

CHAPITRE VI



La division euclidienne

Plan du cours :

- I — L'écriture positionnelle des nombres entiers
- II — La demi-droite graduée
- III — Somme, différence et produit

Programme (BO n° 30 du 26-7-2018) :

- nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé;
- somme, différence, produit et quotient de nombres décimaux.

Compétences :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (repérage sur la droite graduée);
- calculer avec des nombres relatifs;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

§ SITUATION INITIALE : Recherche du jour de ma naissance

Première partie : RECHERCHE DU NUMÉRO DU JOUR DE VOTRE ANNIVERSAIRE

1. Le 1^{er} janvier 2022 était un samedi. Quel jour de la semaine sera le 8 janvier 2022, le 15 janvier 2022, le 22 janvier 2022? Calculer le quotient et le reste de la division de 8 par 7. Recommencer en divisant 15 par 7 et enfin 22 par 7.
2. Le 22 janvier 2022 est le 22^e jour de l'année. Nous sommes en vacances le vendredi 18 février 2022. Quel est le numéro de ce jour? Calculer le reste de la division de ce numéro par 7.
3. Les vacances d'été débuteront le mercredi 6 juillet 2022. Quel est le numéro de ce jour en 2022? Calculer le reste et le quotient de la division de ce numéro par 7.
4. Quel est le numéro du jour de la date de votre anniversaire en 2022?
Diviser ce nombre par 7 et déterminer le quotient et le reste.
Quel jour de la semaine votre anniversaire a-t-il lieu en 2022?
Quel date de la première semaine de janvier 2022 correspond au même jour de la semaine que votre anniversaire?

Deuxième partie : VOYAGE DANS LE TEMPS

1. Combien l'année 2019 comptait t-elle de jours? Et 2020? Et 2021?
2. Déterminer le quotient et le reste de la division entière de 365 par 7 puis le quotient et le reste de la division de 366 par 7. Que pouvez-vous en conclure?
3. Quel jour de la semaine était le 1^{er} janvier 2019? Le 1^{er} janvier 2018? Le 1^{er} janvier 2017?
4. Quel jour de la semaine sera le 1^{er} janvier 2023? Quel jour était le 1^{er} janvier 2016?
5. Quel sera le numéro du jour de la date de votre anniversaire en 2022?
Diviser ce nombre par 7 et déterminer le quotient et le reste.
Quel date de la première semaine de janvier 2022 correspondra au même jour de la semaine que votre anniversaire?
Quel jour de la semaine votre anniversaire aura-t-il lieu en 2022?
6. Quel jour de la semaine était le jour de votre anniversaire en 2021, en 2020, en 2019, en 2018 et 2017?

Troisième partie : QUELQUES DÉFIS POUR ALLER TROP LOIN ...

1. Quel jour de la semaine était le 1^{er} janvier de l'année de votre naissance?
Pouvez-vous retrouver le jour de la semaine de votre date de naissance?
2. Retrouver les quatre dernières fois où le 1^{er} janvier était un mercredi.
3. Quel jour de la semaine était le 14 juillet 1789? (Attention 1900 et 1800 étaient des années communes!)
4. Que s'est-il passé à Toulouse le 16 décembre 1582?
5. Calculer le numéro des 13 de chaque mois pour une année commune et une année bissextile.
Observer les reste dans la division de ces numéros par 7.
En déduire combien au maximum il peut y avoir de vendredi 13 dans une année.

🔗 INTENTIONS PÉDAGOGIQUES ET ÉLÉMENTS DE CORRECTION : Recherche du jour de ma naissance

Première partie : RECHERCHE DU NUMÉRO DU JOUR DE VOTRE ANNIVERSAIRE

1. Le 8 janvier 2020, le 15 janvier 2020 et le 22 janvier 2020 sont des mercredis. Comme le 8 janvier est un mercredi et que $8 + 7 = 15$, $15 + 7 = 22$, il s'écoule une semaine exactement entre chacun de ces jours.

De plus $8 = 7 \times 1 + 1$, $15 = 7 \times 2 + 1$ et $22 = 7 \times 3 + 1$: le reste est 1 dans chaque cas.

2. Il y a 31 jours en janvier. Le 1^{er} février est le 32^e. Donc le 7 février est le 38^e jour de l'année.

$38 = 7 \times 5 + 3$ or le 3 janvier était un vendredi. Le reste 3 correspond au vendredi en 2020.

3. Il y a 31 jours en janvier, 29 en février 2020 (2020 est bissextile), 31 en mars, 30 en avril, 31 en mai, 30 en juin.

$31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182$. Donc le samedi 4 juillet 2020 est le 186^e jour de l'année.

$186 = 7 \times 26 + 4$: 4 correspond au samedi.

4. Je suis né un 9 décembre. $31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 9 = 344$ le 344^e jour de l'année.

$344 = 7 \times 49 + 1$: c'est donc un mercredi comme le 1^{er} janvier.

Deuxième partie : VOYAGE DANS LE TEMPS

1. 2019 et 2021 sont des années communes de 365 j. 2020 est bissextile, 366 j

2. $365 = 52 \times 7 + 1$ et $366 = 52 \times 7 + 2$.

Après une année commune il y a un jour de décalage pour le 1^{er} janvier.

Après une année bissextile, il y a deux jours de décalage pour le 1^{er} janvier.

3. Le 1^{er} janvier 2019 était un mardi, le 1^{er} janvier 2018 était un lundi et le 1^{er} janvier 2017 était un dimanche.

4. 2021 suit une année bissextile. Le 1^{er} janvier 2021 sera donc un vendredi.

2016 était bissextile, il y a donc un décalage de deux jours avec 2017. Le 1^{er} janvier 2016 est donc un vendredi.

5. Je suis né le 9 décembre. En 2020, qui est bissextile, il s'agit du 344^e jour.

En 2021 qui est une année commune, il faut enlever le 29 février, il s'agira du 343^e jour.

$343 = 7 \times 49 + 0$.

Le 1^{er} janvier 2021 sera un vendredi, il correspond au reste 1. Le samedi 2 janvier, reste 2... Le mercredi 6 janvier pour le reste 6 et le jeudi 7 janvier pour le reste 0. Mon anniversaire en 2021 sera un jeudi.

6. Les années communes, le 9 décembre est le 343^e jour qui correspond au reste 0 soit le jour du 7 janvier de l'année.

En 2019 le 1^{er} janvier est un mardi, mon anniversaire est donc un lundi.

En 2018 le 1^{er} janvier est un lundi, mon anniversaire est donc un dimanche.

En 2017 le 1^{er} janvier est un dimanche, mon anniversaire est donc un samedi.

En 2016 qui est bissextile, mon anniversaire est le 344^e jour, un reste de 1. Le 1^{er} janvier en 2016 est un jeudi, donc mon anniversaire aussi.

Troisième partie : QUELQUES DÉFIS POUR ALLER TROP LOIN ...

1. Je suis né le 9 décembre 1965. 1965 n'est pas une année bissextile donc ma naissance est arrivée le 343^e jour. Il faut trouver quel jour était le 1^{er} janvier cette année là.

En partant du mercredi 1^{er} janvier 2020, il faut retirer un jour toutes les années communes et 2 jours par année bissextiles.

2016, 2012, 2008, 2004, 2000, 1996, 1992, 1988, 1984, 1980, 1976, 1972 et 1968 sont les 13 années bissextiles que j'ai connues.

Entre le 1^{er} janvier 1965 et le 1^{er} janvier 2020 se sont écoulés $2020 - 1965 = 55$ années dont 13 bissextiles.

Cela fait un décalage de $(55 - 13) + 13 \times 2 = 42 + 26 = 68$ jours. Or $68 = 7 \times 9 + 5$ soit 7 semaines et 5 jours.

Il faut donc retirer 5 jours au mercredi. On arrive au vendredi 1^{er} janvier 1965.

$343 = 7 \times 49 + 0$ donc cela correspond au jeudi 7 janvier 1965. Je suis né le jeudi 9 décembre 1965.

2. Il faut revenir en arrière d'un jour par année commune et deux par année bissextile.

2020 - Mercredi — 2019 - Mardi — 2018 - Lundi — 2017 - Dimanche — 2016 - Vendredi

2015 - Jeudi — **2014 - Mercredi** — 2013 - Mardi — 2012 - Dimanche — 2011 - Samedi

2010 - Vendredi — 2009 - Jeudi — 2008 - Mardi — 2007 - Lundi — 2006 - Dimanche

2005 - Samedi — 2004 - Jeudi — **2003 - Mercredi** — 2002 - Mardi — 2001 - Lundi

2000 - Dimanche — 1999 - Samedi — 1998 - Jeudi — **1997 - Mercredi** — 1996 - Lundi
 1995 - Dimanche — 1994 - Samedi — 1993 - Vendredi — **1992 - Mercredi**

Comme le 1^{er} janvier 1992 est à la fois bissextile et commence un mercredi, comme 2020, on peut en déduire que tous les 28 ans, le calendrier est le même.

Les calendriers de 2020, 2048, 1992 et 1964 sont par exemple les mêmes. Cela est faux à partir de 1900 à cause des caractéristiques du calendrier Grégorien.

3. Le 14 juillet : $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 14 = 195$ est le 195^e jour de l'année commune et le 196^e d'une année bissextile.
 $195 = 7 \times 27 + 6$ et $196 = 7 \times 27 + 0$

Le 14 juillet est donc le même jour que le 6 janvier des années communes et que le 7 janvier des années bissextiles.

Entre le 1^{er} janvier 2020 et le 1^{er} janvier 1789 il s'est écoulé $2020 - 1789 = 231$ années.

Entre 2000 et 2020 il y a eu 5 années bissextiles.

Entre 1900 et 1999 il y a eu 24 années bissextiles.

Entre 1800 et 1899 il y a eu 24 années bissextiles.

Entre 1789 et 1799, il y a eu 1792 et 1796 soit 2 années bissextiles.

Sur les 231 années, 55 étaient bissextiles. Il faut donc retirer $(231 - 55) + 55 \times 2 = 176 + 110 = 286$ jours.

$286 = 7 \times 40 + 6$ soit 40 semaines et 6 jours.

Le 1^{er} janvier 1789 était donc un jeudi. 1789 est une année commune et le 6 janvier 1789 était un mardi.

La prise de la Bastille a donc eu lieu le mardi 14 juillet 1789.

Dans le passage du calendrier Julien à Grégorien il a été décidé que la dernière année du siècle n'était pas bissextile, sauf quand elle est un multiple de 400.

2000 et 1600 étaient bissextiles. Pas 1900 et 1800!

4. Le 16 décembre 1582 n'existe pas en France dans le calendrier Julien ni dans le calendrier Gregorien.

Pour rattraper le décalage causé par le calendrier Julien, il a été décidé que le lendemain du jeudi 9 décembre 1582 serait le 20 décembre 1582.

5.

Date	Année commune		Année bissextile	
	Numéro du jour	Reste par 7	Numéro du jour	Reste par 7
13 janvier	13	6	13	6
13 février	44	2	44	2
13 mars	72	2	73	3
13 avril	103	5	104	6
13 mai	133	0	134	1
13 juin	164	3	165	4
13 juillet	194	5	195	6
13 août	225	1	226	2
13 septembre	256	4	257	3
13 octobre	286	6	287	0
13 novembre	317	2	318	3
13 décembre	347	4	348	5

En observant les restes on constate que pour les années communes 0 apparaît une fois, 1 une fois, 2 trois fois, 3 une fois, 4 deux fois, 5 deux fois et 6 deux fois. Il y a donc au minimum un vendredi 13 les années communes et au maximum trois. Cela arrive trois fois les années communes dont le vendredi a pour reste 2 : donc les années dont le premier jour est un jeudi : comme 2021!

Pour les années bissextiles, on peut avoir trois vendredi 13 les années où le 6 janvier est un vendredi, c'est à dire les années qui commencent un samedi. 2028 sera une telle année!

§ SITUATION INITIALE : Combien de vendredi 13 dans une année

La *paraskevidékatriaphobie* est la phobie du vendredi treize. Cette superstition remonterait aux origines de la Chrétienté. Ce serait la conséquence du fait que le Christ aurait été crucifié un vendredi et que la veille lors de la Cène il était accompagné de ses douzes Apôtres dont Judas Iscariote. Cependant beaucoup estime que cette superstition est beaucoup plus ancienne. Le 12 était depuis longtemps le symbole de l'harmonie (12 signes du zodiaque, 12 dieux de l'Olympe, 12 tribus d'Israël, 12 travaux d'Hercule, 12 heures par jour, 12 heures par nuit, 12 mois...). Le 13 portait ainsi malheur puisqu'il rompait cette harmonie!. De nos jours, les vendredis 13 sont, dans l'imagination collective, soient des jours de malheur ou des jours de bonheur et l'occasion de participer à des tirages exceptionnels des loteries!

PREMIÈRE PARTIE : le mois de janvier

1. En 2021 le 1^{er} janvier était un vendredi. Quels sont les dates des autres vendredis du mois de janvier 2021?
2. Diviser chacune des ces dates par 7. Que constatez-vous?
3. Faire la même démarche avec tous les mercredis du mois de janvier. Effectuer la division par 7 du numéro de ces jours. Que constatez-vous?
4. Quel est le reste qui est associé au vendredi?

DEUXIÈME PARTIE — Le vendredi

1. Quel sont les dates de tous les vendredis du mois de février? Quel sont les numéro de ce jour dans l'année? Ce numéro s'appelle le **quantième** du jour.
2. Diviser ces quantièmes par 7. Que constatez-vous?

TROISIÈME PARTIE — Les 13 du mois

1. Compléter le tableau suivant pour une année ordinaire comme 2021.

Mois	Nombre de jours	Quantième du 13	Reste de la division par 7	Mois	Nombre de jours	Quantième du 13	Reste de la division par 7
Janvier				Juillet			
Février				Août			
Mars				Septembre			
Avril				Octobre			
Mai				Novembre			
Juin				Décembre			

2. Combien y aura-t-il de vendredi 13 en 2021?
3. Compléter le tableau suivant pour une année bissextile comme 2020.

Mois	Quantième du 13	Reste	Mois	Quantième du 13	Reste	Mois	Quantième du 13	Reste
Janvier			Mai			Septembre		
Février			Juin			Octobre		
Mars			Juillet			Novembre		
Avril			Août			Décembre		

CONCLUSION — Combien de vendredi 13 dans une année?

1. On a : $1+1+1+4=7$, $1+1+2+3=7$ et $1+2+2+2=7$

Il n'y a que trois manière d'obtenir 7 en ajoutant quatre nombres entiers non nuls.

2.

$1+1+1+4$	$1+2+2+2$	$1+1+2+3$	$2+1+1+3$
$1+1+4+1$	$2+1+2+2$	$1+1+3+2$	$2+1+3+1$
$1+4+1+1$	$2+2+1+2$	$1+2+1+3$	$2+3+1+1$
$4+1+1+1$	$2+2+2+1$	$1+2+3+1$	$3+2+1+1$
		$1+3+2+1$	$3+1+2+1$
		$1+3+1+2$	$3+1+1+2$

Il y a 20 sommes différentes en tenant compte de l'ordre des termes.

3. On remarque que chaque somme possède sa somme symétrique : il y a donc 10 couples symétriques :

1114 et 4111; 1141 et 1411; 1222 et 2221; 2122 et 2212; 1123 et 3211; 1132 et 2311; 1213 et 3121

1231 et 1321; 1312 et 2131; 2113 et 3112

4. Le code EAN a fixé la manière de coder les chiffres de la manière suivante. Compléter ce tableau.

Chiffre	Binaire	Code	Chiffre	Binaire	Code	Chiffre	Binaire	Code
0	0001101	3211	1	0011001	2221	2	0010011	2122
3	0111101	1411	4	0100011	1132	5	0110001	1231
6	0101111	1114	7	0111011	1312	8	0110111	1213
9	0001011	3112						

On constate que les dix codes qui correspondent aux chiffres appartiennent tous à des couples symétriques différents. Deux codes symétriques ne peuvent pas coder des chiffres. Cela ne permettrait pas de lire le code-barres dans tous les sens puisqu'il pourrait y avoir une confusion entre deux codes symétriques.

5. Si je suis le neuvième élève dans la liste alphabétique de ma classe de 605, mon numéro est :

8960509X

X désigne le huitième chiffre que je connais pas pour l'instant!

