Chapitre IX

Les équations du premier degré

À rédiger !

Plan du cours :

À rédiger !

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) **:**

- À rédiger !

Compétences :

- À rédiger !

Situation initiale : Une histoire de balance

Voici une série d'énigmes visuelles.
Une balance type « Roberval »est en équilibe. Des masses sont posées dans chacun de ses plateaux.
Les carrés jaunes ont une masse inconnue. Les cercles verts ont une masse d'une unité.

L'objectif est toujours le même : déterminer la masse d'un carré jaune.

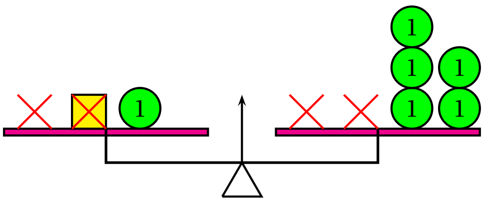
Un carré jaune peut avoir une masse négative !

Pour déterminer la masse du carré jaune, vous pouvez utiliser les deux principes suivants :

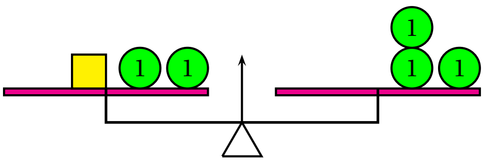
— on peut ajouter la même quantité dans les deux plateaux de la balance sans changer l'équilibre ;

— on peut soustraire la même quantité dans les deux plateaux de la balance sans changer l'équilibre.

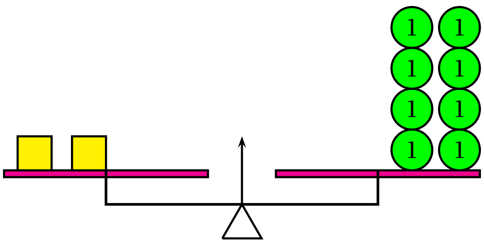
1.



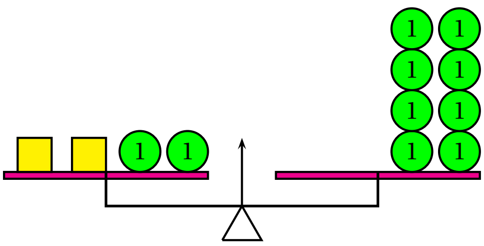
2.



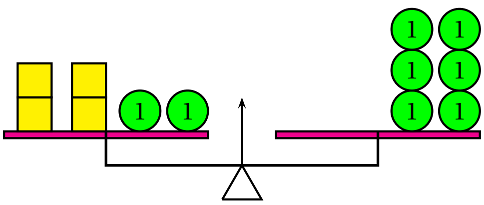
3.



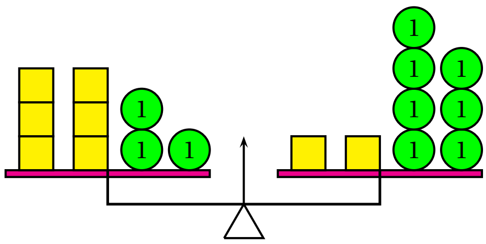
4.



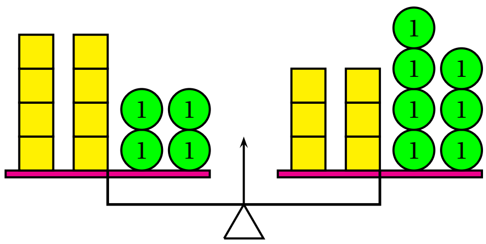
5.



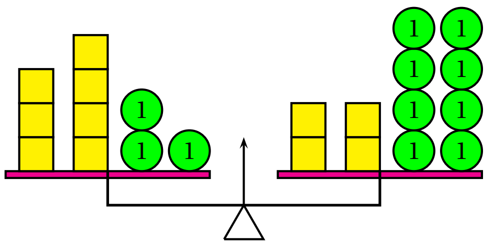
6.



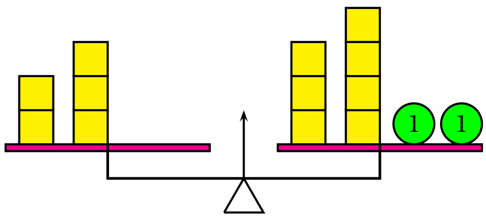
7.



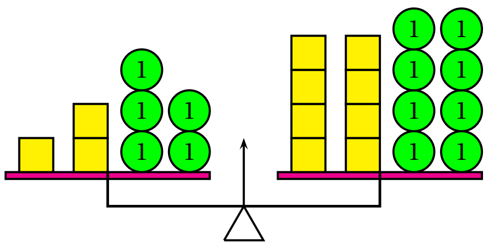
8.



9.



10.



I — Équations et solutions

Voici une équation :

$$\underbrace{3x+2}_{\text{Premier membre}} = \underbrace{x+6}_{\text{Second membre}}$$

Une **équation** est constituée de deux membres et d'un symbole d'égalité.
Chaque membre est une expression algébrique.
Une **équation du premier degré à une inconnue** est constituée de deux expressions contenant une même lettre, souvent x, dont l'exposant est au maximum 1. Il n'y a donc pas de termes en x^2 ou en x^3 dans une équation du premier degré.

On dit que x est une **inconnue** de l'équation.

Résoudre une équation c'est déterminer tous les nombres x tels que l'égalité soit vérifiée.

Dans l'exemple ci-dessus, on sait que l'expression $3x+2$ n'est pas équivalente à l'expression $x+6$.
Ainsi par exemple pour $x=3$, on remarque que $3x+2=3\times3+2=11$ et $x+6=3+6=9$.

Résoudre cette équation revient à trouver tous les nombres x tels que cette égalité soit vérifiée (vraie).

Une équation peut avoir une seule solution, plusieurs solutions ou aucune solution.

Une stratégie pour trouver des solutions d'une équation consiste à faire plusieurs essais :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$3x+2$	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	19	22
$x+6$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

On constate que pour $x=2$ les expressions $3x+2$ et $x+6$ sont égales.
On dit que 2 est une **solution** de l'équation.

On ne sait pas si c'est la seule solution. Il en existe peut-être d'autres.

Voici une deuxième équation :

$$7x+3=4x+8$$

On peut à nouveau tester plusieurs valeurs dans un tableau :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$7x+3$	-32	-25	-18	-11	-4	3	10	17	24	31	38
$4x+8$	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24	28

On remarque que pour $x = 1$ on a $7x+3 < 4x+8$ (car $10 < 12$) et que pour $x = 2$ on a $7x+3 > 4x+8$ (car $17 > 16$).
Il y a peut-être une solution comprise entre 1 et 2. Nous pouvons « zoomer » :

x	1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$	2
$7x+3$	10	$10,7$	$11,4$	$12,1$	$12,8$	$13,5$	$14,2$	$14,9$	$15,6$	$16,3$	17
$4x+8$	12	$12,4$	$12,8$	$13,2$	$13,6$	14	$14,4$	$14,8$	$15,2$	$15,6$	16

On remarque à nouveau que pour $x = 1,6$ on a $7x+3 < 4x+8$ (car $14,2 < 14,4$) et pour $x = 1,7$ on a $7x+3 > 4x+8$ (car $14,9 > 14,8$)
« Zoomons »entre $1,6$ et $1,7$:

x	$1,60$	$1,61$	$1,62$	$1,63$	$1,64$	$1,65$	$1,66$	$1,67$	$1,68$	$1,69$	$1,70$
$7x+3$	$14,20$	$14,27$	$14,34$	$14,41$	$14,48$	$14,55$	$14,62$	$14,69$	$14,76$	$14,83$	$14,90$
$4x+8$	$14,40$	$14,44$	$14,48$	$14,52$	$14,56$	$14,60$	$14,64$	$14,68$	$14,72$	$14,76$	$14,80$

On constate à nouveau qu'il existe certainement une solution comprise entre $1,67$ et $1,68$.
Nous pourrions continuer cette recherche avec un tableur !

MÉTHODE 9 . 1 : Tester si un nombre est solution d'une équation
On peut vérifier si un nombre est solution d'une équation :

- il suffit de remplacer x par le nombre dans chaque membre de l'équation ;
- on vérifie ensuite si les deux calculs donnent le même résultat ;
- si le deux résultats sont égaux alors le nombre choisi est une solution de l'équation ;
- sinon ce n'est pas une solution.

EXEMPLES :
Soit l'équation :

$$5x+3 = 9+6x$$

On peut tester les nombres 1, 6 et -6 :

Pour $x=1$, $5x+3=5+3=8$ et $9+6x=9+6=15$. Comme $8\neq 15$, 1 n'est pas une solution.

Pour $x=6$, $5x+3=30+3=33$ et $9+6x=9+36=45$. Comme $33\neq 45$, 6 n'est pas une solution.

Pour $x=-6$, $5x+3=-30+3=-27$ et $9+6x=9-36=-27$. Donc -6 est une solution!

Voici une autre équation :

$$7x+3=4x+8$$

Nous avons déjà testé de nombreux nombres sont succès.

Pour $x=\frac{5}{3}$,

$7x+3=7\times\frac{5}{3}+3=\frac{35}{3}+\frac{9}{3}=\frac{44}{3}$

$4x+8=4\times\frac{5}{3}+8=\frac{20}{3}+\frac{24}{3}=\frac{44}{3}$

On constate donc que $\frac{5}{3}$ est une solution de cette équation.

Voici une dernière équation qui n'est pas du premier degré :

$$x^3-x=2x^2-2$$

Testons les nombres 0, 1, -1, 2 et -2.

Pour $x=0$, $x^3-x=0^3-0=0$ et $2x^2-2=2\times 0^2-2=-2$ comme $0\neq -2$, 0 n'est pas une solution.

Pour $x=1$, $x^3-x=1^3-1=0$ et $2x^2-2=2-2=0$ donc 1 est une solution de l'équation.

Pour $x=-1$, $x^3-x=(-1)^3-(-1)=-1+1=0$ et $2x^2-2=2(-1)^2-2=2-2=0$ donc -1 est une solution.

Pour $x=2$, $x^3-x=2^3-2=8-2=6$ et $2x^2-2=2\times 2^2-2=8-2=6$ donc 2 est une solution.

Pour $x=-2$, $x^3-x=(-2)^3-(-2)=-8+2=-6$ et $2x^2-2=2(-2)^2-2=8-2=6$ donc -2 n'est pas une solution.

Nous avons donc trouvé 3 solutions à cette équation : 1, -1 et 2.

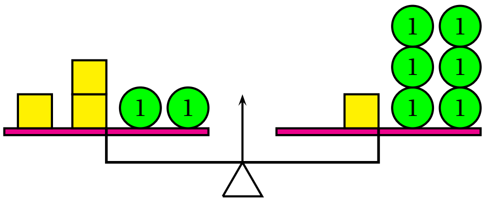
II — Résolution des équations du premier degré

Il y a un principe fondamental qui définit la notion d'égalité.

❧ DÉFINITION 9.1 :

Quand deux quantités sont égales on peut ajouter ou soustraire la même quantité aux deux membres de l'égalité sans changer cette égalité.

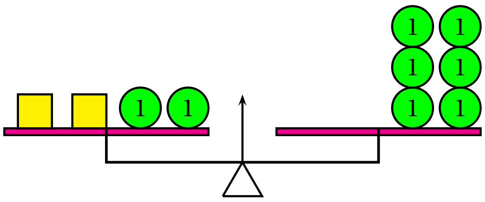
Ce principe peut être illustré par une balance à deux plateaux.
On cherche la masse d'un carré jaune. La boule verte a une masse d'une unité. Pour déterminer la masse d'un carré jaune nous allons effectuer des manipulations qui ne modifient pas l'équilibre. Nous allons donc ajouter ou soustraire la même quantité aux deux plateaux.
La balance à gauche peut se modéliser sous la forme de l'équation de droite. x désigne la masse du carré jaune.



$$3x+2=x+6$$

L'objectif est de rassembler les objets semblables dans le même plateau.
On enlève un carré jaune sur chaque plateau.

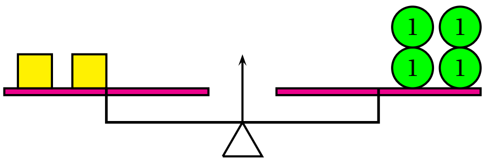
$$3x+2-x=x+6-x$$



$$2x+2=6$$

On enlève deux boules vertes dans les deux plateaux.

$$2x+2-2=6-2$$



$$2x=4$$

Arrivé à cette étape on utilise la définition des fractions.

❧ **DÉFINITION 9.2 : Fraction et quotient**

a et b deux nombres non nuls.

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est le nombre vérifiant l'égalité suivante :

$$b\times\frac{a}{b}=a$$

Ainsi la solution de l'équation $2x=4$ est le nombre $\dfrac{4}{2}$ puisque $2\times\dfrac{4}{2}=4$.

$\dfrac{4}{2}=0,5$ est une solution de l'équation.

REMARQUE :

En résolvant cette équation ainsi nous avons également démontré que $0,5$ est **la seule** solution de cette équation !

MÉTHODE 9 . 2 : Résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré on effectue une succession de manipulations pour obtenir des équations équivalentes.
Cela revient à ajouter ou soustraire des termes identiques aux deux membres de l'équation comme on le ferait dans une balance en équilibre.
L'objectif consiste à isoler dans un membre les termes contenant l'inconnue (souvent la lettre x) et dans l'autre membre les nombres.
Pour conclure la résolution il faut utiliser la définition de la fraction quotient.

EXEMPLES :

1. Résolvons l'équation :

$$7x+3=4x+8$$

On souhaite rassembler les termes en x à gauche et les nombres à droite.

$$7x+3-4x=4x+8-4x$$

On enlève donc $4x$ à chaque membre (ce qui revient à ajouter $-4x$).

$$3x+3=8$$

$$3x+3-3=8-3$$

On enlève 3 à chaque membre (on ajoute -3).

$$3x=5$$

On utilise la définition du quotient.

$$x=\frac{5}{3}$$

Remarquons que $\frac{5}{3}\approx 1,67$.
Nous avions approché cette solution dans la première partie sans atteindre la valeur exacte.
La résolution de l'équation par cette méthode est donc bien plus efficace que la recherche en utilisant un tableau de valeurs.

Une nouvelle fois, cette résolution prouve l'unicité de la solution : $\frac{5}{3}$ est la seule solution de l'équation !

2. Résolvons l'équation :

$$5x+3=9+6x$$

$$5x+3-6x=9+6x-6x$$

$$-x+3=9$$

$$-x+3-3=9-3$$

On enlève $6x$ dans chaque membre.

$$-x=6$$

$$x=-6$$

On enlève 3 dans chaque membre.

L'opposé de x vaut -6 donc $x = -6$

3. Résolvons l'équation :

$$8x - 9 = 1 - 7x$$

$$8x - 9 + 7x = 1 - 7x + 7x$$

On ajoute $7x$ à chaque membre.
Cela revient à enlever $-7x$ car soustraire c'est ajouter l'opposé !

$$15x - 9 = 1$$

$$15x - 9 + 9 = 1 + 9$$

On ajoute 9 à chaque membre.
Cela revient à enlever -9.

$$15x = 10$$

$$x = \frac{10}{15}$$

On utilise la définition du quotient.

$$x = \frac{2}{3}$$

III — Résolution des problèmes du premier degré

On utilise souvent les équations pour résoudre des problèmes.

MÉTHODE 9 . 3 : Résoudre un problème avec une équation
Voici les étapes nécessaires à la résolution d'un problème avec une équation :

- **Choix de l'inconnue** : en analysant le problème on détermine la grandeur inconnue modélisée par une lettre (souvent x). Il faut préciser clairement à quoi correspond cette lettre en indiquant aussi l'unité de la grandeur ;
- **Mise en équation** : c'est la partie la plus difficile ! Elle consiste à modéliser les données de l'exercice sous formes d'expressions littérales qui dépendent de l'inconnue choisie. Il faut ensuite construire une équation qui correspond à la question posée ;
- **Résolution de l'équation** : il s'agit de résoudre une équation du premier degré avec la méthode habituelle sans se soucier du problème de départ ;
- **Vérification** : il faut vérifier si la solution trouvée correspond bien à la grandeur recherchée. Il faut vérifier qu'elle est bien compatible avec le problème : est-ce un nombre entier ? Un nombre positif ? Un nombre décimal ? ...

EXEMPLES :
Problème n° 1 : Pour un étudiant, la prix d'une place de concert coûte 30 €. Le prix normal est 45 €.
Le soir du concert il a été vendu 80 places. Le montant total de la recette est 3 225 €.

Combien d'étudiant ont assisté à cette séance?

Première méthode de modélisation :
Choix de l'inconnue : Posons x le nombre d'étudiants ayant assisté au concert.

Mise en équation : Il y a 80 personnes qui assistent au concert dont x étudiants.
Cela signifie qu'il y a $80 - x$ personnes qui ont payé le tarif normal.
Les x étudiants ont payé chacun 30 € donc ensemble ils ont payé $30x$ €.
Les $80 - x$ autres personnes ont payé chacun 45 € donc ensemble ils ont payé $45(80 - x)$ €.
Le montant de la recette est 3 225 € ainsi nous obtenons l'équation suivante :

$$30x + 45(80 - x) = 3\,225$$

Résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}
30x + 45(80 - x) &= 3\,225 \\
30x + 45 \times 80 - 45x &= 3\,225 \\
30x + 3\,600 - 45x &= 3\,225 \\
3\,600 - 15x &= 3\,225 \\
3\,600 - 15x + 15x &= 3\,225 + 15x \\
3\,600 &= 3\,225 + 15x \\
3\,600 - 3\,225 &= 3\,225 + 15x - 3\,225 \\
375 &= 15x \\
15x &= 375 \\
x &= \frac{375}{15} \\
x &= 25
\end{aligned}$$

Vérification : Il y a 25 tarifs étudiant donc $80 - 25 = 55$ personnes au tarif normal.
25×30 € $= 750$ €.
55×45 € $= 2\,475$ €.
Et 750 € +2 475 € = 3 225 €.
La solution trouvée convient donc bien au problème.

$\boxed{\text{Il y a 25 étudiants à ce concert.}}$

Seconde méthode de modélisation :
Choix de l'inconnue : Posons cette fois ci y le nombre de tarifs normaux pour ce concert.

Mise en équation : Il y a 80 personnes qui assistent au concert dont y tarifs normaux.
Cela signifie qu'il y a $80 - y$ étudiants qui ont payé le tarif réduit.
Les $80 - y$ étudiants ont payé chacun 30 € donc ensemble ils ont payé $30(80 - y)$ €.
Les y autres personnes ont payé chacun 45 € donc ensemble ils ont payé $45y$ €.
Le montant de la recette est 3 225 € ainsi nous obtenons l'équation suivante :

$$30(80 - y) + 45y = 3\,225$$

Résolution de l'équation :

$$
\begin{aligned}
30(80-y)+45y &= 3\,225\\
30\times 80-30y+45y &= 3\,225\\
2\,400+15y &= 3\,225\\
2\,400+15y{\color{red}-2\,400} &= 3\,225{\color{red}-2\,400}\\
15y &= 825\\
y &= \frac{825}{15}\\
y &= 55
\end{aligned}
$$

Vérification : Il y a 55 tarifs normaux donc $80-55=25$ personnes au tarif étudiant.
25×30 € $= 750$ €.
55×45 € $= 2\,475$ €.
Et 750 € $+2\,475$ € $= 3\,225$ €.
La solution trouvée convient donc bien au problème.

$\boxed{\text{Il y a 25 étudiants à ce concert.}}$

Les deux modélisations permettent d'obtenir deux équations différentes, mais elles aboutissent à la même réponse !

UN PROBLÈME SANS SOLUTION OU PRESQUE... :
J'ai trois enfants : Jules 11 ans, Marie 17 ans et Pierre 21 ans.
Sachant que je viens d'avoir 45 ans, dans combien d'années mon âge sera-t-il égal à la somme des âges de mes enfants ?

Choix de l'inconnue : Posons n le nombre d'années cherché.

Mise en équation : Dans n année Jules aura $11+n$ ans, Marie aura $17+n$ ans, Pierre aura $21+n$ ans et j'aurai $45+n$ ans.
La somme des âges de mes enfants sera donc $11+n+17+n+21+n$.
Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$11+n+17+n+21+n = 45+n$$

Résolution de l'équation :

$$
\begin{aligned}
11+n+17+n+21+n &= 45+n\\
49+3n &= 45+n\\
49+3n{\color{red}-49} &= 45+n{\color{red}-49}\\
3n &= n-4\\
3n{\color{red}-n} &= n-4{\color{red}-n}\\
2n &= -4\\
n &= -\frac{4}{2}\\
n &= -2
\end{aligned}
$$

Vérification : On obtient un nombre négatif! L'événement décrit dans l'énoncé du problème n'arrivera donc pas dans le futur.
Cela signifie en fait que cet événement a eu lieu dans le passé, il y a exactement 2 ans.
En effet, il y a deux ans j'avais 43 ans, Jules avait 9 ans, Marie 15 ans et Pierre 19 ans.
Comme $9+15+19=43$ on constate que la solution de l'équation a bien du sens, même si elle n'est pas la réponse à l'exercice!

IV — Annexes

EXERCICE N° 9.1 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

Affirmation n° 1 : -3 est une solution de l'équation : $3x+1=2x-1$

Affirmation n° 2 : -1 est une solution de l'équation : $5x-7=3x-9$

Affirmation n° 3 : 2 est une solution de l'équation : $5(3x+1)=3(2x-1)$

Affirmation n° 4 : $\frac{5}{3}$ est une solution de l'équation : $6x-7=3x-2$

Affirmation n° 5 : $\frac{3}{4}$ est une solution de l'équation : $5x-8=2x-4$

Affirmation n° 6 : -3 est une solution de l'équation : $3x^2-21=2x^2+4x$

EXERCICE N° 9.2 : Résoudre des équations du premier degré

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$(1) \quad 5x+3=3x+9$$

$$(2) \quad 3x-2=x+11$$

$$(3) \quad 7x-8=10x-7$$

$$(4) \quad 7-2x=9-5x$$

$$(5) \quad -3x-9=-1+7x$$

$$(6) \quad 10x-1=1-3x$$

$$(7) \quad 9x-5=8-7x$$

$$(8) \quad 4+8x=1-4x$$

EXERCICE N° 9.3 : **Problème et équation**

Deux élèves ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leurs calculatrices.
Juliette multiplie le nombre par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Clément multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils constatent que leurs calculatrices affichent les mêmes nombres.

1. En notant x le nombre de départ, exprimer à l'aide de x les calculs effectués par Juliette.
2. Exprimer en utilisant la lettre x les calculs effectués par Clément.
3. En résolvant une équation qui utilise les expressions des questions **1.** et **2.**, trouver quel était le nombre affiché au départ sur les deux calculatrices.
4. Vérifier le résultat obtenu en reprenant les étapes de l'énoncé.

EXERCICE N° 9.4 : **Problème et équation — Épisode 2**

Deux élèves ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leurs calculatrices.
Alice multiplie le nombre par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Adrien multiplie le nombre par 2 puis ajoute 10.
Quand ils ont terminé, ils constatent que leurs calculatrices affichent les mêmes nombres.

Quel était le nombre affiché au départ ?

EXERCICE N° 9.5 : **Problème et équation — Épisode 3**

Je pense à un nombre. Son double augmenté de 16 est égal à son triple diminué de 21.

Quel est ce nombre ?

EXERCICE N° 9.6 : **Problème et équation — Épisode 4**

Trois personnes se partagent un héritage de 1 900 € .
La seconde personne reçoit 70 € de plus que la première.
La troisième personne reçoit le double de la part de la première moins 150 €.

Calculer la part de chaque personne.

EXERCICE N° 9.7 : **Problème et équation — Épisode 5**

a. Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 129.

b. Trouver cinq nombres entiers consécutifs dont la somme est 455.

c. Trouver trois nombres entiers pairs consécutifs dont la somme est 144.

d. Trouver trois nombre entiers impairs consécutifs dont la somme est 633.

Deux nombres entiers sont consécutifs « s'ils se suivent » comme 10 *et* 11 *ou* 101 *et* 102.

EXERCICE N° 9.8 : **Trop difficile !!**

Un père à 42 ans. Il a trois enfants qui ont respectivement 4 ans, 9 ans et 11 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera exactement égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

EXERCICE N° 9.1 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation CORRECTION

Les affirmations suivantes sont-elles vraies?

Affirmation n° 1 : -3 est une solution de l'équation : $3x+1=2x-1$

Pour $x=-3$,
$3x+1=3\times(-3)+1=-9+1=-8$
$2x-1=2\times(-3)-1=-6-1=-7$

$\boxed{-3 \text{ n'est pas une solution de l'équation}}$

Affirmation n° 2 : -1 est une solution de l'équation : $5x-7=3x-9$

Pour $x=-1$,
$5x-7=5\times(-1)-7=-5-7=-12$
$3x-9=3\times(-1)-9=-3-9=-12$

$\boxed{-1 \text{ est une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 3 : 2 est une solution de l'équation : $5(3x+1)=3(2x-1)$

Pour $x=2$,
$5(3x+1)=5(3\times2+1)=5(6+1)=5\times7=35$
$3(2x-1)=3(2\times2-1)=3(4-1)=3\times3=9$

$\boxed{2 \text{ n'est pas une solution de l'équation}}$

Affirmation n° 4 : $\frac{5}{3}$ est une solution de l'équation : $6x-7=3x-2$

Pour $x=\frac{5}{3}$,

$6x-7=6\times\frac{5}{3}-7=\frac{30}{3}-7=10-7=3$

$3x-2=3\times\frac{5}{3}-2=5-2=3$

$\boxed{\frac{5}{3} \text{ est une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 5 : $\frac{3}{4}$ est une solution de l'équation : $5x-8=2x-4$

Pour $x=\frac{3}{4}$,

$5x-8=5\times\frac{3}{4}-8=\frac{15}{4}-\frac{32}{4}=-\frac{17}{4}$

$2x-4=2\times\frac{3}{4}-4=\frac{6}{4}-\frac{24}{4}=-\frac{18}{4}$

$\boxed{\frac{3}{4} \text{ n'est pas une solution de l'équation.}}$

Affirmation n° 6 : -3 est une solution de l'équation : $\quad 3x^2-21=2x^2+4x$

Pour $x=-3$,
$3x^2-21=3\times3\times(-3)^2-21=3\times9-21=27-21=6$
$2x^2+4x=2\times(-3)^2+4\times(-3)=2\times9-12=18-12=6$

$\boxed{-3 \text{ est une solution de l'équation.}}$

Exercice n° 9.2 : Résoudre des équations du premier degré — Correction

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x+3&=3x+9\\
5x+3-3x&=3x+9-3x\\
2x+3&=9\\
2x+3-3&=9-3\\
2x&=6\\
x&=\frac{6}{2}\\
x&=3
\end{aligned}$$

$\boxed{3 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
3x-2&=x+11\\
3x-2-x&=x+11-x\\
2x-2&=11\\
2x-2+2&=11+2\\
2x&=13\\
x&=\frac{13}{2}\\
x&=6,5
\end{aligned}$$

$\boxed{6,5 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
7x-8&=10x-7\\
7x-8-10x&=10x-7-10x\\
-3x-8&=-7\\
-3x-8+8&=-7+8\\
-3x&=1\\
x&=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{-\frac{1}{3} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
7-2x&=9-5x\\
7-2x+5x&=9-5x+5x\\
7+3x&=9\\
7+3x-7&=9-7\\
3x&=2\\
x&=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\frac{2}{3} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
-3x-9&=-1+7x\\
-3x-9-7x&=-1+7x-7x\\
-10x-9&=-1\\
-10x-9+9&=-1+9\\
-10x&=8\\
x&=-\frac{8}{10}\\
x&=-0,8
\end{aligned}$$

$\boxed{-0,8 \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
10x-1&=1-3x\\
10x-1+3x&=1-3x+3x\\
13x-1&=1\\
13x-1+1&=1+1\\
13x&=2\\
x&=\frac{2}{13}
\end{aligned}$$

$\boxed{\dfrac{2}{13} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$\boxed{\dfrac{13}{16} \text{ est la solution de l'équation.}}$

$$\begin{aligned}
9x-5&=8-7x\\
9x-5{\color{red}+7x}&=8-7x{\color{red}+7x}\\
16x-5&=8\\
16x-5{\color{red}+5}&=8{\color{red}+5}\\
16x&=13\\
x&=\frac{13}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4+8x&=1-4x\\
4+8x{\color{red}+4x}&=1-4x{\color{red}+4x}\\
4+12x&=1\\
4+12x{\color{red}-4}&=1{\color{red}-4}\\
12x&=-3\\
x&=-\frac{3}{12}\\
x&=-0,25
\end{aligned}$$

Notes

[1]Raisonnons par l'absurde sur un exemple générique. Si le quotient $20 \div 0$ avait un sens alors $0 \times (20 \div 0) = 20$. Or comme pour tout nombre x on a $0 \times x = 0$, l'égalité $0 \times x = a$ n'est vérifiée que pour $a = 0$. Ce qui signifie en toute rigueur que seul le quotient de 0 par 0 aurait un sens. Cependant par l'absurde on aurait $0 \times (0 \div 0) = 0$ mais ce quotient peut dans ce cas prendre la valeur réelle de notre choix... Ce qui rend absurde son existence!

[2]De plus $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{3}{1} = 3$: il n'y a donc pas unicité de la fraction $\frac{a}{b}$ telle que $b \times \frac{a}{b} = a$

[3]Certains nombres ne sont pas rationnels comme pa $\sqrt{2}$, π, $cos(10°)$...

[4]Je me restreins au cas des fractions, c'est-à-dire avec un numérateur et dénominateur entier. Avec des quotients et a, b et k des réels quelconques non nul cette propriété reste bien sûr vraie!

[5]L'identification précédente entre $\frac{5}{3}$ et $\frac{45}{27}$ repose sur l'intégrité de l'anneau des nombres rationnels.

En effet comme $27 \times \frac{5}{3} = 45$ et $27 \times \frac{45}{27} = 45$ on peut écrire $27 \times \frac{5}{3} - 27 \times \frac{45}{27} = 0$

Ainsi $27\left(\frac{5}{3} - \frac{45}{27}\right) = 0$ ce qui pour des raisons d'intégrité oblige $\frac{5}{3} = \frac{45}{27}$.

On utilise l'intégrité de l'anneau des rationnels dans la plupart des démonstrations de ce chapitre.
Il paraît bien difficile de parler de cela à des collégiens!