CHAPITRE IX

Les puissances de 10

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (***BO n^o 30 du 26-7-2018***) **:**

– À rédiger !

Compétences :

– À rédiger !

SITUATION INITIALE : Le coeur de mon arrière-grand-mère

Mon arrière-grand-mère vient de fêter ses 97 ans.
Je me demande combien de fois son coeur a battu depuis sa naissance.

Donner un ordre de grandeur de ce nombre.

SITUATION INITIALE : La légende du jeu d'échecs

La légende la plus célèbre sur l'origine du jeu d'échecs raconte l'histoire d'un roi légendaire des Indes (appelé Balhait ou Shihram suivant les versions de la légende) qui cherchait à tout prix à tromper son ennui. Il promit donc une récompense exceptionnelle à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait.
Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmane Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain, enthousiaste, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.
Humblement, Sissa demanda au prince de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case. Le prince accorda immédiatement cette récompense en apparence modeste, mais son conseiller lui expliqua qu'il venait de signer la mort du royaume car les récoltes de l'année ne suffiraient à s'acquitter du prix du jeu.

1. Sachant que le jeu d'échec se joue sur un plateau de 64 cases, donner un ordre de grandeur du nombre de grains de riz sur la dernière case.

2. On sait qu'un grain de riz à une masse de $0,02\ g$. Quelle serait la masse en tonnes de riz présent sur la dernière case ?

3. En décembre 2019 la tonne de riz se vendait en moyenne au prix de 390 €. En 2019 le PIB (Produit Intérieur Brut) des États-Unis s'élevait à 19 210 milliards d'euros. Comparer le prix du riz sur la dernière case avec le PIB des États-Unis.

☞ **INTENTIONS PÉDAGOGIQUES ET ÉLÉMENTS DE CORRECTION : Le coeur de mon arrière-grand-mère**

Cette activité permet de manipuler des grands nombres et de comprendre la notion d'ordre de grandeur. Les calculatrices récentes donnent la réponse à cet exercice sous forme d'un nombre décimal. Cependant, en fonction des choix effectués par l'élève (nombre de battements par minutes, considération des années bissextiles...), le résultat final n'est pas le même. On peut même indiquer que, bien que ce nombre de battements soit définis en tant que nombre, il est inaccessible par le calcul.
Les élèves se demandent souvent comment savoir combien de fois bat un coeur par minute, certains envisagent un battement par seconde. En faisant référence au cours d'EPS on peut leur demander de prendre leur poul pour obtenir cette grandeur manquante.
L'idée est également d'utiliser le résultat final pour obtenir à la calculatrice un nombre dont l'écriture sera une écriture scientifique et de commencer à raisonner sur le fait que la calculatrice affiche des nombres dont on ne comprend pas encore le sens.

On peut faire plusieurs hypothèses sur le nombre de battements par minute du coeur de mon arrière-grand-mère.
Imaginons que le battement moyen de son coeur a été de 75 battements par minute.
Comme $1\ h = 60\ min$, $1\ j = 24\ h$, $1\ a = 365\ j$, le nombre de battements total sur l'ensemble de sa vie est donné par :
$75 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 3\,823\,740\,000$
En faisant varier le nombre de battements par minute on obtient :
$65 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 3\,313\,908\,000$
$85 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 4\,333\,572\,000$
$95 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 4\,843\,404\,000$
$100 \times 60 \times 24 \times 365 \times 97 = 5\,098\,320\,000$
En tenant compte des années bissextiles :
$75 \times 60 \times 24 \times 365,25 \times 97 = 3\,826\,359\,000$

Un ordre de grandeur du nombre de battements de coeur pourrait être $4\,500\,000\,000$.

Pour forcer l'écriture scientifique à la calculatrice, je demande aux élèves de multiplier le nombre précédent par 100.
On obtient $4\,500\,000\,000 \times 100 = 450\,000\,000\,000$ la calculatrice affiche $4,5 \times 10^{11}$.
C'est l'occasion de se demander ce que signifie cette nouvelle écriture, le sens du 10 et de l'exposant 11.

I — Exposant et puissances - Définition

❧ DÉFINITION 9.1 : Puissances d'un nombre

a un nombre quelconque et n un nombre entier positif supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

On dit a **exposant** n.

n est **l'exposant** de a^n et a^n est une **puissance** de a.

EXEMPLES :

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Ne pas confondre $3^2 = 9$ et $3 \times 2 = 6$. En effet $3^2 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 fois}}$ et $3 \times 2 = \underbrace{3 + 3}_{\text{2 fois}}$

$7^5 = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{\text{5 fois}} = 16\,807$

$2,4^3 = \underbrace{2,4 \times 2,4 \times 2,4}_{\text{3 fois}} = 13,824$

$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}_{\text{5 fois}} = -32$

$(-1)^{2020} = 1$ et $(-1)^{2019} = -1$: le signe dépend de la parité de l'exposant !

$0^{15} = \underbrace{0 \times 0 \times \ldots \times 0}_{\text{15 fois}} = 0$

II — Les puissances de 10

À rédiger !

III — Quelques propriétés opératoires

À rédiger !

IV — L'écriture scientifique

❧ DÉFINITION 9.2 : Écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

EXEMPLES :

$2\,020 = 2,02 \times 10^3$
$0,007 = 7 \times 10^{-3}$
$3,141\,59 = 3,14159 \times 10^0$
$123\,000\,000\,000 = 1,23 \times 10^{11}$
$0,000\,000\,006\,7 = 6,7 \times 10^{-9}$

REMARQUE :
L'écriture scientifique permet de noter facilement des nombres dont l'écriture décimale demande beaucoup de chiffres.
La **mantisse** peut être plus ou moins précise.
La puissance de 10 utilisée est très importante, elle permet d'avoir un ordre de grandeur du résultat et de comparer des nombres entre eux.

EXEMPLE :
L'eau est constituée d'hydrogène H et d'oxygène O. La molécule d'eau s'écrit H^2O ce qui signifie que un atome d'oxygène est lié à deux atomes d'hydrogène.

Un atome d'oxygène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,026\ g = 2,6 \times 10^{-23}\ g$.
Un atome d'hydrogène à une masse de $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67\ g = 1,67 \times 10^{-24}\ g$.

On remarque les ordres de grandeurs : l'oxygène est plus de 10 fois plus lourd que l'hydrogène, $10^{-23} = 10^{-24} \times 10$

La masse d'une molécule d'eau est donc $2 \times 1,67 \times 10^{-24}\ g + 2,6 \times 10^{-23}\ g = 3,34 \times 10^{-24}\ g + 26 \times 10^{-24}\ g$.
Vous avez remarqué au passage que $2,6 \times 10^{-23} = 26 \times 10^{-24}$ car $26 = 10 \times 2,6$.

La masse d'une molécule d'eau est donc d'environ $29,34 \times 10^{-24}\ g = 2,934 \times 10^{-23}$

Un litre d'eau a une masse d'environ $1\ kg = 1\,000\ g$ à 20řC.

Pour calculer un ordre de grandeur du nombre de molécules d'eau dans un litre il suffit d'effectuer le quotient : $1\,000\ g \div 2,934 \times 10^{-23}$

La calculatrice répond environ $3,408 \times 10^{25}$ molécules soit $34\,080\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ molécules !

EXERCICES

EXERCICE N° 9.1 : Puissance – Définition

Écrire sous de forme de puissance puis calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$B = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$C = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$
$D = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$
$E = 2 \times 4 \times 16 \times 32$
$F = 3 \times 9 \times 27 \times 81$
$G = 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$H = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1$
$I = 10 \times 100 \times 1\,000 \times 10\,000$

EXERCICE N° 9.2 : Puissances – Définition – Épisode 2

Calculer la valeur décimale sans calculatrice

$A = 2^6$
$B = 3^4$
$C = 5^3$
$D = 0^{10}$
$E = (-2)^7$
$F = (-3)^4$
$G = (-5)^3$
$H = (-1)^{2019}$
$I = (-1)^{2020}$
$J = 0,5^3$
$K = 0,3^4$
$L = (-0,2)^6$

EXERCICE N° 9.3 : Puissances de 10

Calculer la valeur décimale sans calculatrice.

$A = 10^4$
$B = 10^9$
$C = 10^{12}$
$D = 10^3 \times 10^4$
$E = 10^7 \times 10^5$
$F = 10^5 \times 10^5 \times 10^5$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^7}{10^5}$
$I = \frac{10^3}{10^5}$

EXERCICE N° 9.4 : Puissance de 10 – Épisode 2

Écrire sous forme de puissance de 10.

$A = 10^3 \times 10^7$
$B = 10^5 \times 10^7 \times 10^9$
$C = 10^{13} \times 10^{29}$
$E = \frac{10^9}{10^5}$
$F = \frac{10^{12}}{10^3}$
$G = \frac{10^3}{10^2}$
$H = \frac{10^5}{10^5}$
$I = \frac{10^7}{10^9}$
$J = \frac{10^5}{10^{10}}$

EXERCICE N° 9.5 : Puissance de 10 – Épisode 3

Écrire sous forme décimale sans calculatrice.

$A = 10^{13}$
$B = 10^1$
$C = 10^0$
$E = 10^{-1}$
$F = 10^{-5}$
$G = 10^5 \times 10^7$
$H = 10^3 \times 10^5 \times 10^2$
$I = 10^{-3} \times 10^7$
$J = 10^{-5} \times 10^{-7}$
$K = \frac{10^4}{10^8}$
$L = \frac{10^{-7}}{10^9}$
$M = \frac{10^{-5}}{10^{-10}}$

EXERCICE N° 9.6 : Compter jusqu'à un milliard

On se demande combien de temps il faudrait pour compter jusqu'à un milliard!
Dire certains nombres prend du temps, par exemple 978 797 469 : neuf-cent-soixante-dix-huit-millions-sept-cent-quatre-vingt-dix-sept-mille-quatre-cent-soixante-neuf, doit bien prendre quelques secondes pour être nommé.
Imaginons que vous décidiez de compter jusqu'à un milliard en passant 16 h par jour à cette activité (il faut bien manger, dormir...). On peut considérer qu'il faut environ 2 s pour chaque nombre.
Combien de temps allez-vous passer à cette tâche? (en secondes, minutes, heures, jours, mois, années)

EXERCICE N° 9.7 : Écriture décimale et scientifique

Écrire sous forme décimale les nombres suivants écrits sous forme scientifique :

$A = 2,02 \times 10^3$
$B = 7 \times 10^{-3}$
$C = 3,14159 \times 10^0$
$D = 1,2345 \times 10^9$
$E = 7,3 \times 10^{-12}$
$F = 7,89 \times 10^{15}$
$G = 3,098 \times 10^{-11}$
$H = 1,234\,567\,89 \times 10^{11}$

EXERCICE N° 9.8 : Écriture scientifique et décimale

Écrire sous forme scientifique les nombres suivants :

A = 2 021
B = 0,000 007
C = 2,718 28
D = 1 234 567 890
E = 0,000 000 670 9
F = 5 670 000 000 000 000
G = 0,000 000 000 000 4
H = 20 200 000 000 000 000

EXERCICE N° 9.9 : Bételgeuse

Bételgeuse est une étoile, une supergéante rouge, dans la constellation d'Orion. Elle se situe à environ 647 $a.l.$ de la terre. L'année lumière ($a.l.$) est une unité de mesure astronomique qui correspond à la distance parcourue en un an par la lumière.

1. Sachant que la lumière parcoure environ 3×10^5 km chaque seconde, donner une écriture scientifique de la distance parcourue en une année en kilomètres.

2. Donner une écriture scientifique de la distance entre Bételgeuse et la Terre en kilomètres.

3. Bételgeuse a un rayon environ 1 000 fois plus grand que celui du Soleil. Le Soleil à un rayon d'environ 7×10^5 km. Donner l'écriture scientifique du rayon de Bételgeuse en kilomètres.

4. Bételgeuse est une étoile jeune, elle a environ 8×10^6 a (a désigne le préfixe pour année). Elle devrait disparaître dans les jours qui viennent ou plus surement dans une centaine de millier d'années au maximum. Les scientifiques surveillent cette étoile qui pourrait devenir une supernova ce qui illuminerait le ciel nocturne de la Terre.
Le Soleil a déjà 5×10^9 a, il en est à la moitié de sa vie.
Comparer les durées de vie de ces deux étoiles et dire combien de fois plus aura existé le Soleil par rapport à Bételgeuse.

EXERCICE N° 9.1 : **Puissance – Définition** CORRECTION

Écrire sous de forme de puissance puis calculer la valeur décimale sans calculatrice.
$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$
$B = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$
$C = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = (-1)^6 = 1$ car 6 est pair.
$D = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^5 = -2^5 = -32$ car 5 est impair et $2^5 = 32$.
$E = 2 \times 4 \times 16 \times 32 = 2 \times 2^2 \times 2^4 \times 2^5 = \underbrace{2 \times \ldots 2}_{12 \text{ fois}} = 2^{12} = 4\,096$
$F = 3 \times 9 \times 27 \times 81 = 3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{10} = 59\,049$
$G = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$
$H = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,1^4 = 0,000\,1$
$I = 10 \times 100 \times 1\,000 \times 10\,000 = 10^1 \times 10^2 \times 10^3 \times 10^4 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$

EXERCICE N° 9.2 : **Puissances – Définition – Épisode 2** CORRECTION

Calculer la valeur décimale sans calculatrice
$A = 2^6 = 64$
$B = 3^4 = 81$
$C = 5^3 = 125$
$D = 0^{10} = 0$
$E = (-2)^7 = -2^7 = -128$ car 7 est impair !
$F = (-3)^4 = 3^4 = 81$ car 4 est pair !
$G = (-5)^3 = -5^3 = -125$ car 3 est impair !
$H = (-1)^{2\,019} = -1$ car 2 019 est impair !
$I = (-1)^{2\,020} = 1$ car 2 020 est pair !
$J = 0,5^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{5^3}{10^3} = \frac{125}{1\,000} = 0,125$
$K = 0,3^4 = \frac{3^4}{10^4} = \frac{81}{10\,000} = 0,008\,1$
$L = (-0,2)^6 = 0,2^6 = 0,000\,064$

EXERCICE N° 9.3 : **Puissances de 10** CORRECTION

Calculer la valeur décimale sans calculatrice.
$A = 10^4 = 10\,000$
$B = 10^9 = 1\,000\,000\,000$
$C = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
$D = 10^3 \times 10^4 = 10^7 = 10\,000\,000$
$E = 10^7 \times 10^5 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
$F = 10^5 \times 10^5 \times 10^5 = 10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$
$G = \frac{10^3}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10$
$H = \frac{10^7}{10^5} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^2 = 100$
$I = \frac{10^3}{10^5} = \frac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0,01$

EXERCICE N° 9.4 : **Puissance de 10 – Épisode 2** CORRECTION

Écrire sous forme de puissance de 10.
$A = 10^3 \times 10^7 = 10^{10}$
$B = 10^5 \times 10^7 \times 10^9 = 10^{21}$

$C = 10^{13} \times 10^{29} = 10^{42}$
$E = \frac{10^9}{10^5} = 10^4$
$F = \frac{10^{12}}{10^3} = 10^9$
$G = \frac{10^3}{10^2} = 10^1$
$H = \frac{10^5}{10^5} = 10^0$
$I = \frac{10^7}{10^9} = 10^{-2}$
$J = \frac{10^5}{10^{10}} = 10^{-5}$

EXERCICE N° 9.5 : Puissance de 10 – Épisode 3 CORRECTION

Écrire sous forme décimale sans calculatrice.
$A = 10^{13} = 10\,000\,000\,000\,000$
$B = 10^1 = 10$
$C = 10^0 = 1$
$E = 10^{-1} = 0,1$
$F = 10^{-5} = 0{,}000\,01$
$G = 10^5 \times 10^7 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
$H = 10^3 \times 10^5 \times 10^2 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$
$I = 10^{-3} \times 10^7 = 10^4 = 10\,000$
$J = 10^{-5} \times 10^{-7} = 10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$
$K = \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4} = 0{,}000\,1$
$L = \frac{10^{-7}}{10^9} = 10^{-16} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,1$
$M = \frac{10^{-5}}{10^{-10}} = 10^{-5-(-10)} = 10^5 = 100\,000$

EXERCICE N° 9.6 : Compter jusqu'à un milliard CORRECTION

Il faut 2 s par nombre. Il faut compter un milliard de nombres. Il faut donc deux milliards de secondes.

Nous allons compter 16 h par jour.
$1\ h = 60\ min$ donc $16\ h = 960\ min$.
$1\ min = 60\ s$ donc $16\ h = 960\ min = 57\,600\ s$

$2\,000\,000\,000\ s \div 57\,600\ s \approx 34\,722$ jours.
Plus précisément $2\,000\,000\,000\ s = 57\,600\ s \times 34\,722 + 12\,800\ s$
Or $12\,800\ s = 60\ s \times 213 + 20\ s$ donc $12\,800\ s = 213\ min\ 20\ s = 3\ h\ 23\ min\ 20\ s$.

$34\,722\ j = 365 \times 95 + 47\ j$.

Il faut donc un peu plus de 95 ans pour compter jusqu'à un milliard, exactement $95\ a\ 47\ j\ 3\ h\ 23\ min\ 20\ s$!

EXERCICE N° 9.7 : Écriture décimale et scientifique CORRECTION

Écrire sous forme décimale les nombres suivants écrits sous forme scientifique :
$A = 2,02 \times 10^3 = 2\,020$
$B = 7 \times 10^{-3} = 0{,}007$
$C = 3,14159 \times 10^0 = 3{,}141\,59$
$D = 1,2345 \times 10^9 = 1\,234\,500\,000$
$E = 7{,}3 \times 10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,007\,3$
$F = 7{,}89 \times 10^{15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,007\,89$
$G = 3,098 \times 10^{-11} = 0{,}000\,000\,000\,030\,98$

H = $1,234\ 567\ 89 \times 10^{11} = 123\,456\,789\,000$

EXERCICE N° 9.8 : Écriture scientifique et décimale CORRECTION

Écrire sous forme scientifique les nombres suivants :
A = $2\,021 = 2,021 \times 10^{3}$
B = $0,000\,007 = 7 \times 10^{-6}$
C = $2,718\,28 = 2,718\,28 \times 10^{0}$
D = $1\,234\,567\,890 = 1,234\,567\,89 \times 10^{9}$
E = $0,000\,000\,670\,9 = 6,709 \times 10^{-7}$
F = $5\,670\,000\,000\,000\,000 = 5,67 \times 10^{15}$
G = $0,000\,000\,000\,000\,4 = 4 \times 10^{-13}$
H = $20\,200\,000\,000\,000\,000 = 2,02 \times 10^{16}$

EXERCICE N° 9.9 : Bételgeuse CORRECTION

1. Sachant que la lumière parcoure environ $3 \times 10^{5}\ km$ chaque seconde, donner une écriture scientifique de la distance parcourue en une année en kilomètres.

$1\ min = 60\ s$, $1\ h = 60\ min$, $1\ j = 24\ h$ et $1\ a = 365\ j$
En une année il y a : $365 \times 24 \times 60 \times 60\ s = 31\,536\,000\ s = 3,153\,6 \times 10^{7}\ s$.

La lumière parcoure $3 \times 10^{5}\ km$ chaque seconde.
En une année : $3 \times 10^{5}\ km \times 3,153\,6 \times 10^{7} = 9,460\,8 \times 10^{12}\ km$ soit $9\,460\,800\,000\,000\ km$.
Donc $1\ a.l. = 9,460\,8 \times 10^{12}\ km$

2. Donner une écriture scientifique de la distance entre Bételgeuse et la Terre en kilomètres.

Il faut calculer : $647 \times 9,460\,8 \times 10^{12}\ km = 6\,121,137\,6 \times 10^{12}\ km$
Or $6\,121,137\,6 = 6,121\,137\,6 \times 10^{3}$
Donc la distance cherchée est : $6,121\,137\,6 \times 10^{3} \times 10^{12}\ km = 6,121\,137\,6 \times 10^{15}\ km$
Soit $6\,121\,137\,600\,000\,000\ km$

3. Bételgeuse a un rayon environ 1 000 fois plus grand que celui du Soleil. Le Soleil à un rayon d'environ $7 \times 10^{5}\ km$. Donner l'écriture scientifique du rayon de Bételgeuse en kilomètres.

$7 \times 10^{5}\ km \times 1\,000 = 7 \times 10^{5} \times 10^{3}\ km = 7 \times 10^{8}\ km$

4. Bételgeuse est une étoile jeune, elle a environ $8 \times 10^{6}\ a$ (a désigne le préfixe pour année). Elle devrait disparaître dans les jours qui viennent ou plus surement dans une centaine de millier d'années au maximum. Les scientifiques surveillent cette étoile qui pourrait devenir une supernova ce qui illuminerait le ciel nocturne de la Terre.
Le Soleil a déjà $5 \times 10^{9}\ a$, il en est à la moitié de sa vie.
Comparer les durées de vie de ces deux étoiles et dire combien de fois plus aura existé le Soleil par rapport à Bételgeuse.

Le Soleil va vivre environ $10\ \times 10^{9}\ a$ et Bételgeuse environ $8 \times 10^{6}\ a$.

$10 \times 10^{9}\ a \div 8 \times 10^{6} = (10 \div 8) \times (10^{9} \div 10^{6}) = 1,25 \times 10^{3} = 1\,250$

Le Soleil va vivre environ 1 250 fois plus longtemps que Bételgeuse !!

Évaluation de mathématiques

Cette première partie de l'évaluation se traite sans calculatrice. Vous devrez rendre une première copie avant de passer à la seconde partie où la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

$A = 1\,000\,000$
$B = 0{,}00001$
$C = 100\,000\,000$
$D = 0{,}00000001$
$E = 10$
$F = 1$

Exercice 2 : Écrire les nombres suivants sous forme de puissances de 10 :

$G = 10^3 \times 10^5$
$H = 10^{-7} \times 10^{-3}$

$I = \dfrac{10^5}{10^3}$

$J = \dfrac{10^7}{10^{-4}}$

$K = \dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$

$L = \dfrac{100\,000\,000}{0{,}0000001}$

$M = \dfrac{10^6 \times 0{,}001}{10\,000 \times 10^{-10}}$

Exercice 3 : Écrire les nombres suivants sous forme scientifique :

$N = 345\,000\,000$
$O = 0{,}000067$
$P = 2021$
$Q = 3{,}14$
$R = 0{,}0007 \times 70\,000$
$S = 500\,000 \times 2\,500\,000$

....

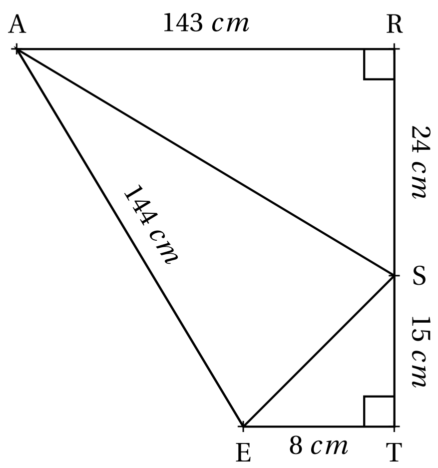
Cette seconde partie de l'évaluation se traite avec la calculatrice.

Exercice 4

1. Un cheveux a une épaisseur d'environ 50 μm. Exprimer cette grandeur en mètre.
2. Un humain possède en moyenne $1,2 \times 10^5$ cheveux sur sa tête. Écrire ce nombre sous forme décimale.
3. Il y a environ 471 000 habitants à Toulouse. En alignant tous les cheveux de tous les toulousains dans le sens de l'épaisseur, quelle distance en mètres pourrait-on obtenir ?

Exercice 5

Cette figure n'est pas tracée en vraie grandeurs.



1. Calculer la mesure des côtés [AS] et [SE] en justifiant votre réponse.

2. Le triangle ASE est-il rectangle ?

Évaluation de mathématiques

Exercice 1

1. Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$A = 10^7$
$B = 10^{-10}$
$C = 2^{10}$
$D = (-1)^{19}$

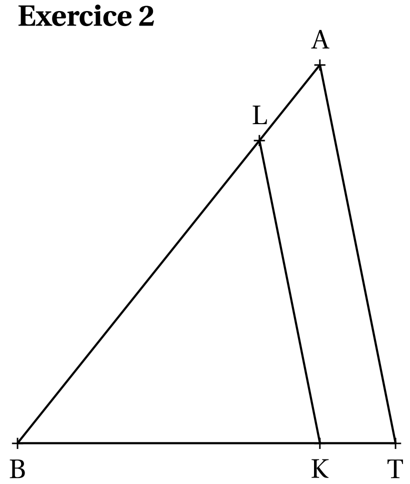
$E = 3,14 \times 10^5$
$F = 7,856 \times 10^{-5}$
$G = 10^7 \times 10^{-4}$
$H = 2 \times 10^5 \times 3,5 \times 10^{-7}$

2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$I = 567\,000\,000$
$J = 0,000\,078$
$K = 3,141\,59$
$L = 6\,722\,000\,000$

$M = 10\,000\,000 \times 0,000\,000\,02$
$N = 3 \times 10^7 \times 7 \times 10^3$
$O = 0,000\,000\,007 \times 20\,000\,000$
$P = 2^{15}$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

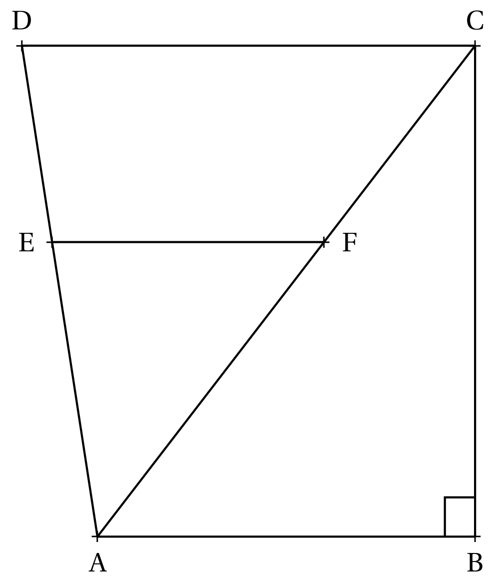
- $K \in [BT]$ et $L \in [BA]$
- $(KL)//(TA)$
- $BA = 10\ cm$, $BK = 5\ cm$, $LK = 6\ cm$ et $AT = 9\ cm$

Calculer BL et BT

Exercice 3

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

- $E \in [DA]$ et $F \in [CA]$
- $(EF)//(DC)$
- $(AB) \perp (BC)$
- $BA = 33\ m$, $BC = 56\ m$
- $AF = 39\ m$, $DC = 90\ m$ et $AD = 75\ m$



Calculer AC puis EF et AE

Correction – Évaluation de mathématiques

Exercice 1

1. Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$A = 10^7 = \boxed{10\,000\,000}$
$B = 10^{-10} = \boxed{0{,}000\,000\,000\,1}$
$C = 2^{10} = \boxed{1\,024}$
$D = (-1)^{19} = \boxed{-1}$

$E = 3,14 \times 10^5 = 3,14 \times 100\,000 = \boxed{314\,000}$
$F = 7,856 \times 10^{-5} = 7,856 \times 0,000\,01 = \boxed{0{,}000\,078\,56}$
$G = 10^7 \times 10^{-4} = 10^{7+(-4)} = 10^3 = \boxed{1\,000}$
$H = 2 \times 10^5 \times 3,5 \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-2} = \boxed{0{,}07}$

2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$I = 567\,000\,000 = \boxed{5{,}67 \times 10^8}$

$J = 0{,}000\,078 = \boxed{7{,}8 \times 10^{-5}}$

$K = 3{,}141\,59 = \boxed{3{,}141\,59 \times 10^0}$

$L = 6\,722\,000\,000 = \boxed{6{,}722 \times 10^9}$

$M = 10\,000\,000 \times 0{,}000\,000\,02 = 10^7 \times 2 \times 10^{-8} = \boxed{2 \times 10^{-1}}$

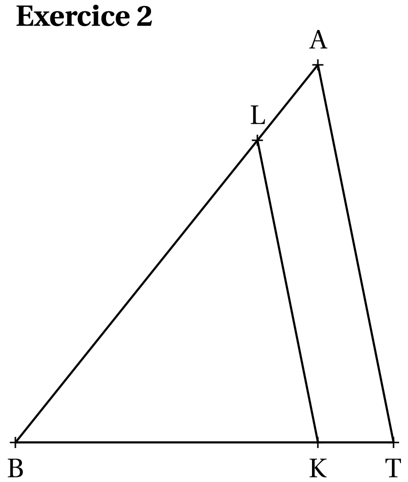
$N = 3 \times 10^7 \times 7 \times 10^3 = 21 \times 10^{10} = 2,1 \times 10^1 \times 10^{10} = \boxed{2,1 \times 10^{11}}$

$O = 0{,}000\,000\,007 \times 20\,000\,000 = 7 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^7$

$O = 14 \times 10^{-2} = 0,14 = \boxed{1,4 \times 10^{-1}}$

$P = 2^{15} = 32\,768 = \boxed{3{,}276\,8 \times 10^4}$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :

- $K \in [BT]$ et $L \in [BA]$
- $(KL)//(TA)$
- $BA = 10\ cm$, $BK = 5\ cm$, $LK = 6\ cm$ et $AT = 9\ cm$

Calculer BL et BT

Dans le triangle BAT, comme $K \in [BT]$ et $L \in [AB]$ et $(KL)//(TA)$,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BK}{BT} = \frac{LK}{AT}$$

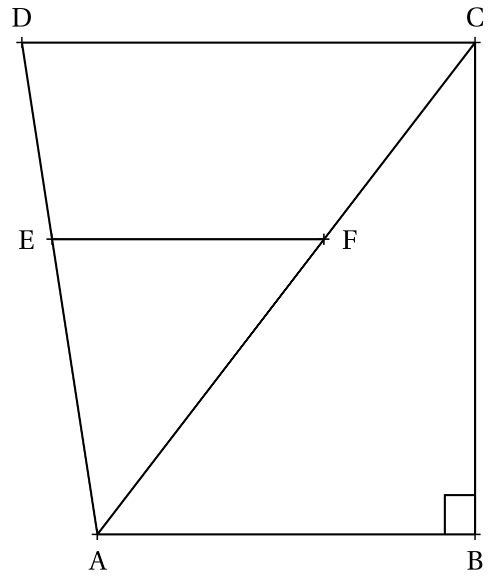
$$\frac{BL}{10\ cm} = \frac{5\ cm}{BT} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$$

Comme $\frac{BL}{10\ cm} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$ on a $BL = \frac{6\ cm \times 10\ cm}{9\ cm} = \frac{60}{9}\ cm = \boxed{\frac{20}{3}\ cm \approx 6,3\ cm}$

Comme $\frac{5\ cm}{BT} = \frac{6\ cm}{9\ cm}$ on a $BT = \frac{5\ cm \times 9\ cm}{6\ cm} = \frac{45}{6}\ cm = \boxed{7{,}5\ cm}$

Exercice 3

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs, on sait que :



— $E \in [DA]$ et $F \in [CA]$
— $(EF)//(DC)$
— $(AB) \perp (BC)$
— $BA = 33\ m$, $BC = 56\ m$
— $AF = 39\ m$, $DC = 90\ m$ et $AD = 75\ m$

Calculer AC puis EF et AE

Dans le triangle ABC rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BC^2 = AC^2$$
$$33^2 + 56^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 1\,089 + 3\,136$$
$$AC^2 = 4\,225$$
$$AC = 65$$

Donc $\boxed{AC = 65\ m}$

Dans le triangle ADC, comme $E \in [AD]$ et $F \in [AC]$ et $(EF)//(DC)$.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{DC}$$
$$\frac{AE}{75\ m} = \frac{39\ m}{65\ m} = \frac{EF}{90\ m}$$

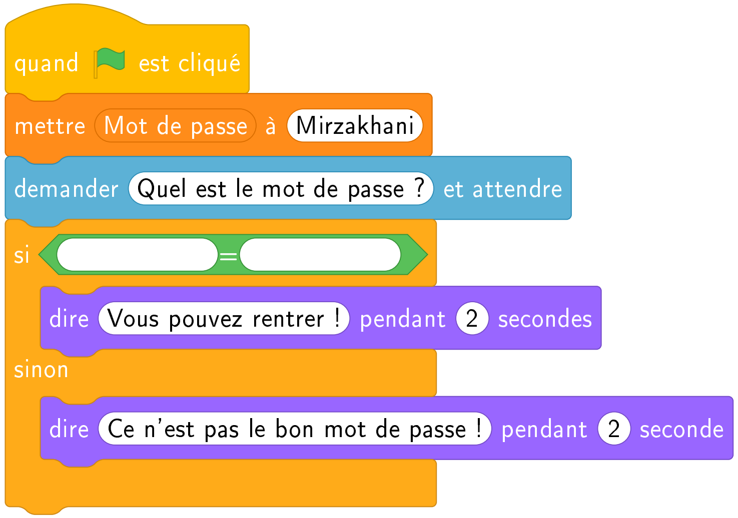
Comme $\frac{AE}{75\ m} = \frac{39\ m}{65\ m}$ on a $AE = \frac{75\ m \times 39\ m}{65\ m} = \frac{2\,925}{65}\ m = \boxed{45\ m}$

Comme $\frac{EF}{90\ m} = \frac{39\ m}{65\ m}$ on a $EF = \frac{90\ m \times 39\ m}{65\ m} = \frac{3\,510}{65}\ m = \boxed{54\ m}$

✦ **ALGORITHMIQUE** — Le code secret ✦

PREMIÈRE PARTIE — Le mot de passe

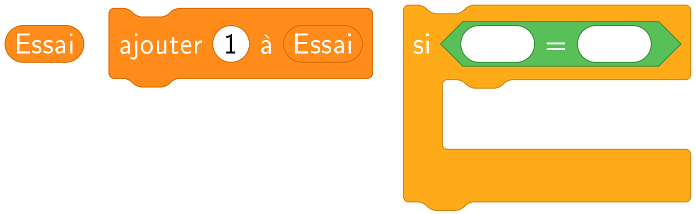
Voici un programme réalisé avec Scratch. Il demande à l'utilisateur un mot de passe et vérifie s'il s'agit bien de celui attendu.
Saisir ce programme dans Scratch en ajoutant les blocs manquants et en fixant le mot de passe à « Mathématiques ».



DEUXIÈME PARTIE — Le mot de passe — Épisode 2

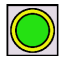
Modifier le programme précédent de telle manière que l'utilisateur puisse faire au maximum essais.
Indiquer à chaque fois le numéro de l'essai.
En cas d'échec trois fois de suite, faire un message à l'utilisateur.

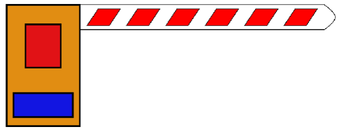
Voici quelques blocs qui pourraient vous être utiles :



TROISIÈME PARTIE — Le portail

Le portail de ma résidence n'est pas protégé. Pour l'ouvrir il suffit d'appuyer sur le bouton vert.
Nous l'avons modélisé dans Scratch. Il se trouve dans le fichier Portail.sb3





1. Importer ce fichier dans Scratch.

2. Un fois appuyé sur le bouton vert, le portail se referme 10 s plus tard.
Modifier le programme pour qu'il se ferme au bout de 5 s.

3. On souhaite maintenant sécuriser le portail à l'aide d'un code simple : le portail ne s'ouvre que si l'utilisateur a appuyé sept fois de suite sur le bouton vert. Ajouter cette fonctionnalité dans le programme Scratch précédent.

QUATRIÈME PARTIE — Sécurisation du portail

Le code précédent n'est pas trop sécurisé. Pour améliorer la situation on a ajouté un bouton rouge. Ce bouton permet de valider ce qui est saisi avec le bouton vert, ce qui permet d'éviter les tentatives au hasard.
En cas d'erreur de code, le portail est bloqué pendant 10 s sans qu'il soit possible de saisir un nouveau code.

1. Si on suppose que le code secret est 7, combien de temps mettrait pour ouvrir le portail un utilisateur qui testerait tous les codes entiers dans l'ordre.

2. Importer le fichier *Portail_securise.sb3* dans Scratch.

3. Modifier le programme pour obtenir le résultat attendu.

LES PUISSANCES DE 10

Définition

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^3 \neq 2 \times 3$ en effet $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$1^{2020} = 1$

$(-1)^{2019} = -1$ car 2019 est impair. $(-1)^{2020} = 1$ car 2020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

Les puissances de 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{\text{n zéros}}$$

Exemples :

$10^2 = 100$ $\quad 10^3 = 1000$ $\quad 10^6 = 1000000$ $\quad 10^9 = 1000000000$

Propriétés et extension de la définition

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entiers supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n \,;\, 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\qquad \dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\qquad (10^n)^p = 10^{n \times p}$

Préfixe et puissances de 10 :

n	nano	$10^{-9}=0{,}000\,000\,001$	un milliardième
µ	micro	$10^{-6}=0{,}000\,001$	un millionième
m	milli	$10^{-3}=0{,}001$	un millième
c	centi	$10^{-2}=0{,}01$	un centième
d	déci	$10^{-1}=0{,}1$	un dixième
		$10^0=1$	
da	déca	$10^1=10$	une dizaine
h	hecto	$10^2=100$	une centaine
k	kilo	$10^3=1\,000$	un millier
M	méga	$10^6=1\,000\,000$	un million
G	giga	$10^9=1\,000\,000\,000$	un milliard

Inverses

L'écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

Exemples :

$2\,020 = 2,02 \times 10^3$

$0{,}0078 = 7,8 \times 10^-3$

$1\,234\,567\,890 = 1,23456789 \times 10^9$

$-5 = -5 \times 10^0$

$-0{,}000\,001\,23 = -1,23 \times 10^{-6}$

$15\,900 \times 10^5 = 1,59 \times 10^9$

Problème :

Notes

[1]On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.

a et b deux nombres relatifs.

$a \times \left(b + opp(b)\right) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$

Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$

En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :

$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\left(a + opp(a)\right)\left(b + opp(b)\right) = 0$

$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$

Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$

$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$

$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$

C'est à dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

[2]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »