydrogène H et d'oxygène O. La molécule d'eau s'écrit H^2O ce qui signifie que un atome d'oxygène est lié à deux atomes d'hydrogène.

Un atome d'oxygène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,026\ g = 2,6 \times 10^{-23}\ g$.
Un atome d'hydrogène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67\ g = 1,67 \times 10^{-24}\ g$.

On remarque les ordres de grandeurs : l'oxygène est plus de 10 fois plus lourd que l'hydrogène, $10^{-23} = 10^{-24} \times 10$

La masse d'une molécule d'eau est donc $2 \times 1,67 \times 10^{-24}\ g + 2,6 \times 10^{-23}\ g = 3,34 \times 10^{-24}\ g + 26 \times 10^{-24}\ g$.
Vous avez remarqué au passage que $2,6 \times 10^{-23} = 26 \times 10^{-24}$ car $26 = 10 \times 2,6$.

La masse d'une molécule d'eau est donc d'environ $29,34 \times 10^{-24}\ g = 2,934 \times 10^{-23}$

Un litre d'eau a une masse d'environ $1\ kg = 1\,000\ g$ à 20řC.

Pour calculer un ordre de grandeur du nombre de molécules d'eau dans un litre il suffit d'effectuer le quotient : $1\,000\ g \div 2,934 \times 10^{-23}$

La calculatrice répond environ $3,408 \times 10^{25}$ molécules soit $34\,080\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ molécules !

Exercices

Exercice n° 7.1 : Puissance – Définition

Écrire sous de forme de puissance puis calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$B = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$C = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$
$D = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$
$E = 2 \times 4 \times 16 \times 32$
$F = 3 \times 9 \times 27 \times 81$
$G = 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$H = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1$
$I = 10 \times 100 \times 1\,000 \times 10\,000$

Exercice n° 7.2 : Puissances – Définition – Épisode 2

Calculer la valeur décimale sans calculatrice

$A = 2^6$
$B = 3^4$
$C = 5^3$
$D = 0^{10}$
$E = (-2)^7$
$F = (-3)^4$
$G = (-5)^3$
$H = (-1)^{2019}$
$I = (-1)^{2020}$
$J = 0,5^3$
$K = 0,3^4$
$L = (-0,2)^6$

Exercice n° 7.3 : Puissances de 10

Calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 10^4$
$B = 10^9$
$C = 10^{12}$
$D = 10^3 \times 10^4$
$E = 10^7 \times 10^5$
$F = 10^5 \times 10^5 \times 10^5$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^7}{10^5}$
$I = \frac{10^3}{10^5}$

Exercice n° 7.4 : Puissance de 10 – Épisode 2

Écrire sous forme de puissance de 10.

$A = 10^3 \times 10^7$
$B = 10^5 \times 10^7 \times 10^9$
$C = 10^{13} \times 10^{29}$
$E = \frac{10^9}{10^5}$
$F = \frac{10^{12}}{10^3}$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^5}{10^5}$
$I = \frac{10^7}{10^9}$
$J = \frac{10^5}{10^{10}}$

Exercice n° 7.5 : Puissance de 10 – Épisode 3

Écrire sous forme décimale sans calculatrice.

$A = 10^{13}$
$B = 10^1$
$C = 10^0$
$E = 10^{-1}$
$F = 10^{-5}$
$G = 10^5 \times 10^7$
$H = 10^3 \times 10^5 \times 10^2$
$I = 10^{-3} \times 10^7$
$J = 10^{-5} \times 10^{-7}$
$K = \frac{10^4}{10^8}$
$L = \frac{10^{-7}}{10^9}$
$M = \frac{10^{-5}}{10^{-10}}$

EXERCICE N° 7.6 : Compter jusqu'à un milliard

On se demande combien de temps il faudrait pour compter jusqu'à un milliard!
Dire certains nombres prend du temps, par exemple 978 797 469 : neuf-cent-soixante-dix-huit-millions-sept-cent-quatre-vingt-dix-sept-mille-quatre-cent-soixante-neuf, doit bien prendre quelques secondes pour être nommé.
Imaginons que vous décidiez de compter jusqu'à un milliard en passant 16 h par jour à cette activité (il faut bien manger, dormir...). On peut considérer qu'il faut environ 2 s pour chaque nombre.
Combien de temps allez-vous passer à cette tâche? (en secondes, minutes, heures, jours, mois, années)

EXERCICE N° 7.7 : Écriture décimale et scientifique

Écrire sous forme décimale les nombres suivants écrits sous forme scientifique :

$A = 2,02 \times 10^3$
$B = 7 \times 10^{-3}$
$C = 3,14159 \times 10^0$
$D = 1,2345 \times 10^9$
$E = 7,3 \times 10^{-12}$
$F = 7,89 \times 10^{15}$
$G = 3,098 \times 10^{-11}$
$H = 1,234\,567\,89 \times 10^{11}$

EXERCICE N° 7.8 : Écriture scientifique et décimale

Écrire sous forme scientifique les nombres suivants :

A = 2 021
B = 0,000 007
C = 2,718 28
D = 1 234 567 890
E = 0,000 000 670 9
F = 5 670 000 000 000 000
G = 0,000 000 000 000 4
H = 20 200 000 000 000 000

EXERCICE N° 7.9 : Bételgeuse

Bételgeuse est une étoile, une supergéante rouge, dans la constellation d'Orion. Elle se situe à environ 647 $a.l.$ de la terre. L'année lumière ($a.l.$) est une unité de mesure astronomique qui correspond à la distance parcourue en un an par la lumière.

1. Sachant que la lumière parcoure environ 3×10^5 km chaque seconde, donner une écriture scientifique de la distance parcourue en une année en kilomètres.

2. Donner une écriture scientifique de la distance entre Bételgeuse et la Terre en kilomètres.

3. Bételgeuse a un rayon environ 1 000 fois plus grand que celui du Soleil. Le Soleil à un rayon d'environ 7×10^5 km. Donner l'écriture scientifique du rayon de Bételgeuse en kilomètres.

4. Bételgeuse est une étoile jeune, elle a environ 8×10^6 a (a désigne le préfixe pour année). Elle devrait disparaître dans les jours qui viennent ou plus surement dans une centaine de millier d'années au maximum. Les scientifiques surveillent cette étoile qui pourrait devenir une supernova ce qui illuminerait le ciel nocturne de la Terre.
Le Soleil a déjà 5×10^9 a, il en est à la moitié de sa vie.
Comparer les durées de vie de ces deux étoiles et dire combien de fois plus aura existé le Soleil par rapport à Bételgeuse.

Exercice n° 7.1 : Puissance – Définition

Correction

Écrire sous de forme de puissance puis calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^5 = 32$

$B = 3\times 3\times 3\times 3 = 3^4 = 81$

$C = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = (-1)^6 = 1$ car 6 est pair.

$D = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^5 = -2^5 = -32$ car 5 est impair et $2^5 = 32$.

$E = 2\times 4\times 16\times 32 = 2\times 2^2\times 2^4\times 2^5 = \underbrace{2\times \ldots 2}_{12 \text{ fois}} = 2^{12} = 4\,096$

$F = 3\times 9\times 27\times 81 = 3^1\times 3^2\times 3^3\times 3^4 = 3^{10} = 59\,049$

$G = 10\times 10\times 10\times 10 = 10^4 = 10\,000$

$H = 0,1\times 0,1\times 0,1\times 0,1 = 0,1^4 = 0,000\,1$

$I = 10\times 100\times 1\,000\times 10\,000 = 10^1\times 10^2\times 10^3\times 10^4 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$

Exercice n° 7.2 : Puissances – Définition – Épisode 2

Correction

Calculer la valeur décimale sans calculatrice

$A = 2^6 = 64$

$B = 3^4 = 81$

$C = 5^3 = 125$

$D = 0^{10} = 0$

$E = (-2)^7 = -2^7 = -128$ car 7 est impair!

$F = (-3)^4 = 3^4 = 81$ car 4 est pair!

$G = (-5)^3 = -5^3 = -125$ car 3 est impair!

$H = (-1)^{2\,019} = -1$ car 2 019 est impair!

$I = (-1)^{2\,020} = 1$ car 2 020 est pair!

$J = 0,5^3 = \left(\dfrac{5}{10}\right)^3 = \dfrac{5^3}{10^3} = \dfrac{125}{1\,000} = 0,125$

$K = 0,3^4 = \dfrac{3^4}{10^4} = \dfrac{81}{10\,000} = 0,008\,1$

$L = (-0,2)^6 = 0,2^6 = 0,000\,064$

Exercice n° 7.3 : Puissances de 10

Correction

Calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 10^4 = 10\,000$

$B = 10^9 = 1\,000\,000\,000$

$C = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

$D = 10^3\times 10^4 = 10^7 = 10\,000\,000$

$E = 10^7\times 10^5 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

$F = 10^5\times 10^5\times 10^5 = 10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$

$G = \frac{10^3}{10^2} = \dfrac{10\times 10\times 10}{10\times 10} = 10$

$H = \frac{10^7}{10^5} = \dfrac{10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10}{10\times 10\times 10\times 10\times 10} = 10^2 = 100$

$I = \frac{10^3}{10^5} = \dfrac{10\times 10\times 10}{10\times 10\times 10\times 10\times 10} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

Exercice n° 7.4 : Puissance de 10 – Épisode 2

Correction

Écrire sous forme de puissance de 10.

$A = 10^3\times 10^7 = 10^{10}$

$B = 10^5\times 10^7\times 10^9 = 10^{21}$

$C = 10^{13} \times 10^{29} = 10^{42}$
$E = \frac{10^9}{10^5} = 10^4$
$F = \frac{10^{12}}{10^3} = 10^9$
$G = \frac{10^3}{10^2} = 10^1$
$H = \frac{10^5}{10^5} = 10^0$
$I = \frac{10^7}{10^9} = 10^{-2}$
$J = \frac{10^5}{10^{10}} = 10^{-5}$

EXERCICE N° 7.5 : **Puissance de 10 – Épisode 3** CORRECTION

Écrire sous forme décimale sans calculatrice.
$A = 10^{13} = 10\,000\,000\,000\,000$
$B = 10^1 = 10$
$C = 10^0 = 1$
$E = 10^{-1} = 0,1$
$F = 10^{-5} = 0,000\,01$
$G = 10^5 \times 10^7 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
$H = 10^3 \times 10^5 \times 10^2 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$
$I = 10^{-3} \times 10^7 = 10^4 = 10\,000$
$J = 10^{-5} \times 10^{-7} = 10^{-12} = 0,000\,000\,000\,001$
$K = \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4} = 0,000\,1$
$L = \frac{10^{-7}}{10^9} = 10^{-16} = 0,000\,000\,000\,000\,000\,1$
$M = \frac{10^{-5}}{10^{-10}} = 10^{-5-(-10)} = 10^5 = 100\,000$

EXERCICE N° 7.6 : **Compter jusqu'à un milliard** CORRECTION

Il faut 2 s par nombre. Il faut compter un milliard de nombres. Il faut donc deux milliards de secondes.

Nous allons compter 16 h par jour.
$1\ h = 60\ min$ donc $16\ h = 960\ min$.
$1\ min = 60\ s$ donc $16\ h = 960\ min = 57\,600\ s$

$2\,000\,000\,000\ s \div 57\,600\ s \approx 34\,722$ jours.
Plus précisément $2\,000\,000\,000\ s = 57\,600\ s \times 34\,722 + 12\,800\ s$
Or $12\,800\ s = 60\ s \times 213 + 20\ s$ donc $12\,800\ s = 213\ min\ 20\ s = 3\ h\ 23\ min\ 20\ s$.

$34\,722\ j = 365 \times 95 + 47\ j$.

Il faut donc un peu plus de 95 ans pour compter jusqu'à un milliard, exactement $95\ a\ 47\ j\ 3\ h\ 23\ min\ 20\ s$!

EXERCICE N° 7.7 : **Écriture décimale et scientifique** CORRECTION

Écrire sous forme décimale les nombres suivants écrits sous forme scientifique :
$A = 2,02 \times 10^3 = 2\,020$
$B = 7 \times 10^{-3} = 0,007$
$C = 3,14159 \times 10^0 = 3,141\,59$
$D = 1,2345 \times 10^9 = 1\,234\,500\,000$
$E = 7,3 \times 10^{-12} = 0,000\,000\,000\,007\,3$
$F = 7,89 \times 10^{15} = 0,000\,000\,000\,000\,007\,89$
$G = 3,098 \times 10^{-11} = 0,000\,000\,000\,030\,98$

$H = 1,234\,567\,89 \times 10^{11} = 123\,456\,789\,000$

Exercice n° 7.8 : Écriture scientifique et décimale — Correction

Écrire sous forme scientifique les nombres suivants :
$A = 2\,021 = 2,021 \times 10^{3}$
$B = 0,000\,007 = 7 \times 10^{-6}$
$C = 2,718\,28 = 2,718\,28 \times 10^{0}$
$D = 1\,234\,567\,890 = 1,234\,567\,89 \times 10^{9}$
$E = 0,000\,000\,670\,9 = 6,709 \times 10^{-7}$
$F = 5\,670\,000\,000\,000\,000 = 5,67 \times 10^{15}$
$G = 0,000\,000\,000\,000\,4 = 4 \times 10^{-13}$
$H = 20\,200\,000\,000\,000\,000 = 2,02 \times 10^{16}$

Exercice n° 7.9 : Bételgeuse — Correction

1. Sachant que la lumière parcoure environ $3 \times 10^{5}\ km$ chaque seconde, donner une écriture scientifique de la distance parcourue en une année en kilomètres.

$1\ min = 60\ s$, $1\ h = 60\ min$, $1\ j = 24\ h$ et $1\ a = 365\ j$
En une année il y a : $365 \times 24 \times 60 \times 60\ s = 31\,536\,000\ s = 3,153\,6 \times 10^{7}\ s$.

La lumière parcoure $3 \times 10^{5}\ km$ chaque seconde.
En une année : $3 \times 10^{5}\ km \times 3,153\,6 \times 10^{7} = 9,460\,8 \times 10^{12}\ km$ soit $9\,460\,800\,000\,000\ km$.
Donc $1\ a.l. = 9,460\,8 \times 10^{12}\ km$

2. Donner une écriture scientifique de la distance entre Bételgeuse et la Terre en kilomètres.

Il faut calculer : $647 \times 9,460\,8 \times 10^{12}\ km = 6\,121,137\,6 \times 10^{12}\ km$
Or $6\,121,137\,6 = 6,121\,137\,6 \times 10^{3}$
Donc la distance cherchée est : $6,121\,137\,6 \times 10^{3} \times 10^{12}\ km = 6,121\,137\,6 \times 10^{15}\ km$
Soit $6\,121\,137\,600\,000\,000\ km$

3. Bételgeuse a un rayon environ 1 000 fois plus grand que celui du Soleil. Le Soleil à un rayon d'environ $7 \times 10^{5}\ km$. Donner l'écriture scientifique du rayon de Bételgeuse en kilomètres.

$7 \times 10^{5}\ km \times 1\,000 = 7 \times 10^{5} \times 10^{3}\ km = 7 \times 10^{8}\ km$

4. Bételgeuse est une étoile jeune, elle a environ $8 \times 10^{6}\ a$ (a désigne le préfixe pour année). Elle devrait disparaître dans les jours qui viennent ou plus surement dans une centaine de milliers d'années au maximum. Les scientifiques surveillent cette étoile qui pourrait devenir une supernova ce qui illuminerait le ciel nocturne de la Terre.
Le Soleil a déjà $5 \times 10^{9}\ a$, il en est à la moitié de sa vie.
Comparer les durées de vie de ces deux étoiles et dire combien de fois plus aura existé le Soleil par rapport à Bételgeuse.

Le Soleil va vivre environ $10 \times 10^{9}\ a$ et Bételgeuse environ $8 \times 10^{6}\ a$.

$10 \times 10^{9}\ a \div 8 \times 10^{6} = (10 \div 8) \times (10^{9} \div 10^{6}) = 1,25 \times 10^{3} = 1\,250$

Le Soleil va vivre environ 1 250 fois plus longtemps que Bételgeuse !!

Évaluation de mathématiques

Cette première partie de l'évaluation se traite sans calculatrice. Vous devrez rendre une première copie avant de passer à la seconde partie où la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 1\,000\,000$ $\quad$ $C = 100\,000\,000$ $\quad$ $E = 10$

$B = 0{,}000\,01$ $\quad$ $D = 0{,}000\,000\,01$ $\quad$ $F = 1$

Exercice 2 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissances de 10 :

$G = 10^3 \times 10^5$

$H = 10^{-7} \times 10^{-3}$

$J = \dfrac{10^7}{10^{-4}}$

$L = \dfrac{100\,000\,000}{0{,}000\,000\,1}$

$I = \dfrac{10^5}{10^3}$

$K = \dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$

$M = \dfrac{10^6 \times 0{,}001}{10\,000 \times 10^{-10}}$

Exercice 3 : Écrire les nombres suivants sous forme scientifique :

$N = 345\,000\,000$ $\quad$ $P = 2\,021$ $\quad$ $R = 0{,}000\,7 \times 70\,000$

$O = 0{,}000\,067$ $\quad$ $Q = 3{,}14$ $\quad$ $S = 500\,000 \times 2\,500\,000$

....

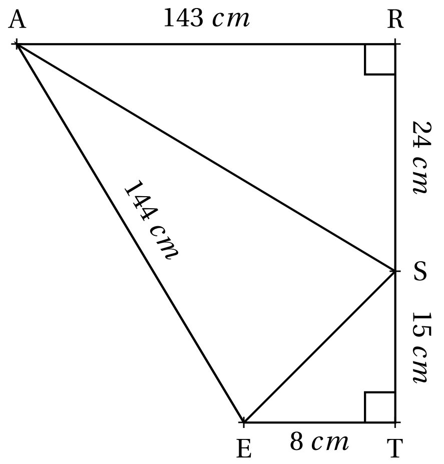
Cette seconde partie de l'évaluation se traite avec la calculatrice.

Exercice 4

1. Un cheveu a une épaisseur d'environ 50 μm. Exprimer cette grandeur en mètre.
2. Un humain possède en moyenne $1,2 \times 10^5$ cheveux sur sa tête. Écrire ce nombre sous forme décimale.
3. Il y a environ 471 000 habitants à Toulouse. En alignant tous les cheveux de tous les Toulousains dans le sens de l'épaisseur, quelle distance en mètres pourrait-on obtenir ?

Exercice 5

Cette figure n'est pas tracée en vraies grandeurs.



1. Calculer la mesure des côtés [AS] et [SE] en justifiant votre réponse.

2. Le triangle ASE est-il rectangle ?

Correction

EXERCICE 1 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 1\,000\,000$

$\boxed{A = 10^6}$

$B = 0{,}00001$

$\boxed{B = 10^{-5}}$

$C = 100\,000\,000$

$\boxed{C = 10^8}$

$D = 0{,}00000001$

$\boxed{D = 10^{-8}}$

$E = 10$

$\boxed{E = 10^1}$

$F = 1$

$\boxed{F = 10^0}$

EXERCICE 2 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissances de 10 :

$G = 10^3 \times 10^5$

$\boxed{G = 10^8}$

$H = 10^{-7} \times 10^{-3}$

$\boxed{H = 10^{-10}}$

$I = \dfrac{10^5}{10^3}$

$\boxed{I = 10^2}$

$J = \dfrac{10^7}{10^{-4}}$

$J = 10^{7-(-4)}$

$J = 10^{7+4}$

$\boxed{J = 10^{11}}$

$K = \dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$

$K = 10^{-7-(-5)}$

$K = 10^{-7+5}$

$\boxed{K = 10^{-2}}$

$L = \dfrac{100\,000\,000}{0{,}0000001}$

$L = \dfrac{10^8}{10^{-7}}$

$L = 10^{8-(-7)}$

$L = 10^{8+7}$

$\boxed{L = 10^{15}}$

$M = \dfrac{10^6 \times 0{,}001}{10\,000 \times 10^{-10}}$

$M = \dfrac{10^6 \times 10^{-3}}{10^4 \times 10^{-10}}$

$M = \dfrac{10^3}{10^{4-(-10)}}$

$M = \dfrac{10^3}{10^{14}}$

$M = 10^{3-14}$

$\boxed{M = 10^{-11}}$

EXERCICE 3 : Écrire les nombres suivants sous forme scientifique :

$N = 345\,000\,000$

$\boxed{N = 3{,}45 \times 10^8}$

$O = 0{,}000067$

$\boxed{O = 6{,}7 \times 10^{-5}}$

$P = 2021$

$\boxed{P = 2{,}021 \times 10^3}$

$Q = 3{,}14$

$\boxed{Q = 3{,}14 \times 10^0}$

$R = 0{,}0007 \times 70\,000$

$R = 7 \times 10^{-4} \times 7 \times 10^4$

$R = 49 \times 10^0$

$R = 49$

$\boxed{R = 4{,}9 \times 10^1}$

$S = 500\,000 \times 2\,500\,000$

$S = 5 \times 10^5 \times 2{,}5 \times 10^6$

$S = 12{,}5 \times 10^{11}$

$S = 1{,}25 \times 10^1 \times 10^{11}$

$\boxed{S = 1{,}25 \times 10^{12}}$

....

Cette seconde partie de l'évaluation se traite avec la calculatrice.

EXERCICE 4

1. $50\ \mu\ m = 50 \times 10^{-6}\ m$. Donc $\boxed{0{,}00005\ m}$

2. $\boxed{1,2 \times 10^5 = 120\,000}$

3. $471\,000 \times 120\,000 \times 0,000\,05\ m = 4,71 \times 10^5 \times 1,2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-6}\ m$

On obtient ainsi $\boxed{28,26 \times 10^4 = 282\,600\ m}$

Exercice 5

1. Dans le triangle ARS rectangle en R,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$RS^2 + RA^2 = SA^2$$
$$143^2 + 24^2 = SA^2$$
$$20\,449 + 576 = SA^2$$
$$SA^2 = 21\,025$$
$$SA = \sqrt{21\,025}$$
$$SA = 145$$

Dans le triangle SET rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TS^2 + TE^2 = SE^2$$
$$15^2 + 8^2 = SE^2$$
$$225 + 64 = SE^2$$
$$SE^2 = 289$$
$$SE = \sqrt{289}$$
$$SE = 17$$

2. Dans le triangle ASE comparons AE^2 et $SA^2 + SE^2$.

$SA^2 + SE^2$	AE^2
$143^2 + 17^2$	145^2
$20\,449 + 289$	
$20\,738$	$21\,025$

Comme $SA^2 + SE^2 \neq AE^2$, d'après **la contraposée du théorème de Pythagore**,

$\boxed{\text{Le triangle ASE n'est pas rectangle !}}$

Évaluation de mathématiques

Exercice 1

1. Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$A = 10^7$
$B = 10^{-10}$
$C = 2^{10}$
$D = (-1)^{19}$

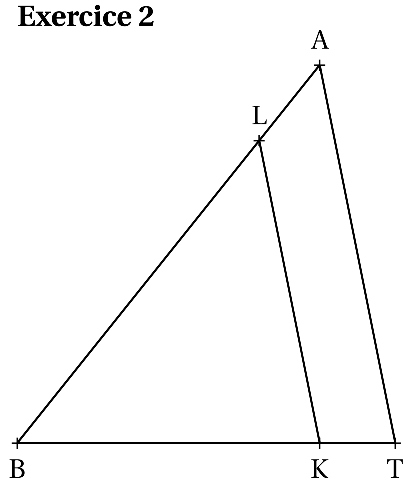
$E = 3,14 \times 10^5$
$F = 7,856 \times 10^{-5}$
$G = 10^7 \times 10^{-4}$
$H = 2 \times 10^5 \times 3,5 \times 10^{-7}$

2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$I = 567\,000\,000$
$J = 0,000\,078$
$K = 3,141\,59$
$L = 6\,722\,000\,000$

$M = 10\,000\,000 \times 0,000\,000\,02$
$N = 3 \times 10^7 \times 7 \times 10^3$
$O = 0,000\,000\,007 \times 20\,000\,000$
$P = 2^{15}$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

— $K \in [BT]$ et $L \in [BA]$

— $(KL)//(TA)$

— $BA = 10\ cm$, $BK = 5\ cm$, $LK = 6\ cm$ et $AT = 9\ cm$

Calculer BL et BT

Exercice 3

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

— $E \in [DA]$ et $F \in [CA]$

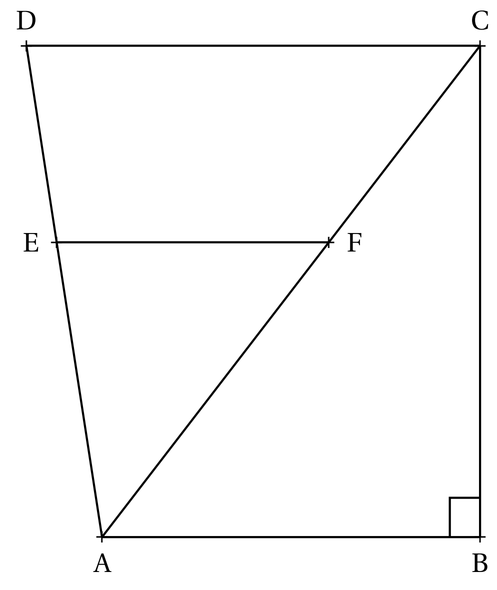
— $(EF)//(DC)$

— $(AB) \perp (BC)$

— $BA = 33\ m$, $BC = 56\ m$

— $AF = 39\ m$, $DC = 90\ m$ et $AD = 75\ m$

Calculer AC puis EF et AE



Correction – Évaluation de mathématiques

Exercice 1

1. Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$A = 10^7 = \boxed{10\,000\,000}$
$B = 10^{-10} = \boxed{0{,}000\,000\,000\,1}$
$C = 2^{10} = \boxed{1\,024}$
$D = (-1)^{19} = \boxed{-1}$

$E = 3,14 \times 10^5 = 3,14 \times 100\,000 = \boxed{314\,000}$
$F = 7,856 \times 10^{-5} = 7,856 \times 0,000\,01 = \boxed{0{,}000\,078\,56}$
$G = 10^7 \times 10^{-4} = 10^{7+(-4)} = 10^3 = \boxed{1\,000}$
$H = 2 \times 10^5 \times 3,5 \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-2} = \boxed{0{,}07}$

2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$I = 567\,000\,000 = \boxed{5{,}67 \times 10^8}$

$J = 0{,}000078 = \boxed{7{,}8 \times 10^{-5}}$

$K = 3{,}141\,59 = \boxed{3{,}141\,59 \times 10^0}$

$L = 6\,722\,000\,000 = \boxed{6{,}722 \times 10^9}$

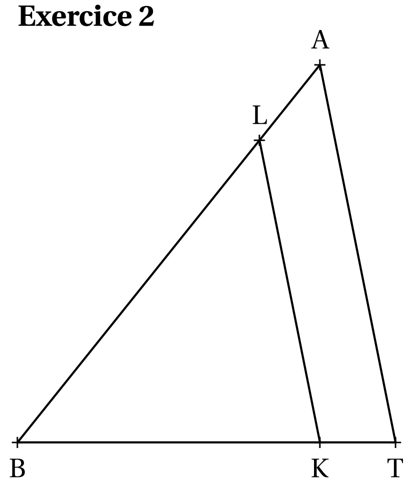
$M = 10\,000\,000 \times 0{,}000\,000\,02 = 10^7 \times 2 \times 10^{-8} = \boxed{2 \times 10^{-1}}$

$N = 3 \times 10^7 \times 7 \times 10^3 = 21 \times 10^{10} = 2,1 \times 10^1 \times 10^{10} = \boxed{2{,}1 \times 10^{11}}$

$O = 0{,}000\,000\,007 \times 20\,000\,000 = 7 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^7$
$O = 14 \times 10^{-2} = 0,14 = \boxed{1{,}4 \times 10^{-1}}$

$P = 2^{15} = 32\,768 = \boxed{3{,}2768 \times 10^4}$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

— $K \in [BT]$ et $L \in [BA]$

— $(KL)//(TA)$

— $BA = 10\ cm$, $BK = 5\ cm$, $LK = 6\ cm$ et $AT = 9\ cm$

Calculer BL et BT

Dans le triangle BAT, comme $K \in [BT]$ et $L \in [AB]$ et $(KL)//(TA)$,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BK}{BT} = \frac{LK}{AT}$$

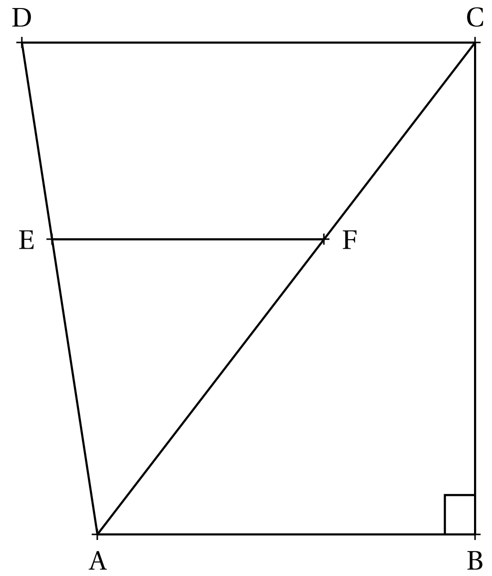
$$\frac{BL}{10\ cm} = \frac{5\ cm}{BT} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$$

Comme $\frac{BL}{10\ cm} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$ on a $BL = \frac{6\ cm \times 10\ cm}{9\ cm} = \frac{60}{9}\ cm = \boxed{\frac{20}{3}\ cm \approx 6,3\ cm}$

Comme $\frac{5\ cm}{BT} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$ on a $BT = \frac{5\ cm \times 9\ cm}{6\ cm} = \frac{45}{6}\ cm = \boxed{7{,}5\ cm}$

Exercice 3

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :



- $E \in [DA]$ et $F \in [CA]$
- $(EF)//(DC)$
- $(AB) \perp (BC)$
- $BA = 33\ m$, $BC = 56\ m$
- $AF = 39\ m$, $DC = 90\ m$ et $AD = 75\ m$

Calculer AC puis EF et AE

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$33^2 + 56^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 1\,089 + 3\,136$$
$$AC^2 = 4\,225$$
$$AC = 65$$

Donc $\boxed{AC = 65\ m}$

Dans le triangle ADC, comme $E \in [AD]$ et $F \in [AC]$ et $(EF)//(DC)$.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{DC}$$
$$\frac{AE}{75\ m} = \frac{39\ m}{65\ m} = \frac{EF}{90\ m}$$

Comme $\frac{AE}{75\ m} = \frac{39\ m}{65\ m}$ on a $AE = \frac{75\ m \times 39\ m}{65\ m} = \frac{2\,925}{65}\ m = \boxed{45\ m}$

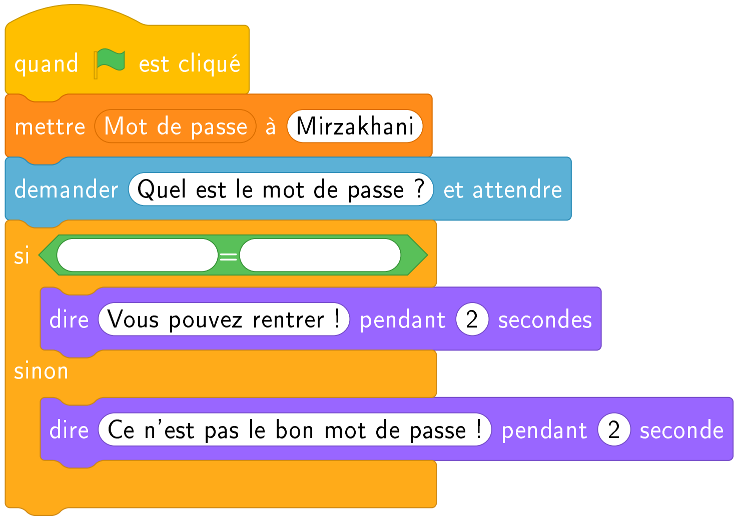
Comme $\frac{EF}{90\ m} = \frac{39\ m}{65\ m}$ on a $EF = \frac{90\ m \times 39\ m}{65\ m} = \frac{3\,510}{65}\ m = \boxed{54\ m}$

Algorithmique — Le code secret

Première partie — Le mot de passe

Voici un programme réalisé avec Scratch. Il demande à l'utilisateur un mot de passe et vérifie s'il s'agit bien de celui attendu.

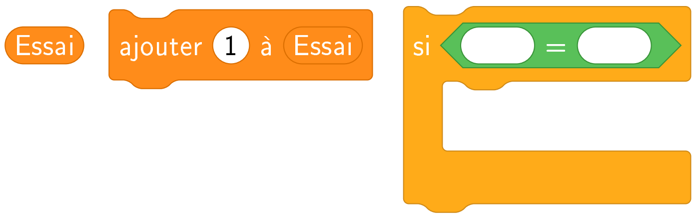
- Se rendre à l'URL : *https://scratch.mit.edu/users/scratch3/* avec le navigateur ;
- construire le programme débuté ci-dessous en complétant les blocs manquants ;
- changer le mot de passe et choisir « Mathématiques ».



Deuxième partie — Le mot de passe — Épisode 2

Modifier le programme précédent de telle manière que l'utilisateur puisse faire au maximum trois essais. Indiquer à chaque fois le numéro de l'essai. En cas d'échec trois fois de suite, faire un message à l'utilisateur.

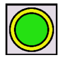
Voici quelques blocs qui pourraient vous être utiles :

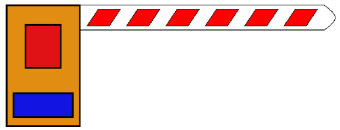


Troisième partie — Le portail

Le portail de ma résidence n'est pas protégé. Pour l'ouvrir il suffit d'appuyer sur le bouton vert. Une fois appuyé sur le bouton vert, le portail se referme 10 s plus tard.
Nous l'avons modélisé dans Scratch.

- Se rendre sur la page des quatrièmes du blog : https://arnaud.ac3j.fr ;
- télécharger et enregistrer le fichier **Portail.sb3** ;
- importer ce fichier dans Scratch.
- modifier le programme pour qu'il se ferme au bout de 5 s.





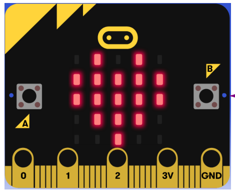
On souhaite maintenant sécuriser le portail à l'aide d'un code simple : le portail ne s'ouvre que si l'utilisateur a appuyé sept fois de suite sur le bouton vert.
Ajouter cette fonctionnalité dans le programme Scratch précédent.

Quatrième partie — Sécurisation du portail

Le code précédent n'est pas trop sécurisé. Pour améliorer la situation on a ajouté un bouton rouge. Ce bouton permet de valider ce qui est saisi avec le bouton vert, ce qui permet d'éviter les tentatives au hasard.
En cas d'erreur de code, le portail est bloqué pendant 10 s sans qu'il soit possible de saisir un nouveau code.

- Télécharger le fichier **Portail_securise.sb3** depuis la page du blog ;
- importer le fichier dans Scratch ;
- modifier le programme pour obtenir le résultat attendu.

À la fin de la séance, votre travail enregistré doit être envoyé en passant par le formulaire disponible sur le blog !



Algorithmique — Le code secret

Première partie — Ouvrir une porte

Voici un début de programme réalisé avec Microbit. Il permet d'afficher le message « Porte ouverte »quand on appuie sur **le bouton A**.
Reproduire ce programme en vous connectant sur le site de Microbit :

- Lancer le navigateur;
- rendez-vous à l'URL : *https://makecode.microbit.org*;
- créer un nouveau projet;
- chercher dans le menu les blocs demandés.

Compléter ce script pour que :

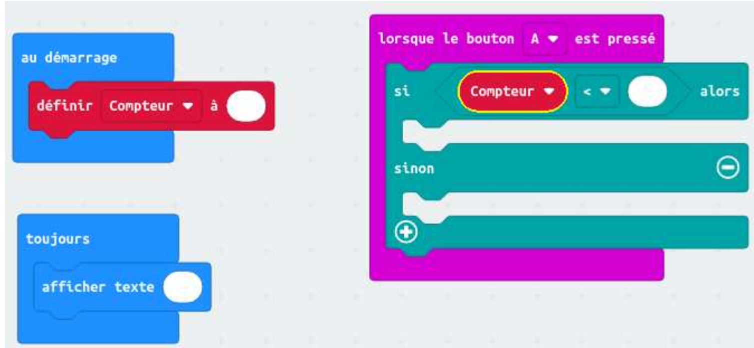
- Lorsque l'on appuie sur **le bouton B** le Microbit affiche « Porte fermée »;
- avant le message « Porte ouvert », faire apparaître un carré pendant 3 s;
- avant le message « Porte fermée », faire apparaître un carré avec une croix à l'intérieur pendant 3 s.

Deuxième partie — L'affichage numérique

On souhaite utiliser le Microbit comme clavier numérique pour saisir un code d'entrée. Comme il n'y a que deux boutons nous avons imaginé ceci :

- La matrice affiche les chiffres de 0 à 9;
- quand on appuie sur **le bouton B** on passe au chiffre suivant;
- quand on appuie sur **le bouton A** on passe au chiffre précédent;
- le chiffre qui suit le 9 est le 0;
- le chiffre qui précéde le 0 est le 9;
- au départ le chiffre 0 est affiché.

Voici le début du programme. Le saisir dans Microbit puis le modifier pour répondre aux six contraintes.



Troisième partie — Le code secret

On reprend le fonctionnement de l'affichage numérique de la deuxième partie.
On souhaite maintenant ajouter une validation du code à une chiffre saisi. Voici les demandes :

- **Le bouton A** garde le même rôle;
- **le bouton B** sert à valider le chiffre qui apparaît sur la matrice;
- si le chiffre validé est le code secret un carré est affiché sur l'écran;
- si le chiffre validé n'est pas le bon code, un carré avec une croix est affiché;
- le code secret est 6

Quatrième partie — Sécurisation du code

Le code secret précédent est un nombre compris entre 0 et 9. C'est beaucoup trop facile à trouver.
On souhaite maintenant que le code d'entrée soit un nombre à deux chiffres. Voici les contraintes :

- **Le bouton A** et le bouton **le bouton B** gardent le même rôle;
- le premier chiffre validé correspond au chiffre des dizaines du code;
- le second chiffre validé correspond au chiffre des unités;
- l'affichage est le même que précédemment;
- le code secret est 69

INFORMATIQUE

NUMÉRISATION DE L'INFORMATION

QUATRIEME

Pour que les caractères typographiques (lettres de l'alphabet, ponctuations, majuscules, minuscules...) puissent être traités par les premiers ordinateurs, dès 1960 le codage ASCII (American Standard Code for Information Interechange) apparaît pour standardiser les usages. Ce codage sur 8 bits est une table de 255 caractères.

La naissance d'internet a obligé la mise en place d'un nouveau standard incluant tous les idéogrammes de toutes les langues du monde. Ce standard Unicode dans sa version de 2005 contient 245 000 caractères couvrant 150 écritures dont des idéogrammes. Au final il est prévu pour contenir 1 114 112 codes différents (alphabet, chiffre, idéogrammes, emojis ...). Il est codé sur 32 bits et reste compatible avec le standard ASCII.

Voici un bref extrait de la table ASCII pour les caractères habituels :

Caractère :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Code ASCII	048	049	050	051	052	053	054	055	056	057
Caractère :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Code ASCII	065	066	067	068	069	070	071	072	073	074
Caractère :	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Code ASCII	075	076	077	078	079	080	081	082	083	084
Caractère :	U	V	W	X	Y	Z	a	b	SPACE	!
Code ASCII	085	086	087	088	089	090	097	098	032	033

1. Alan vient de saisir au clavier la phrase « VIVE LA TECHNOLOGIE ! ».
Écrire les uns à la suite des autres les codes ASCII qui correspondent à cette phrase.

En informatique, toutes les informations stockées sur un disque dur ou envoyées sur le réseau sont numérisées. La numérisation consiste à transformer une information en une succession de bits : des 0 et des 1. Cette information numérique est ensuite facilement convertie en signal électrique (composants électroniques, câbles réseau, fibre, ADSL, GSM...) pour être stockée ou envoyée. Toute information (caractères, pixels, tension, mouvements de la souris...) doit donc être convertie en nombres puis en succession de 0 et de 1. Pour cela on utilise l'écriture binaire des nombres qui contrairement au système décimal n'utilise pas dix chiffres mais seulement deux : 0 et 1.

2. On veut compter en binaire de 0 jusqu'à 32.
2.a. Faire la liste de tous les nombres entiers à un chiffre en base dix (contenant les dix chiffres habituels)
2.b. Quel est le plus grand nombre en base dix s'écrivant avec deux chiffres ? avec trois chiffres ?
2.c. Faire la liste de tous les nombres entiers à un chiffre en base deux (contenant seulement 0 ou 1).
2.d. Faire la liste de tous les nombres entiers à deux chiffres en base deux. Puis à trois chiffres.
2.e. Compter de 0 à 32 en utilisant l'écriture en base 2.

3. Compléter le tableau suivant :

Puissance de 2	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
Écriture décimale	1	2	4						

4. On démontre que tout nombre entier peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une somme de puissances de 2.

Pour écrire un nombre décimal en binaire on utilise la propriété précédente. On code par le chiffre 1 la présence d'une puissance de 2 et par 0 son absence.

Par exemple en écrivant le nombre 34 sous la forme $32+2$ on peut le compléter le tableau suivant :

Puissances de 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur décimale	256								
Décomposition décimale de 34				32				2	
Écriture binaire de 34	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Décomposition décimale de 63									
Écriture binaire de 63									
Décomposition décimale de 127									
Écriture binaire de 127									
Décomposition décimale de									
Écriture binaire de	1	1	1	0	0	0	1	1	1

5. Compléter le tableau suivant :

Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire
34	100010	63		64		100	
127		178		255		256	
0		2021			10101010		111000111

Pour simplifier la compréhension et le stockage des bits on les regroupe par paquet de 8. On appelle cela un octet. Par exemple 0010110 est un octet puisqu'il est constitué de 8 bit.

6. Quel est le plus grand nombre entier que l'on peut coder avec un octet ?

7. Numériser l'information « VIVE LA TECHNOLOGIE! »en regroupant les bits en octet. Vous utiliserez pour cela le codage ASCII obtenu à la question **1.**. Combien d'octets sont nécessaires à cette numérisation ?

8. Décoder le message suivant présenté sous forme de bits regroupés en octet.

01001111 01001110 00100000 01000001 01000100 01001111 01010010 01000101 00100000 01001101 01000101 01001100 01000001 01001110 01000111 01000101 01010010 00100000 01010100 01000101 01000011 01001000 01001110 01001111 00100000 01000101 01010100 00100000 01001101 01000001 01010100 01001000 01010011 00100000 00100001

1. La phrase « VIVE LA TECHNOLOGIE! »correspond aux codes ASCII suivants :

Caractère	V	I	V	E		L	A
Codage en ASCII	086	073	086	069	032	076	065

Caractère	T	E	C	H	N	O	L	O	G	I	E		!
Codage en ASCII	084	069	067	072	078	079	076	079	071	073	069	032	033

2.a. Les nombres entiers à un chiffre sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

Attention à ne pas confondre les notions de **chiffre** et de **nombre** .
Un nombre est une quantité que l'on peut compter ou évaluer. Cette quantité peut s'écrire de diverses manières. Par exemple le nombre cinq s'écrit « cinq »en français, « five »en anglais, « 5 « en écriture décimale, « V »avec les chiffres romains ou encore « ||||| ».
On peut comparer les nombres et les chiffres avec les mots et les lettres. En français, il y a 26 lettres qui permettent d'écrire une infinité de mots. Pour les nombres, nous avons dix chiffres qui permettent d'écrire une infinité de nombres.
Les **chiffres** sont donc les caractères, les symboles, qui permettent d'écrire les nombres.

2.b. Le plus grand nombre entier en écriture décimale s'écrivant avec deux chiffres est 99.

Le plus grand nombre entier en écriture décimale s'écrivant avec trois chiffres est 999.

2.c. En utilisant seulement les chiffres 0 et 1 on ne peut écrire que deux nombres : 0 et 1.

2.d. En base deux on peut écrire deux nombres à deux chiffres : 10 et 11.

Comme pour les décimaux, on considère que le nombre 00 ou le nombre 01 contient un « zéro inutile »et que l'on préfère écrire 0 et 1.

Les nombres à trois chiffres en base 2 sont 100, 101, 110 et 111.

2.e. En base deux, il y a deux nombres qui s'écrivent avec un chiffre 0 et 1, deux nombres à deux chiffres 10 et 11, quatre nombres à trois chiffres 100, 101, 110 et 111.
Les nombres à quatre chiffres dans l'ordre croissant sont : 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 et 1111.
En classant tous ces nombres dans l'ordre croissant voici le résultat :

Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire
0	0	8	1000	16	10000	24	11000
1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
						32	100000

3.

Puissance de 2	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
Écriture décimale	1	2	4	8	16	32	64	128	256

4.

Puissances de 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur décimale	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Décomposition décimale de 34				32				2	
Écriture binaire de 34	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Décomposition décimale de 63				32	16	8	4	2	1
Écriture binaire de 63				1	1	1	1	1	1
Décomposition décimale de 127			63	32	16	8	4	2	1
Écriture binaire de 127			1	1	1	1	1	1	1
Décomposition décimale de 231	128	64	32				4	2	1
Écriture binaire de 231	1	1	1	0	0	0	1	1	1

5. On utilise les réponses précédentes pour 34 et 63. On reprend ensuite la même méthode :

Puissances de 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur décimale	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Décomposition décimale de 34				32				2	
Écriture binaire de 34	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Décomposition décimale de 63				32	16	8	4	2	1
Écriture binaire de 63				1	1	1	1	1	1
Décomposition décimale de 64			64						
Écriture binaire de 64			1	0	0	0	0	0	0
Décomposition décimale de 100			64	32			4		
Écriture binaire de 100			1	1	0	0	1	0	0
Décomposition décimale de 127			64	32	16	8	4	2	1
Écriture binaire de 127			1	1	1	1	1	1	1
Décomposition décimale de 178		128		32	16			2	
Écriture binaire de 178		1	0	1	1	0	0	1	0
Décomposition décimale de 255		128	64	32	16	8	4	2	1
Écriture binaire de 255		1	1	1	1	1	1	1	1
Décomposition décimale de 256	256								
Écriture binaire de 256	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Décomposition décimale de 170		128		32		8		2	
Écriture binaire de 170		1	0	1	0	1	0	1	0
Décomposition décimale de 455	256	128	64				4	2	1
Écriture binaire de 455	1	1	1	0	0	0	1	1	1

Pour 2021 il faut utiliser les puissances suivantes : 512 et 1024.
On a : $2021 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 1$

Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire	Décimal	Binaire
34	100010	63	111111	64	1000000	100	1100100
127	1111111	178	10110010	255	11111111	256	100000000
0	0	2021	11111100101	170	10101010	455	111000111

Remarque :
Quand on écrit le nombre 2021 avec les chiffres 2, 0 et 1 on utilise le système décimal qui permet d'écrire les nombres entiers en utilisant les dix chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Le préfixe déci signifie dix!

L'écriture 2021 signifie : $2021 = 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1$

On obtient donc l'écriture suivante :

$$2021 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

L'écriture en binaire utilise un système à deux chiffres, 0 et 1, et des puissances de 2 :

$$2021 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 1$$

$$2021 = 1 \times 1024 + 1 \times 512 + 1 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

$$2021 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

6. Il s'agit de 11111111 c'est-à-dire $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255$

7.

Caractère	V	I	V	E		L	A
Codage en ASCII	86	73	86	69	32	76	65
Binaire regroupé en octet	01010110	01001001	01010110	01000101	00100000	01001100	01000001

Caractère	T	E	C	H	N	O	L	O	G	I	E	
Codage en ASCII	84	69	67	72	78	79	76	79	71	73	69	
Binaire regroupé en octet	01010100	01000101	01000011	01001000	01001110	01001111	01001100	01001111	01000111	01001001	01000101	00

Soit :

01010110 01001001 01010110 01000101 00100000 01001100 01000001 01010100 01000101 01000011 01001000 01001110 01001111 01001100 01001111 01000111 01001001 01000101 00100000 00100001

8.
01001111 01001110 00100000 01000001 01000100 01001111 01010010 01000101 00100000 01001101 01000101 01001100 01000001 01001110 01000111 01000101 01010010 00100000 01010100 01000101 01000011 01001000 01001110 01001111 00100000 01000101 01010100 00100000 01001101 01000001 01010100 01001000 01010011 00100000 00100001

Binaire regroupé en octet	01001111	01001110	00100000	01000001	01000100	01001111	01010010	01000101
Codage en ASCII	79	78	32	65	68	79	82	69
Caractère	O	N		A	D	O	R	E

Binaire regroupé en octet	00100000	01001101	01000101	01001100	01000001	01001110	01000111	01000101
Codage en ASCII	32	77	69	76	65	78	71	69
Caractère		M	E	L	A	N	G	E

Binaire regroupé en octet	01010010	00100000	01010100	01000101	01000011	01001000	01001110	01001111
Codage en ASCII	82	32	84	69	67	72	78	79
Caractère	R		T	E	C	H	N	O

Binaire regroupé en octet	00100000	01000101	01010100	00100000	01001101	01000001	01010100	01001000
Codage en ASCII	32	69	84	32	77	65	84	72
Caractère		E	T		M	A	T	H

Binaire regroupé en octet	01010011	00100000	00100001
Codage en ASCII	83	32	33
Caractère	S		!

On obtient donc :

$\boxed{\text{ON ADORE MELANGER TECHNO ET MATHS!}}$

LES PUISSANCES DE 10

DÉFINITION

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

EXEMPLES :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^3 \neq 2 \times 3$ en effet $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$1^{2020} = 1$

$(-1)^{2019} = -1$ car 2019 est impair. $(-1)^{2020} = 1$ car 2020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

LES PUISSANCES DE 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = \underbrace{10\ldots0}_{\text{n zéros}}$$

EXEMPLES :

$10^2 = 100$ $\qquad 10^3 = 1000$ $\qquad 10^6 = 1000000$ $\qquad 10^9 = 1000000000$

PROPRIÉTÉS ET EXTENSION DE LA DÉFINITION

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entier supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n\,;\ 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\qquad \dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\qquad (10^n)^p = 10^{n \times p}$

PRÉFIXE ET PUISSANCES DE 10 :

n	nano	10^{-9}=0,000 000 001	un milliardième
µ	micro	10^{-6}=0,000 001	un millionième
m	milli	10^{-3}=0,001	un millième
c	centi	10^{-2}=0,01	un centième
d	déci	10^{-1}=0,1	un dixième
		10^0=1	
da	déca	10^1=10	une dizaine
h	hecto	10^2=100	une centaine
k	kilo	10^3=1 000	un millier
M	méga	10^6=1 000 000	un million
G	giga	10^9=1 000 000 000	un milliard

Inverses

L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

EXEMPLES :

$2020 = 2{,}02 \times 10^3$ $\qquad -5 = -5 \times 10^0$

$0{,}0078 = 7{,}8 \times 10^{-3}$ $\qquad -0{,}00000123 = -1{,}23 \times 10^{-6}$

$1234567890 = 1{,}23456789 \times 10^9$ $\qquad 15900 \times 10^5 = 1{,}59 \times 10^9$

PROBLÈME :

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

[2]De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

[5]L'identification précédente entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \frac{5}{3} = 45$ et $27 \times \frac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \frac{5}{3} - 27 \times \frac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\frac{5}{3} - \frac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!