Les puissances de 10

Définition

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2\times2\times2 = 8$

$2^3 \neq 2\times 3$ en effet $2^3 = 2\times2\times2 = 8$ et $2\times3 = 2+2+2 = 6$

$3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

$1^{2020} = 1$

$(-1)^{2019} = -1$ car 2019 est impair. $(-1)^{2020} = 1$ car 2020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10\times10\times10\times10\times10 = 100000$

Les puissances de 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = \underbrace{10\ldots0}_{\text{n zéros}}$$

Exemples :

$10^2 = 100$ $\quad 10^3 = 1\,000$ $\quad 10^6 = 1\,000\,000$ $\quad 10^9 = 1\,000\,000\,000$

Propriétés et extension de la définition

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entier supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n\,;\ 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\qquad \dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\qquad (10^n)^p = 10^{n\times p}$

Préfixe et puissances de 10 :

n	nano	10^{-9}=0,000 000 001	un milliardième
µ	micro	10^{-6}=0,000 001	un millionième
m	milli	10^{-3}=0,001	un millième
c	centi	10^{-2}=0,01	un centième
d	déci	10^{-1}=0,1	un dixième
		10^{0}=1	
da	déca	10^{1}=10	une dizaine
h	hecto	10^{2}=100	une centaine
k	kilo	10^{3}=1 000	un millier
M	méga	10^{6}=1 000 000	un million
G	giga	10^{9}=1 000 000 000	un milliard

Inverses

L'écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.

a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

Exemples :

$2\,020 = 2,02\times10^3$

$0,0078 = 7,8\times10{-}3$

$1\,234\,567\,890 = 1,23456789\times10^9$

$-5 = -5\times10^0$

$-0,000\,001\,23 = -1,23\times10^{-6}$

$15\,900\times10^5 = 1,59\times10^9$

Problème :

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence !

[2]De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie !

[5]L'identification précédente entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \frac{5}{3} = 45$ et $27 \times \frac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \frac{5}{3} - 27 \times \frac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\frac{5}{3} - \frac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens !