Les puissances de 10

Définition

a un nombre quelconque, n un entier supérieur ou égal à 2.

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^3 \neq 2 \times 3$ en effet $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$1^{2020} = 1$

$(-1)^{2019} = -1$ car 2019 est impair. $(-1)^{2020} = 1$ car 2020 est pair.

$0^{100} = 0$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

Les puissances de 10

n un entier supérieur ou égal à 2.

$$10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{\text{n zéros}}$$

Exemples :

$10^2 = 100$ $\quad 10^3 = 1000$ $\quad 10^6 = 1000000$ $\quad 10^9 = 1000000000$

Propriétés et extension de la définition

$10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Pour n un entiers supérieur ou égal à 1,

$$10^{-n} \text{ est l'inverse de } 10^n \,;\; 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Pour n et p deux entiers relatifs,

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ $\quad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ $\quad (10^n)^p = 10^{n \times p}$

Préfixe et puissances de 10 :

n	nano	10^{-9}=0,000 000 001	un milliardième
µ	micro	10^{-6}=0,000 001	un millionième
m	milli	10^{-3}=0,001	un millième
c	centi	10^{-2}=0,01	un centième
d	déci	10^{-1}=0,1	un dixième
		10^0=1	
da	déca	10^1=10	une dizaine
h	hecto	10^2=100	une centaine
k	kilo	10^3=1 000	un millier
M	méga	10^6=1 000 000	un million
G	giga	10^9=1 000 000 000	un milliard

Inverses

L'écriture scientifique

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme : $\pm a \times 10^n$

Où a est un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$ et n un entier relatif.
a est la **mantisse** du nombre et le nombre de chiffre après la virgule indique la **précision** .

Exemples :

$2020 = 2,02 \times 10^3$

$0,0078 = 7,8 \times 10^-3$

$1234567890 = 1,23456789 \times 10^9$

$-5 = -5 \times 10^0$

$-0,00000123 = -1,23 \times 10^{-6}$

$15900 \times 10^5 = 1,59 \times 10^9$

Problème :

Notes

[1]On souhaite que le produit de deux nombres relatifs ait les mêmes propriétés que le produit habituel sur les nombres décimaux positifs. En particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Une démonstration dans le cas général est hors de portée du collège.

a et b deux nombres relatifs.

$a \times \left(b + opp(b)\right) = a \times 0 = 0$ en distribuant $a \times b + a \times opp(b) = 0$

Ainsi $a \times b$ est l'opposé de $a \times opp(b)$, ces deux nombres sont donc de signe contraire et $opp(ab) = a \times opp(b)$

En échangeant le rôle de a et b et en invoquant la commutativité de la multiplication on arrive ainsi à :

$opp(a \times b) = a \times opp(b) = b \times opp(a)$.

Développons $\left(a + opp(a)\right)\left(b + opp(b)\right) = 0$

$a \times b + a \times opp(b) + b \times opp(a) + opp(a) \times opp(b) = 0$

Comme $a \times opp(b) = b \times opp(a) = opp(a \times b)$

$a \times b + opp(a \times b) + opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$

$opp(a \times b) + opp(a) \times opp(b) = 0$ ce qui signifie que $opp(a) \times opp(b)$ est l'opposé de $opp(a \times b)$

C'est à dire $opp(a) \times opp(b) = a \times b$.

Par disjonction de cas sur les signes respectifs de a et b on obtient la propriété précédente.

[2]On se gardera bien à l'oral de dire que « − par + égal − »pour éviter les confusions avec l'addition, on préférera « le produit d'un négatif par un positif est négatif. »