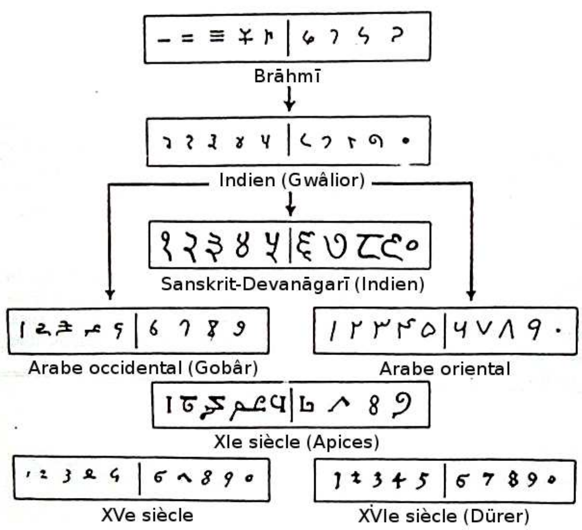
Chapitre III

Des nombres pour mesurer : les nombres décimaux

L'IDÉE DE QUANTITÉ et sa codification visuelle sont vraisemblablement antérieures à l'apparition de l'écriture. Plusieurs procédés de comptage sont progressivement développés pour décrire la taille d'un troupeau et contrôler son évolution, suivre un calendrier ou mesurer des récoltes.
Le mot calcul vient du latin calculus (« caillou »). Il est dit que les bergers comptabilisaient leurs moutons avec des cailloux dans un pot à l'entrée et à la sortie de la bergerie. Ces objets pouvaient aussi être façonnés en argile sous la forme de demi-sphère, de sphères, de conoïdes et pouvaient figurer des animaux domestiques. [1]

Au IVᵉmillénaire avant notre ère, les civilisations mésopotamiennes utilisent ainsi des boules creuses d'argile contenant des jetons, puis des tablettes d'argile munies de marques. Il faut attendre la fusion de ces systèmes, à la fin du IIIᵉmillénaire avant notre ère, pour voir se former véritablement le concept du nombre abstrait, indépendant de ses réalisations concrètes. [3]

L'usage de nombres fractionnaires est déjà présent dans les fractions sexagésimales de la numération babylonienne et avec les quantièmes égyptiens il y a plus de 3 000 ans. Le système décimal est aussi développé dans plusieurs civilisations pour la numération des entiers, mais il n'apparait que très ponctuellement dans les fractions.
[4]



La graphie des chiffres arabes pourrait s'inspirer d'une numération décimale non positionnelle indienne datant du IIIᵉsiècle av. J.-C., la numération Brahmi. Les chiffres arabes ont gagné l'Europe au Xe siècle par la péninsule ibérique, alors sous domination omeyyade. Puis leur diffusion dans le reste de l'Occident s'est poursuivie par divers modes.

Certains attribuent un rôle majeur de diffusion des chiffres arabes au mathématicien italien Leonardo Fibonacci (1175 — 1250), qui avait étudié auprès de professeurs musulmans à Béjaïa (dans l'actuelle Algérie), ramena à Pise en 1198 une partie de leur savoir et publia, en 1202, le Liber Abaci (Le livre du calcul), un traité sur les calculs et la comptabilité fondée sur le calcul décimal.

Comme beaucoup de solutions qui nous paraissent simples,
la diffusion des chiffres arabes s'est heurtée aux habitudes traditionnelles, et leur apprentissage a été progressif. À Florence (Italie), il fut d'abord interdit aux marchands de les employer dans les contrats et les documents officiels

en particulier de l'astronomie et de la balistique, la nécessité d'un système de calcul puissant et rapide s'impose : les chiffres indo-arabes écartent définitivement leurs prédécesseurs romains.
Leur tracé définitif, normalisé, est attesté dès le XVe siècle. [2]

Plan du cours :

I — L'écriture positionnelle des nombres entiers

II — La demi-droite graduée

III — Somme, différence et produit

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) :

- nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé ;
- somme, différence, produit et quotient de nombres décimaux.

Compétences :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (repérage sur la droite graduée) ;
- calculer avec des nombres relatifs ;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

I — Les fractions qui partagent

II — Les fractions décimales

III — Les nombres décimaux

IV — Somme, différence et produit des nombres décimaux

Nous allons prolonger l'addition, la différence et le produit des nombres entiers aux nombres décimaux. Nous proposerons les démonstrations sous forme d'exemples génériques.

1 La somme et la différence

On souhaite calculer $3,14+1,789$

$3,14=\dfrac{314}{100}=\dfrac{3\,140}{1\,000}$ et $1,789=\dfrac{1\,789}{1\,000}$

$3,14+1,789=\dfrac{3\,140}{1\,000}+\dfrac{1\,789}{1\,000}=\dfrac{3\,140+1\,789}{1\,000}=\dfrac{4\,929}{1\,000}$

Ainsi $3,14+1,789=4,929$

MÉTHODE 3 . 1 : Additionner des nombres décimaux
Pour additionner des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour additionner les nombres entiers :

- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;
- on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;
- on effectue la somme comme pour des entiers ;
- dans la somme, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r@{,}lll} & {}^{1} & & \\ & 3 & 1\ 4\ \color{red}{0} \\ + & 1 & 7\ 8\ 9 \\ \hline & 4 & 9\ 2\ 9 \end{array}$$

On souhaite calculer $3,14-1,789$

$3,14-1,789=\dfrac{3\,140}{1\,000}-\dfrac{1\,789}{1\,000}=\dfrac{3\,140-1\,789}{1\,000}=\dfrac{1\,351}{1\,000}$

Ainsi $3,14 - 1,789 = 1,351$

MÉTHODE 3 . 2 : Soustraire des nombres décimaux
Pour soustraire des nombres décimaux, on utilise le même algorithme que pour soustraire les nombres entiers :
- on place le nombre le plus grand au dessus du nombre le plus petit ;
- on aligne les nombres suivant la signification de chaque chiffre, les virgules sont alignées ;
- on fait apparaître des zéros dans l'écriture décimale pour que les deux nombres aient des parties décimales ayant le même nombre de chiffres ;
- on effectue la différence comme pour des entiers ;
- dans la différence, la virgule est placée dans l'alignement des deux autres.

$$\begin{array}{r} 3{,}1\ 4\ \color{red}{0} \\ -\ 1{,}7\ 8\ 9 \\ \hline 1{,}3\ 5\ 1 \end{array}$$

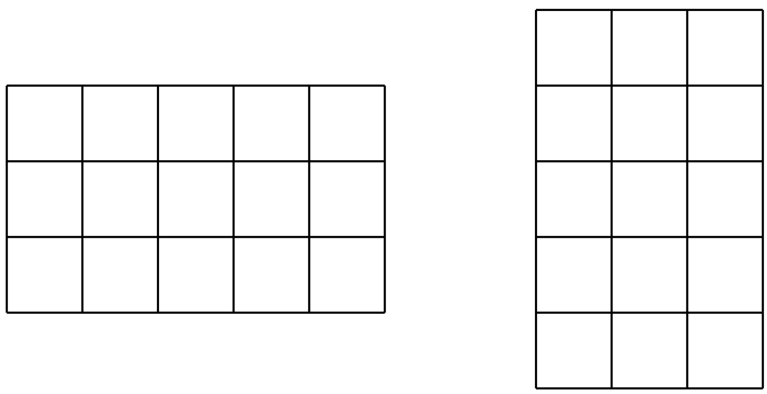
---

2 Le produit des nombres décimaux

Le produit de deux nombres entiers

La multiplication entière est une répétition d'additions.

Souvenons-nous que $3 \times 5 = \underbrace{5+5+5}_{3\ fois}$ et que $5 \times 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{5\ fois}$.
Signalons également que $3 \times 5 = 5 \times 3$.[1]
Pour illustrer cette propriété on peut raisonner de manière géométrique :



Dans les deux cas le nombre de carrés à l'intérieur de ces rectangles identiques est $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$

La produit d'un nombre entier par un nombre décimal

Calculons $5 \times 3,14$.
Ce produit peut s'interpréter comme $\underbrace{3,14+3,14+3,14+3,14+3,14}_{5 fois} = 15,70$

Calculons maintenant $3,14 \times 5$.
Attention, rien ne prouve que $3,14 \times 5$ revient à calculer $5 \times 3,14$! Comment effectuer une addition répétée « 3, 14 fois » ?

Notons $P = 3,14 \times 5$, $P = \dfrac{314}{100} \times 5$.

On peut multiplier P par 100 : $100 \times P = \underbrace{100 \times \frac{314}{100}}_{314} \times 5$

Donc $100 \times P = 314 \times 5 = 1\,570$

Nous en déduisons que $P = \frac{1\,570}{100} = 15,70$ puisque $100 \times \frac{1\,570}{100} = 1\,570$

Finalement $3,14 \times 5 = 5 \times 3,14 = 15,70$

Le produit de deux nombres décimaux

Calculons $5,2 \times 3,14$.
Cette fois-ci ce produit ne peut pas être interprété comme une addition répétée. On utilise la stratégie précédente.

Notons $P = 5,2 \times 3,14$ on a $P = \frac{52}{10} \times \frac{314}{100}$

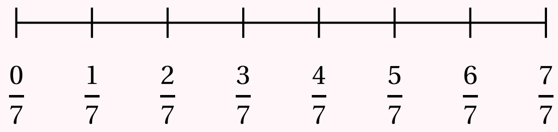
Comme $10 \times \frac{52}{10} = 52$ et que $100 \times \frac{314}{100} = 314$, on effectue les multiplications suivantes :

$10 \times P \times 100 = \underbrace{10 \times \frac{52}{10}}_{52} \times \underbrace{\frac{314}{100} \times 100}_{314}$

$10 \times P \times 100 = 52 \times 314$

Nombres décimaux

Fraction partage, vocabulaire



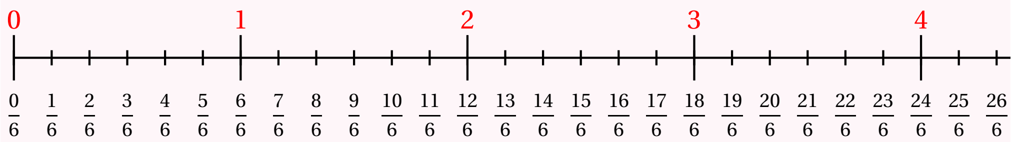
La **fraction** $\frac{3}{7}$ est constitué d'un **numérateur** : 3 et d'un **dénominateur** : 7.

Le dénominateur indique le nombre de part. Le numérateur indique le numéro de la graduation.

$\frac{3}{2}$ se dit trois demis. $\frac{5}{3}$ se dit cinq tiers. $\frac{7}{4}$ se dit sept quarts.

$\frac{11}{5}$ se dit onze cinquièmes. $\frac{3}{2\,020}$ se dit trois deux-mille-vingtièmes.

Fraction et droite graduée



Sur un droite graduée, une fraction peut représenter un nombre.

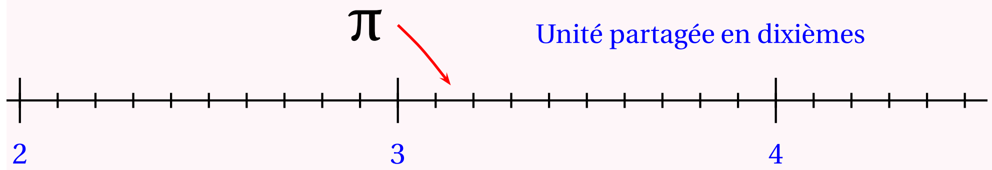
Une fraction peut se décomposer sous la forme de **la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieur à une unité** .

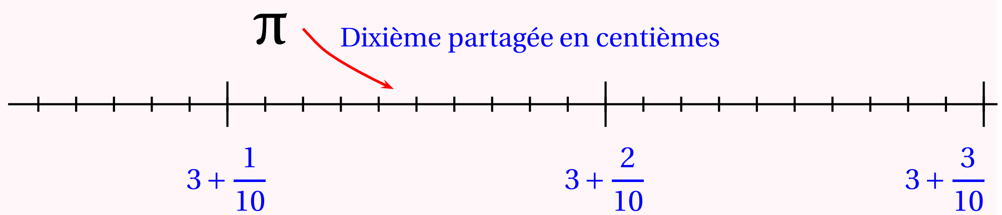
$\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ car 3 unités correspond à $\frac{18}{6}$. Ainsi $3 < \frac{23}{6} < 4$.

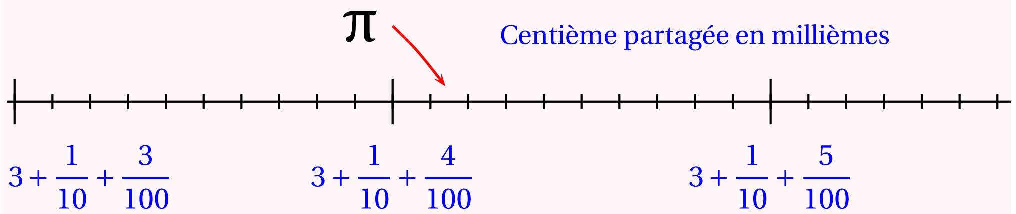
Les fractions décimales

Les **fractions décimales** sont les fractions dont le dénominateur est 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 ...

On parle de **dixième** , **centième** , **millième** , **dix-millième** , **cent-millième** ...







Il y a :

- 10 dixièmes dans une unité ;
- 10 centièmes dans un dixième ;
- 10 millième dans un centième.
- 100 centièmes dans une unité ;
- 100 millièmes dans un dixième ;
- 1000 millièmes dans une unité.

Le nombre $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000}$ peut s'écrire plus rapidement sous la forme 3, 142.

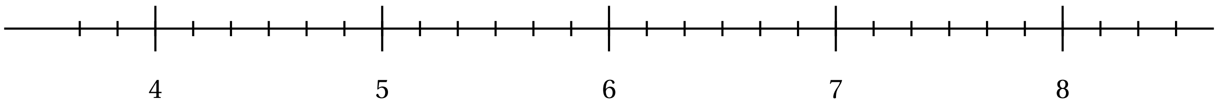
$$3,142 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000} = 3 + \frac{142}{1\,000} = \frac{3\,142}{1\,000}$$

On dit que 3 est **la partie entière** et $\frac{142}{1\,000}$ **la partie décimale** du nombre 3, 142.

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

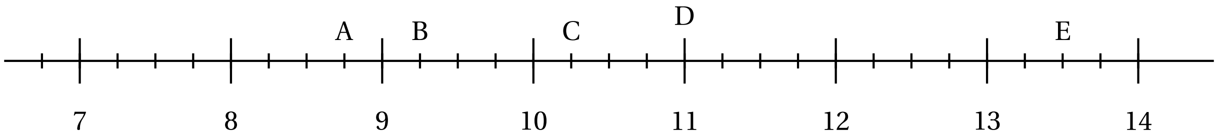
Exercice 1 : Placer sur cette droite les points suivants en observant leurs abscisses :



$A\left(4+\frac{5}{6}\right)$; $B\left(7+\frac{1}{6}\right)$; $C\left(\frac{30}{6}\right)$; $D\left(\frac{45}{6}\right)$; $E\left(7-\frac{9}{6}\right)$

Exercice 2 : Indiquer les abscisses des points suivants.

Répondre sous la forme d'une fraction puis de la somme d'un entier et d'une fraction. Par exemple $Z\left(\frac{45}{7}=6+\frac{3}{7}\right)$



Exercice 3 : Décomposer et compléter comme dans l'exemple. $\frac{45}{7}=6+\frac{3}{7}$ donc $6<\frac{45}{7}<7$

$\frac{23}{3}=$	donc $<\frac{23}{3}<$	$\frac{9}{11}=$	donc $<\frac{9}{11}<$
$\frac{45}{8}=$	donc $<\frac{45}{8}<$	$\frac{83}{9}=$	donc $<\frac{83}{9}<$
$\frac{65}{10}=$	donc $<\frac{65}{10}<$	$\frac{57}{8}=$	donc $<\frac{56}{8}<$

Exercice 4 : Classer dans l'ordre croissant :

3,1 ; 3,09 ; 3,14 ; 3,1415 ; 3,142 ; 3,2

Exercice 5 : Compléter le tableau suivant :

$3,142$	$3+\frac{142}{1\,000}$	$3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{2}{1\,000}$	$\frac{3\,142}{1\,000}$
45,34			
2 020,32			
3,142			
0,065			
	$65+\frac{134}{1\,000}$		
			$\frac{12\,345}{10\,000}$

Exercice 5 : Encadrer chacune des fractions entre deux nombres entiers consécutifs. Exemple : $8 < \frac{809}{100} < 9$

$< \frac{202}{10} <$ $\quad$ $< \frac{3\,458}{100} <$ $\quad$ $< \frac{234}{1\,000} <$

$< \frac{314}{100} <$ $\quad$ $< \frac{456}{10} <$ $\quad$ $< \frac{8\,900}{100} <$

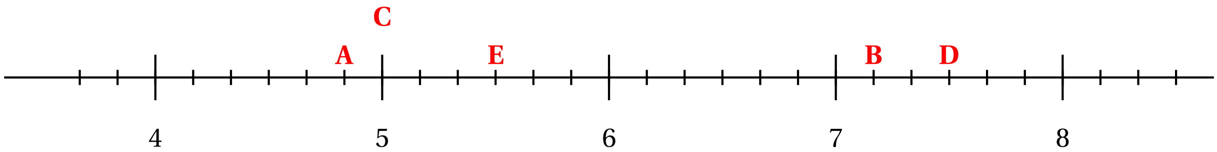
$< \frac{2\,020}{1\,000} <$ $\quad$ $< \frac{25\,202}{1\,000} <$ $\quad$ $< \frac{12\,345}{10\,000} <$

Exercice 6 : Poser ci-dessous les opérations suivantes :

$345{,}35+23{,}3$ ✧ $567{,}67+98{,}098$ ✧ $2\,020-987{,}87$ ✧ $789{,}76-567{,}098\,7$

Évaluation de mathématiques — Correction

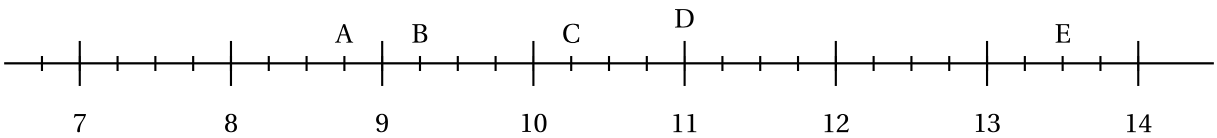
Exercice 1 : Placer sur cette droite les points suivants en observant leurs abscisses :



$$A\left(4+\frac{5}{6}\right) \quad ; \quad B\left(7+\frac{1}{6}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{30}{6}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{45}{6}\right) \quad ; \quad E\left(7-\frac{9}{6}\right)$$

Exercice 2 : Indiquer les abscisses des points suivants.

Répondre sous la forme d'une fraction puis de la somme d'un entier et d'une fraction. Par exemple $Z\left(\frac{45}{7}=6+\frac{3}{7}\right)$



$A\left(8+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}\right)$ $\qquad$ $B=\left(9+\frac{1}{4}=\frac{37}{4}\right)$ $\qquad$ $C=\left(10+\frac{1}{4}=\frac{41}{4}\right)$

$D=\left(11=\frac{44}{4}\right)$ $\qquad$ $E=\left(13+\frac{2}{4}=\frac{54}{4}\right)$

Exercice 3 : Décomposer et compléter comme dans l'exemple. $\frac{45}{7}=6+\frac{3}{7}$ donc $6<\frac{45}{7}<7$

$\frac{23}{3}=7+\frac{2}{3}$ donc $7<\frac{23}{3}<8$ car $3\times 7=21$

$\frac{45}{8}=5+\frac{5}{8}$ donc $5<\frac{45}{8}<6$ car $8\times 5=40$

$\frac{65}{10}=6+\frac{5}{10}$ donc $6<\frac{65}{10}<7$ car $6\times 10=60$

$\frac{9}{11}=0+\frac{9}{11}$ donc $0<\frac{9}{11}<1$ car $0\times 11=0$

$\frac{83}{9}=9+\frac{2}{9}$ donc $9<\frac{83}{9}<10$ car $9\times 9=81$

$\frac{57}{8}=7+\frac{1}{8}$ donc $7<\frac{56}{8}<8$ car $7\times 8=56$

Exercice 4 : Classer dans l'ordre croissant :

3,1 ; 3,09 ; 3,14 ; 3,1415 ; 3,142 ; 3,2

$3{,}09<3{,}1<3{,}14<3{,}1415<3{,}142<3{,}2$

On pouvait par exemple ajouter des zéros significatifs jusqu'au dix-millièmes :

$3{,}0900<3{,}1000<3{,}1400<3{,}1415<3{,}1420<3{,}2000$

Exercice 5 : Compléter le tableau suivant :

$3,142$	$3+\dfrac{142}{1\,000}$	$3+\dfrac{1}{10}+\dfrac{4}{100}+\dfrac{2}{1\,000}$	$\dfrac{3\,142}{1\,000}$
$45,34$	$45+\dfrac{34}{100}$	$45+\dfrac{3}{10}+\dfrac{4}{100}$	$\dfrac{4\,534}{100}$
$2\,020,32$	$2\,020+\dfrac{32}{100}$	$2\,020+\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{100}$	$\dfrac{202\,032}{100}$
$3,142$	$3+\dfrac{142}{1\,000}$	$3+\dfrac{1}{10}+\dfrac{4}{100}+\dfrac{2}{1\,000}$	$\dfrac{3\,142}{1\,000}$
$0,065$	$\dfrac{65}{1\,000}$	$\dfrac{6}{100}+\dfrac{5}{1\,000}$	$\dfrac{65}{1\,000}$
$65,134$	$65+\dfrac{134}{1\,000}$	$65+\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{100}+\dfrac{4}{1\,000}$	$\dfrac{65\,134}{1\,000}$
$1,2345$	$1+\dfrac{2345}{10\,000}$	$1+\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{100}+\dfrac{4}{1\,000}+\dfrac{5}{10\,000}$	$\dfrac{12\,345}{10\,000}$

Exercice 5 : Encadrer chacune des fractions entre deux nombres entiers consécutifs. Exemple : $8<\dfrac{809}{100}<9$

$20<\dfrac{202}{10}<21$ $\qquad 34<\dfrac{3\,458}{100}<35$ $\qquad 0<\dfrac{234}{1\,000}<1$

$3<\dfrac{314}{100}<4$ $\qquad 45<\dfrac{456}{10}<46$ $\qquad 8<\dfrac{8\,900}{100}<9$

$2<\dfrac{2\,020}{1\,000}<3$ $\qquad 25<\dfrac{25\,202}{1\,000}<26$ $\qquad 1<\dfrac{12\,345}{10\,000}<2$

Exercice 6 : Poser ci-dessous les opérations suivantes :

$345,35+23,3$ ✧ $567,67+98,098$ ✧ $2\,020-987,87$ ✧ $789,76-567,098\,7$

$$\begin{array}{r} 345,35 \\ +\quad 23,3 \\ \hline 368,65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\quad 1\ \ \ } \\ 567,67 \\ +\quad 98,098 \\ \hline 665,768 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2020,00 \\ -\quad 987,87 \\ \hline 1032,13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 789,7600 \\ -\ 567,0987 \\ \hline 222,6613 \end{array}$$

NOM : PRÉNOM : CLASSE :

Évaluation de mathématiques

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant :

$3,14$	$3+\dfrac{14}{100}$	$3+\dfrac{1}{10}+\dfrac{4}{100}$	$\dfrac{314}{100}$
$1,768$			
			$\dfrac{6\,788}{1\,000}$
	$15+\dfrac{14}{1\,000}$		
		$67+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{1\,000}$	
$0,763\,2$			

Exercice 2 Calculer en posant les opérations suivantes :

$78,09+7,909$ $9,87-0,786$ $2,09\times 12,3$

Exercice 3
On sait que $2\,019\times 2\,018 = 4\,074\,342$.
En déduire :

$A = 20,19\times 201,8 =$

$B = 201,9\times 201,8 =$

$C = 2,019\times 20,18 =$

$D = 2\,019\times 2,018 =$

$E = 2,019\times 2,018 =$

$F = 0,201\,9\times 0,201\,8 =$

Exercice 4

1. Tracer un triangle KHT où KH = 11 cm, KT = 5 cm et HT = 9 cm

2. Colorier l'ensemble des points situés à moins de 3 cm du point K

3. Colorier l'ensemble des points situés à moins de 5 cm du point T et à plus de 9 cm du point H.

Exercice 5 : Tracer la figure suivante :

1. Tracer [GH] tel que GH = 4 cm
2. Tracer le cercle de diamètre [GH]
3. Tracer le cercle de centre G passant par H
4. Tracer le cercle de centre H et de rayon 3 cm

QUESTION DU JOUR N° 1 : Problème – Épisode 1

Nous sommes allés au cinéma en groupe :

- Mes deux grands-parents ont plus de 75 ans;
- mes deux parents ont entre 40 et 50 ans;
- mes trois cousins sont étudiants;
- mes deux soeurs sont en CM1 et mon frère en maternelle;
- mes trois amis et moi sommes en sixième.

Pour aller voir *La Reine des nuages – 2* en 3D voici les tarifs affichés à l'entrée :

- Plein tarif : 10,40 €;
- Étudiant ou moins de 26 ans : 6,90 €;
- Moins de 16 ans : 5,40 €;
- Tarif réduit (pour les personnes de plus de 65 ans) : 8 €;
- Supplément 3D : 1 €.

Juste avant de payer le caissier nous propose la carte Méga GGR à 110 € pour 15 places avec supplément 3D offert.

Quelle décision prendre?

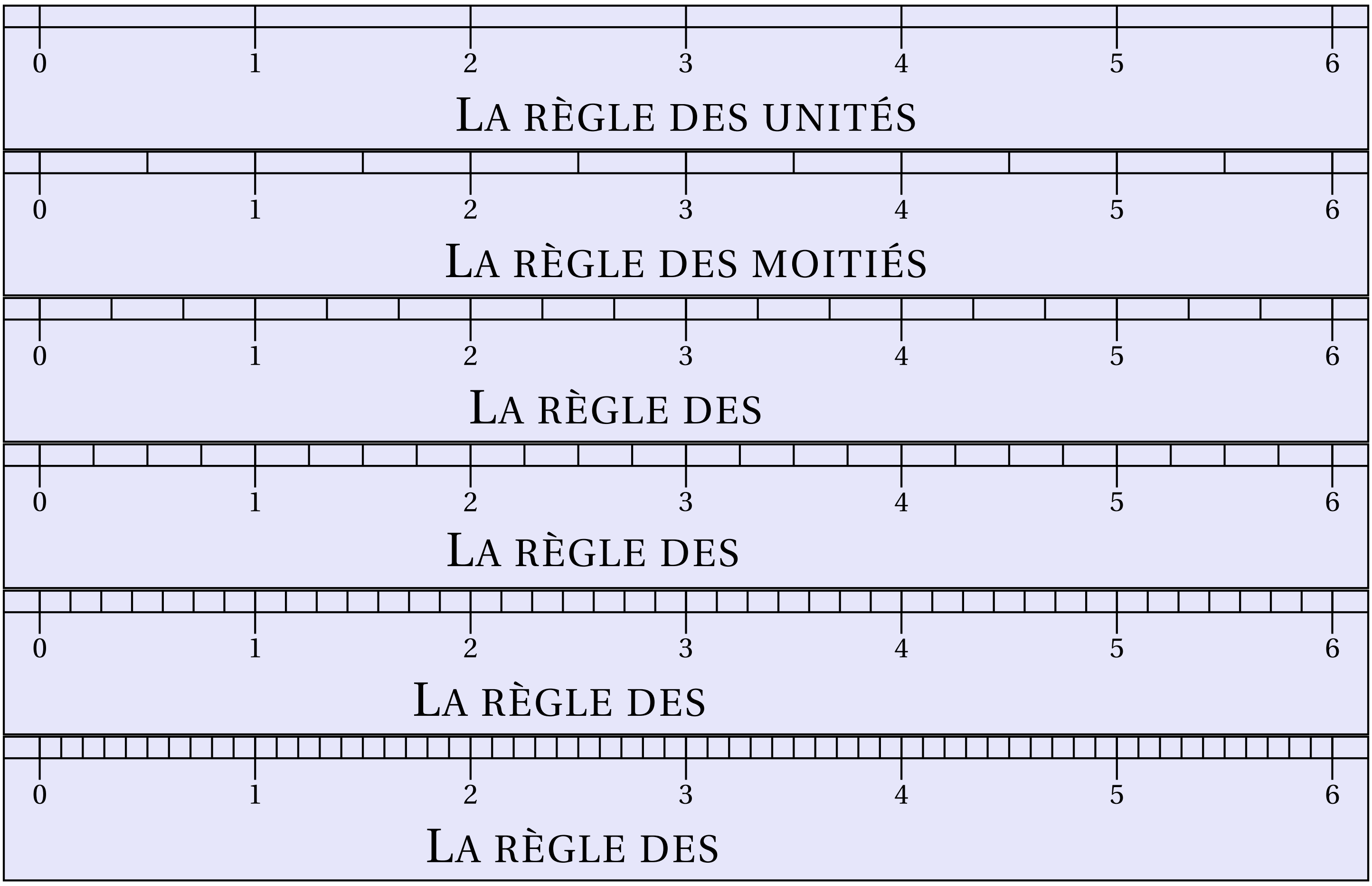
QUESTION DU JOUR N° 2 : Problème – Épisode 2

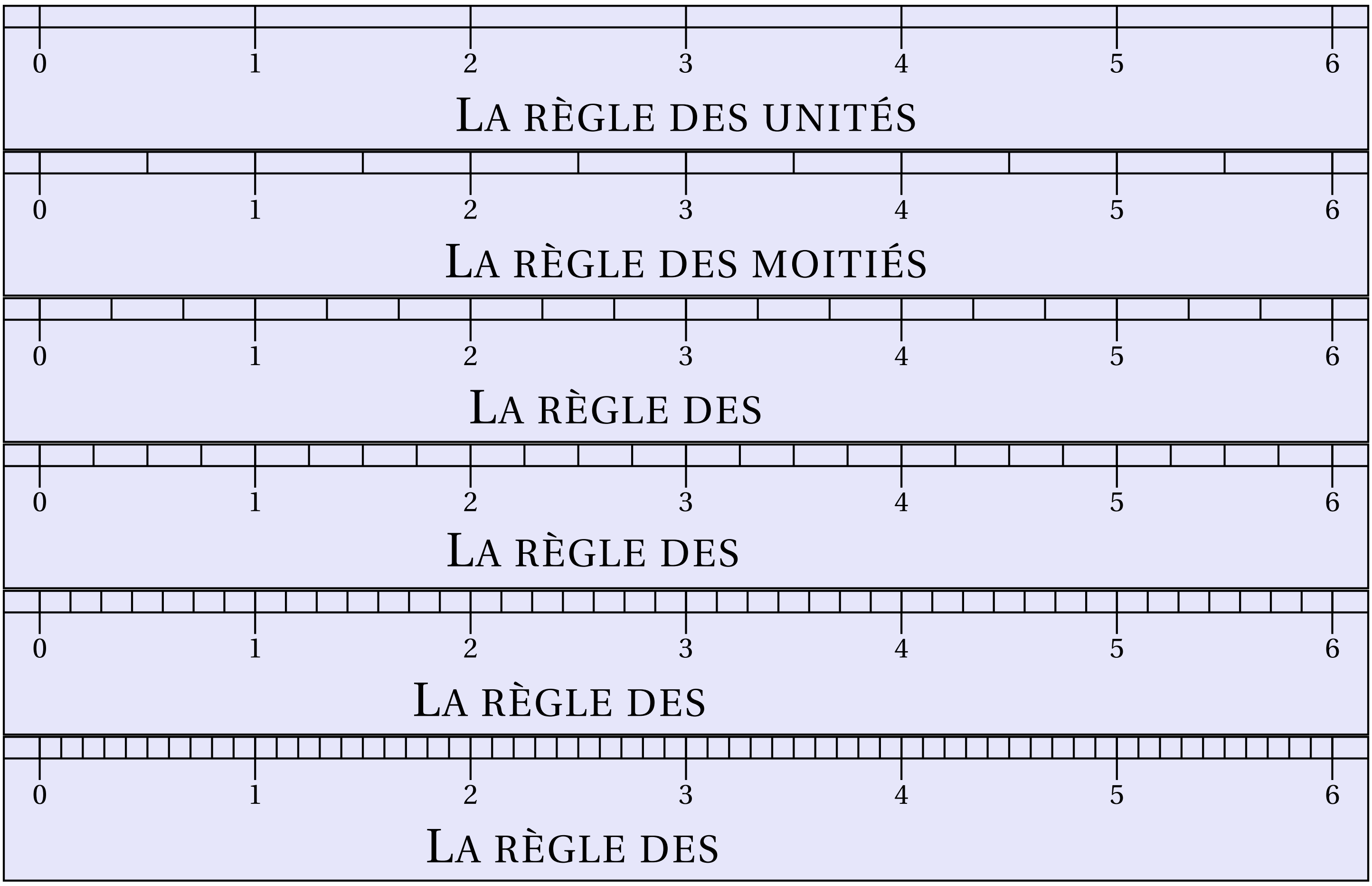
J'ai pris l'habitude de prendre deux bains par semaine. En 2020 j'ai décidé de faire davantage attention à ma consommation d'eau et je vais dorénavant ne prendre que des douches.
J'ai lu sur un le site de mon fournisseur d'eau qu'une douche de 5 min consomme environ 60 L d'eau et qu'un bain en utilise 180 L.
En regardant la facture d'eau de mes parents j'ai constaté que 1 m^3 = 1 000 L d'eau coûte 3,77 €.

Combien va-t-on économiser cette année si je réussis à me tenir à ma bonne résolution?

V — Annexe

1 Documents


0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES UNITÉS
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES MOITIÉS
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES


0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES UNITÉS
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES MOITIÉS
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES
0 1 2 3 4 5 6
LA RÈGLE DES

Rectangles à mesurer

En utilisant la règle indiquée, mesurer la longueur et la largeur de ce rectangle puis calculer son périmètre. *Exprimer la réponse en unité.*

Rectangle n° 1 — Règle des unités

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :

Rectangle n° 2 — Règle des moitiés

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :

Rectangle n° 3 — Règle des tiers

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :

Rectangle n° 4

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :

Rectangle n° 5

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :

Rectangle n° 6

Longueur : Largeur : *Diagonale :*

Périmètre :