

CHAPITRE VII



La proportionnalité

Plan du cours :

I — L'écriture positionnelle des nombres entiers

II — La demi-droite graduée

III — Somme, différence et produit

Programme (BO n° 30 du 26-7-2018) :

- nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé;
- somme, différence, produit et quotient de nombres décimaux.

Compétences :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre (repérage sur la droite graduée);
- calculer avec des nombres relatifs;
- effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

I — Grandeurs proportionnelles

🔗 DÉFINITION 7.1 : Grandeurs proportionnelles

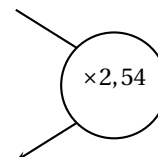
Deux grandeurs sont **proportionnelles** quand il existe un unique coefficient multiplicateur qui permet d'obtenir une des grandeurs en multipliant l'autre par ce nombre.

EXEMPLES :

1. Le pouce est une unité du système impérial britannique dont le symbole est " ou *in*. Cette unité est souvent utilisée pour mesurer la diagonale des écrans des téléphones, tablettes et ordinateurs. On sait que $1'' = 2,54 \text{ cm}$

Voici un tableau montrant quelques exemples :

Pouces	0	1	2	3	5	8	10	20	30	50	100
Centimètres	0	2,54	5,08	7,62	12,7	20,32	25,4	50,8	76,2	127	254



Ces deux grandeurs sont bien proportionnelles puisqu'il existe un coefficient multiplicateur unique : 2,54 qui permet d'obtenir la mesure en centimètres en multipliant la mesure en pouces.

Dans une situation de proportionnalité comme celle-ci on peut aussi dire qu'il existe un coefficient unique qui permet de diviser la mesure en centimètres pour obtenir des pouces.

On peut faire de nombreuses remarques qui sont valables dans toutes situations de proportionnalité :

- si on divise deux nombres l'un par l'autre dans une même colonne, on obtient toujours le même résultat :
 - $50,8 \div 20 = 2,54$;
 - $254 \div 100 = 2,54$.
- on peut ajouter ou soustraire les colonnes entre elles :
 - $2 + 3 = 5$ et $5,08 + 7,62 = 12,7$;
 - $3 + 5 = 8$ et $7,62 + 12,7 = 20,32$;
 - $10 + 20 = 30$ et $25,4 + 50,8 = 76,2$.
- on peut multiplier une colonne par un nombre pour en obtenir une autre :
 - $2 \times 4 = 8$ et $5,08 \times 4 = 20,32$;
 - $10 \times 5 = 50$ et $25,4 \times 5 = 127$.
- pour la valeur 0 les deux grandeurs sont égales à 0. En effet $0 \times 2,54 = 0$.

2. La température peut se mesurer dans des unités différentes :

- en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) ;
C'est l'unité de mesure habituelle de températures.¹
- en degrés Kelvin (K) ;
C'est l'unité de mesure des physiciens, il faut ajouter 273,15 aux températures en degré Celsius.²
- en degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) ; C'est l'unité britannique. Il faut multiplier la température en degré Celsius par 1,8 et ajouter 32.³

Voici un tableau montrant quelques exemples :

Degré Celsius	-30	-20	-10	0	10	20	30	37,8	50	100
Degré Kelvin	243,15	253,15	263,15	273,15	283,15	293,15	303,15	310,95	323,15	373,15
Degré Fahrenheit	-22	-4	14	32	50	68	86	100,04	122	212

On constate que ces grandeurs ne sont pas proportionnelles entre elles :

- Observons les degrés Celsius et les degrés Kelvin :
 - Quand on divise les colonnes, on n'obtient pas le même nombre :
 $283,15 \div 10 = 28,315$ et $293,15 \div 20 = 14,6575$.
 - On ne peut pas ajouter les colonnes :
 $10 + 20 = 30$ et $283,15 + 293,15 = 576,3 \neq 303,15$.
 - On ne peut pas multiplier les colonnes par un nombre :
 $10 \times 5 = 50$ et $283,15 \times 5 = 1415,75 \neq 323,15$.
 - 0 degré Celsius ne correspond pas à 0 degré Kelvin mais 273,15.
- Observons les degrés Celsius et les degrés Fahrenheit :
 - Quand on divise les colonnes, on n'obtient pas le même nombre :
 $50 \div 10 = 5$ et $212 \div 100 = 2,12$.
 - On ne peut pas ajouter les colonnes :
 $10 + 20 = 30$ et $50 + 68 = 118 \neq 86$.
 - On ne peut pas multiplier les colonnes par un nombre :
 $10 \times 5 = 50$ et $50 \times 5 = 250 \neq 122$.
 - 0 degré Celsius ne correspond pas à 0 degré Fahrenheit.

Ainsi les mesures en Celsius et en Kelvin ne sont pas proportionnelles. Les mesures en Celsius et en Fahrenheit ne le sont pas non plus.

Comme on le voit dans les formules données au départ, on ne passe pas des Celsius au Kelvin ou au Fahrenheit en multipliant par un nombre constant.

3. Ma taille et mon âge ne sont pas des grandeurs proportionnelles. Il y a plusieurs justifications :

- il n'existe aucun nombre qui permet d'obtenir ma taille en multipliant mon âge ;
- quand j'étais deux fois plus jeune je n'étais pas deux fois plus petit ;
- quand je serai deux fois plus vieux, je ne serai heureusement pas deux fois plus grand ;
- mon âge continue (malheureusement) à augmenter alors que ma taille commence (malheureusement) à diminuer ;
- quand j'avais 0 an, à ma naissance, je ne mesurais pas 0 *cm* !

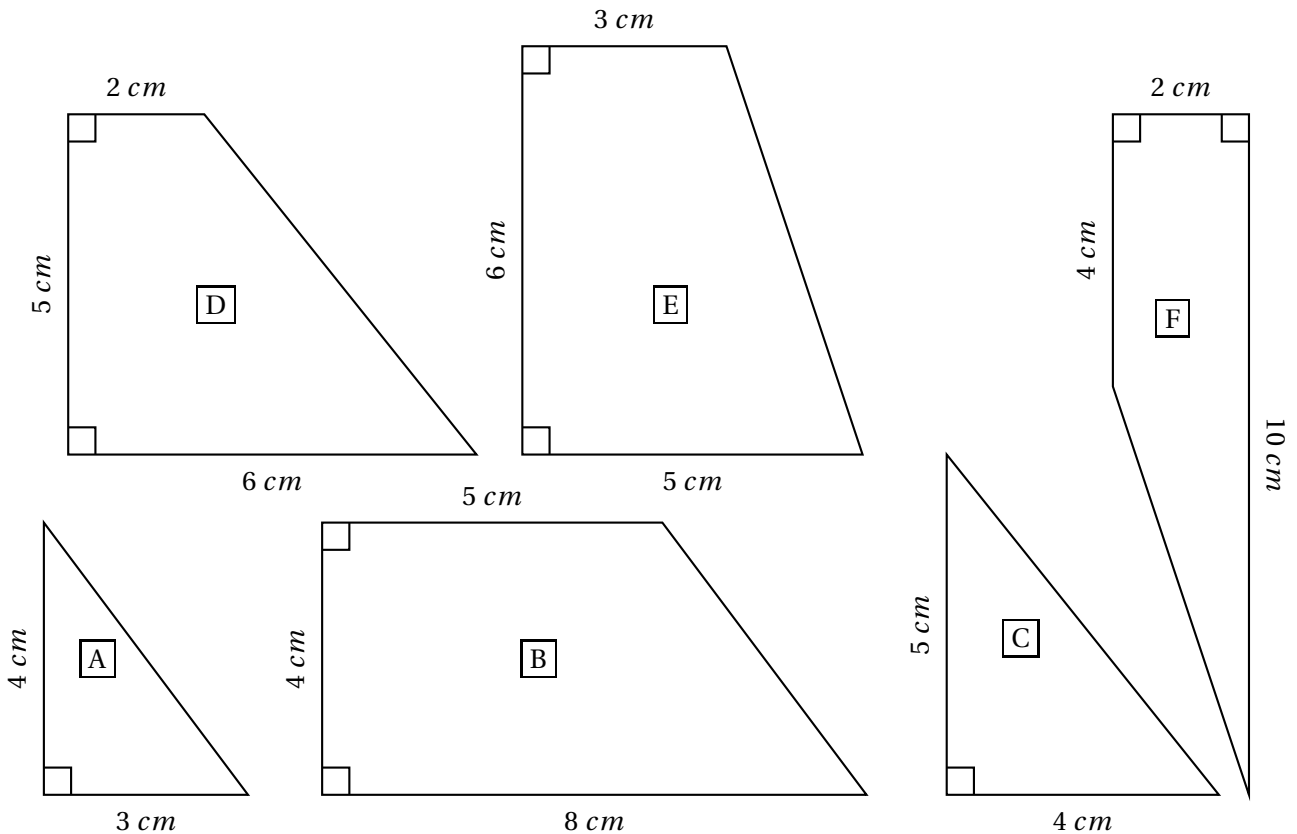
II — Annexe

1 Situation initiale

SITUATION INITIALE : Le puzzle de Brousseau

Première partie : construction du puzzle

Voici six figures géométriques. Chacune d'elle constitue une pièce d'un puzzle. Sur ce document les figures n'ont pas été tracées en vraies grandeurs.



1. Construire ces figures **en vraies grandeurs**, vous pouvez ensuite les découper.

2. Assemblez ces pièces pour former un carré parfait.

Seconde partie : Un second puzzle

On souhaite modifier ce puzzle pour qu'il soit plus grand.

1. On souhaite que le côté qui mesure 2 cm sur le modèle original fasse 3 cm sur l'agrandissement. Modifier les autres mesures pour agrandir toutes les pièces. Écrire ces nouvelles mesures.

2. Construire ces nouvelles pièces agrandies, les découper et tenter de reconstruire le puzzle.

Troisième partie : Un dernier puzzle

Cette fois-ci, on souhaite que le côté qui mesure 12 cm sur le modèle original fasse 15 cm sur l'agrandissement. Modifier les autres mesures pour agrandir toutes les pièces puis écrire ces mesures. Construire enfin ce nouveau puzzle et tenter de le reconstruire.

2 Exercices

EXERCICE N° 7.1 : Proportionnelles ou pas?

En justifiant votre réponse, indiquer dans chaque situation si les grandeurs sont proportionnelles :

1. La masse et la taille d'une personne.
2. Le prix payé à la station service et la quantité d'essence.
3. La durée d'un film et le prix de la place de cinéma.
4. Le nombre de baguettes et le prix payé à la boulangerie.
5. La distance parcourue en voiture et le temps de trajet.
6. La longueur d'un rectangle et son périmètre.
7. La longueur d'un rectangle et son aire.

EXERCICE N° 7.2 : Proportionnelles ou pas — Épisode 2

Voici des tableaux représentant des grandeurs. Indiquez dans chaque cas si ces grandeurs sont proportionnelles ou pas en justifiant votre réponse.

1.

Nombre de stylos	2	3	5	7
Prix payé	4,50 €	6,75 €	11,25 €	15,75 €

2.

Distance parcourue	10 km	30 km	50 km	100 km
Temps	7 min	21 min	30 min	1 h

3.

Masse farine	200 g	300 g	500 g	1 kg
Nombre de cookies	12	18	30	60

4.

Nombre de personne	3	4	6	10
Prix de la location de mobil home	350 €	450 €	550 €	700 €

EXERCICE N° 7.3 : La recette des cannelés bordelais

Voici les ingrédients pour faire 12 cannelés :

- 50 cL de lait;
- 25 g de beurre;
- 3 oeufs;
- 250 g de sucre;
- 125 g de farine;
- une demi gousse de vanille;
- 1,5 cL de rhum.

1. Quelles quantités d'ingrédients faut-il pour faire 36 cannelés? Expliquez votre démarche.
2. Quelles quantités pour 18 cannelés? Et pour 30 cannelés? Et 42 cannelés? Et 99 cannelés?
3. Vous pouvez manger les cannelés...

EXERCICE N° 7.1 : Proportionnelles ou pas ?

CORRECTION

En justifiant votre réponse, indiquer dans chaque situation si les grandeurs sont proportionnelles :

1. La masse et la taille d'une personne.

Si la masse et la taille d'une personne étaient proportionnelles alors on pourrait dire que quand quelqu'un est deux fois plus lourd alors il est forcément deux fois plus grand!! Cette phrase est certainement fausse.

Par exemple mesurer 1,40 m et faire 45 kg est possible. Cet adolescent pourrait faire 90 kg adulte mais ne mesurera jamais 2,80 m.

Ces grandeurs ne sont donc pas proportionnelles.

2. Le prix payé à la station service et la quantité d'essence.

Comme le prix d'un litre d'essence est un nombre fixé par la station service, on obtient bien le prix payé en multipliant la quantité d'essence par le prix d'un litre. Il s'agit bien d'une situation de proportionnalité.

3. La durée d'un film et le prix de la place de cinéma.

On paye le même prix pour un film de 2h30 que pour un film de 1h45. Donc ces grandeurs ne sont pas proportionnelles.

4. Le nombre de baguettes et le prix payé à la boulangerie.

Comme pour l'essence, le prix d'une baguette est un nombre fixe. Ces deux grandeurs sont bien proportionnelles.

5. La distance parcourue en voiture et le temps de trajet.

Si on ne précise pas que la vitesse de la voiture est constante alors ces grandeurs sont proportionnelles.

Par exemple en une heure sur le périphérique toulousain à 17h00 on parcourt une distance qui n'est pas la même que sur une autoroute au milieu de la nuit.

La distance parcourue n'est pas proportionnelles au temps de trajet.

6. La longueur d'un rectangle et son périmètre.

Imaginons un rectangle qui mesure 5 cm de long et 4 cm de large. Le périmètre est égal à $2 \times (5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) = 2 \times 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$.

Si on passe à une longueur de 10 cm, c'est à dire le double, sans modifier la largeur, alors le nouveau périmètre est $2 \times (10 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) = 2 \times 14 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$. Le périmètre n'a pas doublé!

Ces grandeurs ne sont pas proportionnelles.

7. La longueur d'un rectangle et son aire.

Imaginons à nouveau un rectangle qui mesure 5 cm de long et 4 cm de large. L'aire est égale à $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$.

Si on passe à une longueur de 10 cm, c'est à dire le double, sans modifier la largeur, alors la nouvelle aire est $10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$ soit le double de l'aire précédente. Comme pour obtenir l'aire il faut multiplier par la valeur constante 4, ces deux grandeurs sont proportionnelles.

EXERCICE N° 7.2 : Proportionnelles ou pas — Épisode 2

CORRECTION

Voici des tableaux représentant des grandeurs. Indiquez dans chaque cas si ces grandeurs sont proportionnelles ou pas en justifiant votre réponse.

1.

Nombre de stylos	2	3	5	7
Prix payé	4,50 €	6,75 €	11,25 €	15,75 €

Effectuons le quotient $4,50 \div 2 = 2,25$.

Vérifions : $6,75 \div 3 = 2,25$, $11,25 \div 5 = 2,25$ et $15,75 \div 7 = 2,25$

Il existe donc bien un unique coefficient multiplicateur qui permet de passer du nombre de stylos au prix payé.

Ces grandeurs sont bien proportionnelles.

2.

Distance parcourue	10 km	30 km	50 km	100 km
Temps	7 min	21 min	30 min	1 h

En observant la première colonne et la troisième on constate que $5 \times 10 \text{ km} = 50 \text{ km}$, par contre $7 \text{ min} \times 5 = 35 \text{ min} \neq 30 \text{ min}$.

Ce ne sont pas deux grandeurs proportionnelles.

3.

Masse farine	200 g	300 g	500 g	1 kg
Nombre de cookies	12	18	30	60

Effectuons le quotient $200 \div 12 \approx 16,67$. On peut effectuer tous les autres quotients et constater qu'ils ont égaux. Il existe une méthode plus experte qui évite de passer par la valeur approchée. Il suffit de constater que le nombre de cookies est un multiple de 6.

Comme pour 200 g on fait 12 cookies, il faut proportionnellement 100 g pour 6 cookies.

Ensuite $6 \times 3 = 18$ et $100 \text{ g} \times 3 = 300 \text{ g}$, $6 \times 5 = 30$ et $5 \text{ times } 100 \text{ g} = 500 \text{ g}$ et $10 \times 6 = 60$ et $100 \text{ g} \times 10 = 1 \text{ kg}$.

Les deux grandeurs sont proportionnelles.

4.

Nombre de personne	3	4	6	10
Prix de la location de mobil home	350 €	450 €	550 €	700 €

En observant la colonne 1 et la colonne 3 on constate que $3 \times 2 = 6$ et $2 \times 350 = 700 \neq 550$

Ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

EXERCICE N° 7.3 : La recette des cannelés bordelais

CORRECTION

Voici les ingrédients pour faire 12 cannelés :

- 50 cL de lait;
- 25 g de beurre;
- 3 oeufs;
- 250 g de sucre;
- 125 g de farine;
- une demi gousse de vanille;
- 1,5 cL de rhum.

1. Quelles quantités d'ingrédients faut-il pour faire 36 cannelés? Expliquez votre démarche.

Les quantités d'ingrédients doivent être proportionnelles au nombre de cannelés.

Comme $36 = 3 \times 12$, il faut multiplier les quantités par 3 soit :

150 cL de lait, 75 g de beurre, 9 oeufs, 750 g de sucre, 375 g de farine, une gousse et demi de vanille (3 demis gousse!) et 4,5 cL de Rhum.

2. Quelles quantités pour 18 cannelés? Et pour 30 cannelés? Et 42 cannelés? Et 99 cannelés?

Comme $36 \div 2 = 18$ il faut diviser les quantités pour 36 cannelés par 2 soit :

75 cL de lait, 37,5 g de beurre, 4,5 oeufs (5 oeufs), 350 g de sucre, 187,5 g de farine, la moitié de 3 moitiés de gousse de vanille soit trois quarts de gousse et 2,25 cL de Rhum.

Comme $30 = 12 + 18$ il faut ajouter les ingrédients pour 12 cannelés avec les ingrédients pour 18 cannelés soit :

125 cL de lait, 62,5 g de beurre, 7,5 oeufs (8 oeufs!), 600 g de sucre, 312,5 g de farine, une demi gousse et trois quarts de gousses soit une gousse et un quart (:-) et enfin 3,75 cL de Rhum!

Comme $30 + 12 = 42$ on recommence soit :

175 cL de lait, 87,5 g de beurre, 10,5 oeufs (11 oeufs!), 850 g de sucre, 437,5 g de farine, une gousse et trois-quarts, 5,25 cL de Rhum!

Pour 99, il faut trouver une combinaison simple. Il y en a plusieurs. Comme $99 \div 18 = 5,5$ on peut diviser par 5,5 les quantités pour 18. On peut aussi diviser par 2 les quantités pour 18 pour obtenir pour 9 et ensuite multiplier par 11...

3. Vous pouvez manger les cannelés...

Notes

¹Cette propriété s'appelle la commutativité de la multiplication. Une démonstration formelle de cette propriété sur les entiers s'obtient en démontrant par récurrence que $a \times n = n \times a$ pour a un entier fixé et n un entier quelconque. On montre que $a \times 1 = 1 \times a$ par définition de la multiplication entière. Puis en partant d'une hypothèse de récurrence selon laquelle cette propriété est vraie à l'ordre n , on montre que $a \times (n + 1) = (n + 1) \times a$ en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. En effet $a \times (n + 1) = a \times n + a \times 1 = n \times a + 1 \times a = (n + 1) \times a$.

¹Le degré Celsius est l'unité de mesure des températures dans le système décimal métrique. Le 0°C est défini par la température de solidification de l'eau et 100°C par sa température de vaporisation.

²Le degré Kelvin est utilisé en science pour faire des calculs. Elle utilise le même degré (marque) que le degré Celsius mais le 0 est défini par la température la plus basse possible : le zéro absolu $-273,15^\circ\text{C}$ qui correspond à la température théorique où le mouvement atomique est nul...

³Le degré Fahrenheit a pour zéro la température la plus basse que Daniel Fahrenheit, un physicien allemand du XVIII^e siècle, avait mesuré, environ -18°C . La température 100°F correspond à la température du corps humain.

