Chapitre VIII

Calcul littéral

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) **:**

– À rédiger !

Compétences :

– À rédiger !

SITUATION INITIALE : Apprendre une nouvelle langue : Algèbre LV3

Première partie : le langage algébrique

On a l'habitude d'utiliser une lettre pour désigner un nombre quelconque.
Ainsi la phrase « la somme d'un nombre et de 5 »peut se traduire en langage algébrique en $x+5$

1. En notant x le nombre quelconque, traduire les phrases suivantes en langage algébrique :

A. « Le produit d'un nombre et de 7. »
B. « La différence de 10 et d'un nombre. »
C. « Le quotient d'un nombre par 10. »
D. « Le triple du nombre. »
E. « La somme du triple du nombre et du double du nombre. »
F. « Le produit du nombre par le nombre. »
G. « La somme du triple du nombre et de 10. »
H. « Le produit de 5 par la somme du nombre et de 7. »
I. « Le produit du nombre par la différence du nombre et de 11. »
J. « Le produit de la somme du nombre et de 5 par la somme
du nombre et de 7. »

2. Traduire en langue française et en vous inspirant de l'exercice précédent les expressions suivantes :

$\text{A} = 3x+1$
$\text{B} = 1-2x$
$\text{C} = 1+x$
$\text{D} = 5(3x+1)$
$\text{E} = x^2+1$
$\text{F} = 2x(x+1)$
$\text{G} = x^2+2x+1$
$\text{H} = (x+3)(x-3)$

Deuxième partie : Réduire une expression algébrique

On peut souvent remplacer une succession d'ordres mathématiques par une phrase plus simple.
Par exemple la phrase « Ajouter 3 à un nombre puis ajouter 7. »se simplifie en « Ajouter 10 à un nombre. »
1. Faire une phrase plus simple pour chacune des phrases suivantes :

A. « Ajouter 3 à un nombre puis ajouter le nombre et enlever 5. »
B. « Ajouter un nombre à 10, multiplier le tout par 7 et enlever 35. »
C. « Ajouter un nombre à lui-même, multiplier le tout par 7 et enlever 10. »
D. « Ajouter le carré d'un nombre à un nombre et enlever 5. »

2. Reprendre chacune des phrases suivantes et écrire une expression algébrique où x désigne le nombre quelconque.
Faire de même avec vos phrases simplifiées.

Troisième partie : La grammaire algébrique

On veut comparer les expressions algébriques : $2x+3$ et $5x$ ainsi que $2x^2+3x$ et $5x^2$
1. Exprimer en français les quatre expressions algébriques précédentes.
2. Tester chacune des expressions précédentes en prenant les nombres 2 et 5 puis deux autres nombre de votre choix.
3. Que pouvez-vous dire de $2x+3$ et $5x$? Et de $2x^2+3x$ et $5x^2$?

Quatrième partie : Premiers pas en langue algébrique

Réduire au maximum chacune des expressions algébriques suivantes :

$\text{A} = x+x$
$\text{B} = x-x$
$\text{C} = x\times x$
$\text{D} = x+3+x+5$
$\text{E} = 2x-1+3x-3$
$\text{F} = 3x-1+x-2+2x-1$
$\text{G} = 2x^2+2x+x+3x^2-5x$
$\text{H} = 3x^2+3x+1+6-4x-2x^2$
$\text{I} = 5\times 3x+6\times 10$
$\text{J} = 5(3x+9)$

Apprendre une nouvelle langue : Algèbre LV3 – Correction

Première partie : le langage algébrique

1. En notant x le nombre quelconque, traduire les phrases suivantes en langage algébrique :

A. « Le produit d'un nombre et de 7. » : $\boxed{7 \times x = 7x}$
B. « La différence de 10 et d'un nombre. » : $\boxed{10 - x}$
C. « Le quotient d'un nombre par 10. » : $\boxed{\dfrac{x}{10}}$
D. « Le triple du nombre. » : $\boxed{3x}$
E. « La somme du triple du nombre et du double du nombre. » : $\boxed{3x + 2x}$
F. « Le produit du nombre par le nombre. » : $\boxed{3x \times x}$
G. « La somme du triple du nombre et de 10. » : $\boxed{3x + 10}$
H. « Le produit de 5 par la somme du nombre et de 7. » : $\boxed{5 \times (x+7) = 5(x+7)}$
I. « Le produit du nombre par la différence du nombre et de 11. » : $\boxed{x \times (x-11) = x(x-11)}$
J. « Le produit de la somme du nombre et de 5 par la somme du nombre et de 7. » : $\boxed{(x+5) \times (x+7) = (x+5)(x+7)}$

2. Traduire en langue française et en vous inspirant de l'exercice précédent les expressions suivantes :

$A = 3x + 1$: $\boxed{\text{La somme du triple du nombre et de un}}$
$B = 1 - 2x$: $\boxed{\text{La différence de un et du double du nombre}}$
$C = 1 + x$: $\boxed{\text{La somme de un et du nombre}}$
$D = 5(3x + 1)$: $\boxed{\text{Le produit de cinq et de la somme du triple du nombre et de un}}$
$E = x^2 + 1$: $\boxed{\text{La somme du carré du nombre et de un}}$
$F = 2x(x + 1)$: $\boxed{\text{Le produit du double du nombre et de la somme du nombre et de un}}$
$G = x^2 + 2x + 1$: $\boxed{\text{La somme du carré du nombre, du double du nombre et de un}}$
$H = (x + 3)(x - 3)$: $\boxed{\text{Le produit de la somme du nombre et de trois par la différence du nombre et de trois}}$

Deuxième partie : Réduire une expression algébrique

1. Faire une phrase plus simple pour chacune des phrases suivantes :

A. « Ajouter 3 à un nombre puis ajouter le nombre et enlever 5. »
A. $\boxed{\text{Enlever 2 au double d'un nombre.}}$
B. « Ajouter un nombre à 10, multiplier le tout par 7 et enlever 35. »
B. $\boxed{\text{Multiplier un nombre par 7 et ajouter 35.}}$
C. « Ajouter un nombre à lui-même, multiplier le tout par 7 et enlever 10. »
C. $\boxed{\text{Multiplier un nombre par 14 et enlever 10.}}$
D. « Ajouter le carré d'un nombre à un nombre et enlever 5. »
D. $\boxed{\text{On ne peut pas simplifier cette phrase!}}$

2. Reprendre chacune des phrases suivantes et écrire une expression algébrique où x désigne le nombre quelconque.

A. $\boxed{3 + x + x - 5 = 2x - 2}$
B. $\boxed{(x + 10) \times 7 - 35 = 7x + 70 - 35 \text{ soit } 7x - 35}$
C. $\boxed{(x + x) \times 7 - 10 = 2x \times 7 - 10 \text{ soit } 14x - 10}$
D. $\boxed{x^2 + x - 5}$

Troisième partie : La grammaire algébrique

On veut comparer les expressions algébriques : $2x+3$ et $5x$ ainsi que $2x^2+3x$ et $5x^2$

1. Exprimer en français les quatre expressions algébriques précédentes.

$2x+3$: La somme de 3 et du double du nombre.

$5x$: Multiplier un nombre par 5.

$2x^2+3x$: La somme du double du carré d'un nombre et du triple d'un nombre.

$5x^2$: Le produit de 5 par le carré d'un nombre.

2. Tester chacune des expressions précédentes en prenant les nombres 2 et 5 puis deux autres nombre de votre choix.

Pour $x=2$,

$2x+3=2\times 2+3=4+3=7$

$5x=5\times 2=10$

$2x^2+3x=2\times 2^2+3\times 2=2\times 4+6=8+6=14$

$5x^2=5\times 2^2=5\times 4=20$

3. Que pouvez-vous dire de $2x+3$ et $5x$? Et de $2x^2+3x$ et $5x^2$?

On constate qu'en général $2x+3\neq 5x$ on ne peut donc pas ajouter 3 et $2x$.

On constate aussi que $2x^2+3x\neq 5x^2$ on ne peut donc pas ajouter $2x^2$ et $3x$.

Quatrième partie : Premiers pas en langue algébrique

Réduire au maximum chacune des expressions algébriques suivantes :

$A=x+x=\boxed{2x}$

$B=x-x=\boxed{0}$

$C=x\times x=\boxed{x^2}$

$D=x+3+x+5=\boxed{2x+8}$

$E=2x-1+3x-3=\boxed{5x-4}$

$F=3x-1+x-2+2x-1=\boxed{6x-4}$

$G=2x^2+2x+x+3x^2-5x\boxed{5x^2-2x}$

$H=3x^2+3x+1+6-4x-2x^2=\boxed{x^2-x+7}$

$I=5\times 3x+6\times 10=\boxed{15x+60}$

$J=5(3x+9)=\boxed{15x+45}$

SITUATION INITIALE : Un programme de calcul surprenant

Première partie :

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 100 ;
- Enlever 36 ;
- Multiplier le tout par 5 ;
- Ajouter 173 ;
- Multiplier le tout par 4 ;
- Ajouter 31 ;
- Multiplier à nouveau le tout par 5 ;
- Ajouter le nombre entier choisi au départ ;
- Enlever 15 ;
- Écrire le résultat.

1. Tester ce programme avec quatre nombres entiers différents.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire.

Deuxième partie : Travail de traduction

On note x le nombre de départ

Nous allons traduire et simplifier chaque étape :

Phrases en français	Expressions algébriques
Choisir un nombre entier	x
Enlever 36	$x-36$
Multiplier le tout par 5	$5(x-36)=5\times x-5\times 36=5x-180$
Ajouter 173	
Multiplier le tout 4	
Ajouter 31	
Multiplier à nouveau le tout 5	
Ajouter le nombre entier choisi au départ	
Enlever 15	
Écrire le résultat	

Troisième partie : Explications

Expliquez pourquoi le résultat précédent démontre votre conjecture.

I — La distributivité

PROPRIÉTÉ 8.1 : La distributivité Admise

a, b et k sont des nombres quelconques

$$\underbrace{k \times (a+b)}_{\text{Produit de deux facteurs}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme de deux termes}}$$

DÉVELOPPER $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ FACTORISER

REMARQUE :

La **distributivité** est une propriété qui lie l'addition et la multiplication. On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Cela revient à dire que « le produit d'une somme est égal à la somme des produits ».

La somme, le symbole +, est une somme algébrique. a et b sont des nombres relatifs positifs ou négatifs.

EXEMPLES NUMÉRIQUES :

Développer

On se sert souvent de la distributivité pour effectuer du calcul mental.

$13 \times 11 = 13 \times (10+1) = 13 \times 10 + 13 \times 1 = 130 + 13 = 143$

$77 \times 99 = 77 \times (100-1) = 77 \times 100 - 77 \times 1 = 7\,700 - 77 = 7\,623$

Factoriser

$14 \times 13 - 14 \times 3 = 14 \times (13-3) = 14 \times 10 = 140$

$87 \times 23 + 87 \times 49 + 87 \times 28 = 87 \times (23+49+28) = 87 \times 100 = 8\,700$

Même si ces deux exemples sont un peu « caricaturaux », ils illustrent assez bien le principe de la factorisation !

II — Le calcul littéral

Le **calcul numérique** consiste à utiliser les règles des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) pour obtenir un résultat final sous forme d'un nombre.

Le **calcul littéral** consiste à utiliser des lettres pour désigner des nombres dans une expression algébrique. L'objectif est de modifier une expression algébrique littérale pour obtenir une expression équivalente. Pour cela il faut respecter des règles de calcul issues de la propriété de distributivité.

EXEMPLES :
Les « formules »de calcul de périmètres ou d'aires sont des expressions littérales :

Le périmètre du cercle de rayon r est donné par l'expression : $2\pi r$
Dans cette expression le symbole de multiplication est sous-entendu : $2\pi r = 2 \times \pi \times r$
Le cercle

III — Réduction des expressions littérales

IV — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 8.1 : Substituer une lettre par un nombre

Voici quatre expressions algébriques littérales :

$$A = 5x + 9$$

$$B = 1 - 7x + 3 + 8x$$

$$C = 5(2x - 1)$$

$$D = 3x^2 - 2x + 1$$

Calculer la valeur numérique exacte de chacune de ces expressions en remplaçant x par la valeur proposée. (Il y a donc 16 calculs numériques à effectuer !)

1. $x = 0$ **2.** $x = 3$ **3.** $x = -2$ **4.** $x = \dfrac{2}{3}$

Exercice n° 8.2 : Réduire une expression littérale

Réduire chacune des expressions littérales suivantes :

$A = x + x$

$B = x - x$

$C = x \times x$

$D = 2x + 3 + 4x + 5$

$E = -2x + 7 - 3x - 8 - x + 6$

$F = 1 - 7x - 8 + 11x - 2 + 4x - 3$

$G = 2x^2 + 2x - 3 + 4x^2 - 3x + 1$

$H = 3x^2 + 1 - 3x + 5 - 3x^2 + 7x$

$I = 1 - 7x + x^2 + x + 1 - 3x + 8x^2 - 11$

Exercice n° 8.3 : Réduire une expression littérale

Développer et réduire chacune des expressions littérales ci-dessous :

$A = 7(2x + 2)$

$B = 5(1 - 4x)$

$C = 3(-2x - 3)$

$D = -4(5x - 2)$

$E = -5(-6x - 7)$

$F = 2x(1 - x)$

$G = 3(4x + 1) + 5(3x - 4)$

$H = 2x(3x + 1) + 3(1 + 3x)$

$I = -3(1 - x) - 4(2 + x)$

$J = -2x(3x - 1) - 3(3x + 2)$

EXERCICE N° 8.1 : **Substituer une lettre par un nombre** CORRECTION

Voici quatre expressions algébriques littérales :

$$A = 5x + 9$$

$$B = 1 - 7x + 3 + 8x$$

$$C = 5(2x - 1)$$

$$D = 3x^2 - 2x + 1$$

Calculer la valeur numérique exacte de chacune de ces expressions en remplaçant x par la valeur proposée. (Il y a donc 16 calculs numériques à effectuer !)

1. Pour $x = 0$
$A = 5 \times 0 + 9 = 0 + 9 = \boxed{9}$
$B = 1 - 7 \times 0 + 3 + 8 \times 0 = 1 + 3 = \boxed{4}$
$C = 5(2 \times 0 - 1) = 5(0 - 1) = 5(-1) = \boxed{-5}$
$D = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = \boxed{1}$

2. $x = 3$
$A = 5 \times 3 + 9 = 15 + 9 = \boxed{24}$
$B = 1 - 7 \times 3 + 3 + 8 \times 3 = 1 - 21 + 3 + 24 = \boxed{7}$
$C = 5(2 \times 3 - 1) = 5(6 - 1) = 5 \times 5 = \boxed{25}$
$D = 3 \times 3^2 - 2 \times 3 + 1 = 3 \times 9 - 6 + 1 = 27 - 5 = \boxed{22}$

3. $x = -2$
$A = 5 \times (-2) + 9 = -10 + 9 = \boxed{-1}$
$B = 1 - 7 \times (-2) + 3 + 8 \times (-2) = 1 + 14 + 3 - 16 = \boxed{2}$
$C = 5(2 \times (-2) - 1) = 5(-4 - 1) = 5 \times (-5) = \boxed{-25}$
$D = 3 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 = 3 \times 4 + 4 + 1 = 12 + 5 = \boxed{17}$

4. $x = \frac{2}{3}$
$A = 5 \times \frac{2}{3} + 9 = \frac{10}{3} + 9 = \frac{10}{3} + \frac{27}{3} = \boxed{\frac{37}{3}}$

$B = 1 - 7 \times \frac{2}{3} + 3 + 8 \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{14}{3} + 3 + \frac{16}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$

$C = 5(2 \times \frac{2}{3} - 1) = 5\left(\frac{4}{3} - 1\right) = 5\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3}\right) = 5 \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$

$D = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{2}{3} + 1 = 3 \times \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{12}{9} - \frac{12}{9} + 1 = \boxed{1}$

EXERCICE N° 8.2 : **Réduire une expression littérale** CORRECTION

Réduire chacune des expressions littérales suivantes :
$A = x + x = \boxed{2x}$

$B = x - x = \boxed{0}$

$C = x \times x = \boxed{x^2}$

$D = 2x + 3 + 4x + 5 = \boxed{6x + 8}$

$E = -2x + 7 - 3x - 8 - x + 6 = \boxed{-6x + 5}$

$F = 1 - 7x - 8 + 11x - 2 + 4x - 3 = \boxed{8x - 12}$

$G = 2x^2 + 2x - 3 + 4x^2 - 3x + 1 = \boxed{6x^2 - x - 2}$

$H = 3x^2 + 1 - 3x + 5 - 3x^2 + 7x = \boxed{-4x + 6}$

$I = 1 - 7x + x^2 + x + 1 - 3x + 8x^2 - 11 = \boxed{9x^2 - 9x - 9}$

EXERCICE NO 8.3 : Réduire une expression littérale CORRECTION

Développer et réduire chacune des expressions littérales ci-dessous :

$A = 7(2x + 2) = \boxed{14x + 14}$

$B = 5(1 - 4x) = \boxed{5 - 20x}$

$C = 3(-2x - 3) = \boxed{-6x - 9}$

$D = -4(5x - 2) = \boxed{-20x + 8}$

$E = -5(-6x - 7) = \boxed{30x + 35}$

$F = 2x(1 - x) = \boxed{2x - 2x^2}$

$G = 3(4x + 1) + 5(3x - 4) = 12x + 3 + 15x - 20 = \boxed{27x - 17}$

$H = 2x(3x + 1) + 3(1 + 3x) = 6x^2 + 2x + 3 + 9x = \boxed{6x^2 + 11x + 3}$

$I = -3(1 - x) - 4(2 + x) = -3 + 3x - 8 - 4x = \boxed{-x - 11}$

$J = -2x(3x - 1) - 3(3x + 2) = -6x^2 + 3x - 9x - 6 = \boxed{-6x^2 - 6x - 6}$

Interrogation de mathématiques

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 7(2x-1)+3(5x+2)$

$B = 3x(3x+1)+2x(5x+3)$

$C = -5x(1-2x)+2(3-5x)$

$D = 2x+x^2-3(2x-1)+3x(1-2x)$

$D = (3x+1)(5x-1)$

$E = (7-3x)(2-5x)$

$F = (3x-1)(2x+1)+(3x-1)(5x+2)$

$G = 3(5x-1)+(3x-1)(5x+4)+x^2-1$

Interrogation de mathématiques

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 3(5x-1)+2(6x+2)$

$B = 4x(2x+1)+2x(6x+3)$

$C = -4x(1-2x)+3(3-5x)$

$D = 3x+x^2-3(3x-1)+3x(1-3x)$

$D = (3x+1)(6x-1)$

$E = (7-3x)(2-6x)$

$F = (2x-1)(3x+1)+(2x-1)(4x+2)$

$G = 3(6x-1)+(3x-1)(4x+5)+x^2-1$

Interrogation de mathématiques

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 3(4x-1)+3(5x+2)$

$B = 2x(3x+1)+3x(5x+3)$

$C = -6x(1-2x)+3(3-5x)$

$D = 3x+x^2-3(3x-1)+3x(1-2x)$

$D = (3x+1)(6x-1)$

$E = (7-4x)(2-5x)$

$F = (4x-1)(2x+1)+(2x-1)(5x+2)$

$G = 3(4x-1)+(2x-1)(5x+4)+x^2-1$

Interrogation de mathématiques

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A = 4(5x-1)+2(6x+2)$

$B = 3x(2x+1)+2x(6x+3)$

$C = -3x(1-3x)+3(3-5x)$

$D = 5x+x^2-3(5x-1)+3x(1-3x)$

$D = (2x+1)(3x-1)$

$E = (7-5x)(2-6x)$

$F = (3x-1)(3x+1)+(5x-1)(4x+2)$

$G = 3(7x-1)+(4x-1)(4x+5)+x^2-1$

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

[2]De plus $\dfrac{15}{5} = 3$ et $\dfrac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\dfrac{a}{b}$ telle que $b \times \dfrac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

[5]L'identification précédente entre $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \dfrac{5}{3} = 45$ et $27 \times \dfrac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \dfrac{5}{3} - 27 \times \dfrac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\dfrac{5}{3} = \dfrac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!