Chapitre IX

La trigonométrie

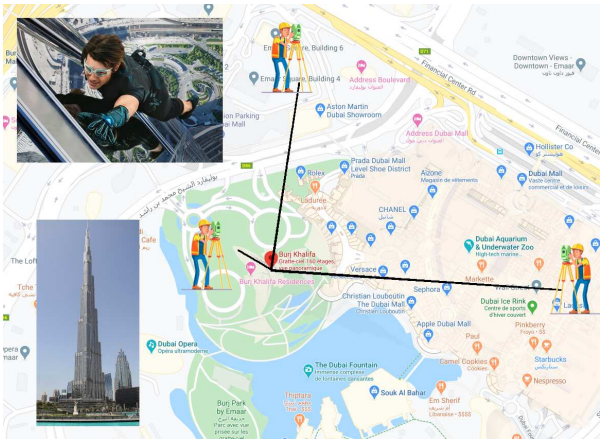
Sommaire

Situation initiale : **Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ?** 378
I Vocabulaire du triangle rectangle 380
II Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu 381
III Usage de la trigonométrie 383
IV Quelques propriétés trigonométriques 385
Fiche de synthèse : Trigonométrie 399

Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ?

Troisième

Situation Initiale



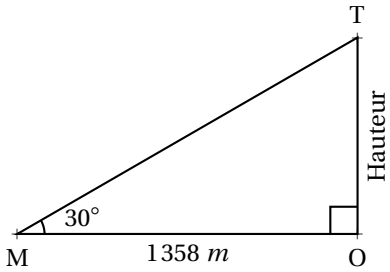
La tour **Burj Khalifa** de Dubaï est la plus haute du monde depuis 2010, elle mesure 828 m. On se souvient de Tom Cruise en 2011 dans Mission Impossible – Protocole fantôme, qui escaladait cette fameuse tour.

Dans cette activité nous allons imaginer nous balader dans Dubaï avec un théodolite (un appareil de géomètre qui permet de mesurer les angles) en plein tournage de Mission Impossible.

Je souhaite mesurer la hauteur à laquelle se trouve Tom Cruise en utilisant la distance horizontale qui nous sépare de la tour et l'angle d'observation de l'acteur.

Première partie

En me positionnant à 1358 m du pied de la tour (j'utilise un GPS), je constate que l'angle d'observation de l'acteur sur la tour par rapport à l'horizontale est exactement de 30°. Je me demande comment en déduire sa hauteur.



Pour cela j'ai l'idée de tracer cette figure à l'échelle.
Je décide que 100 m dans la réalité seront représentés par 1 cm sur le dessin.
Voici un croquis rapide, dont les côtés ne sont pas tracées en vraies grandeurs, pour m'aider à réaliser cette figure.

1. Exprimez cette échelle sous la forme habituelle, c'est-à-dire un ratio 1 : n puis une fraction $\frac{1}{n}$

2. Tracez cette figure à cette échelle puis mesurez la longueur OT.

3. En déduire une valeur approchée au mètre près de la hauteur où se trouve Tom Cruise.

4. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \frac{\text{OT}}{\text{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

(ζ est une lettre de l'alphabet grec qui se prononce zéta, elle a donné notre z... cela ne rend pas cette question plus difficile!)

5. Expliquez pourquoi la hauteur de la tour est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Hauteur de la tour} = \zeta \times \text{Distance horizontale}$$

Seconde partie

Je me déplace maintenant dans Dubaï jusqu'à me retrouver avec un angle de vision d'exactement 40° avec Tom Cruise.

1. Me suis-je rapproché ou éloigné de la tour ?

2. Je suis en fait à 934 m de la tour.
Reprenez les questions **2.** et **3.** de la première partie avec la même échelle pour déterminer à nouveau la hauteur.

3. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \frac{\text{OT}}{\text{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

4. Tracez un triangle MOT rectangle en O représentant la situation en prenant $\widehat{\text{OMT}} = 40°$ et la mesure de votre choix pour la distance MO.

5. Calculez à nouveau ζ au millième près en mesurant cette figure. Que constatez-vous ?
À quelle grandeur de cette figure est lié le quotient ζ ?

Troisième partie

Je me rapproche très près de la tour, l'angle de visée est alors exactement de 80°.

1. En traçant un triangle rectangle ayant un angle aigu de 80°, déterminez une valeur approchée au milième près du quotient ζ en vous inspirant de la méthode de la seconde partie questions **4.** et **5.**.

2. Je constate que je suis exactement à 138 m du pied de la tour.
Calculez à nouveau la hauteur à laquelle se trouve l'acteur et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat.

Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ? — Correction

Première

Situation Initiale

partie

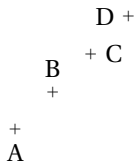
1. Pour cette échelle, 100 m dans la réalité sont représentés par 1 cm sur la carte.

Le quotient $\dfrac{1\ cm}{100\ m} = \dfrac{1\ cm}{10\,000\ cm} = \dfrac{1}{10000}$

Cela signifie que le plan est 10 000 fois plus petit que la réalité.

$\boxed{\text{C'est un plan à l'échelle } 1 : 10\,000 \text{ qui correspond à la fraction } \dfrac{1}{10\,000}.}$

2.



Deuxième partie

Troisième partie

I — Vocabulaire du triangle rectangle

PROPRIÉTÉ 9.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle

Si un triangle est rectangle alors son côté le plus long est opposé à l'angle droit.
Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l'**hypoténuse** .

DÉMONSTRATION :

À rédiger

CQFD

PROPRIÉTÉ 9.2 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en A alors :

— $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus ;
— $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires** .

REMARQUES :

On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à un angle droit, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est-à-dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

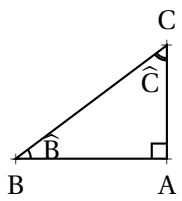
DÉMONSTRATION :

À rédiger

CQFD

DÉFINITION 9.1 : Vocabulaire dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



— [BC] est l'hypoténuse ;
— [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit ;
— [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
— [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

REMARQUES :
Le côté adjacent à un angle aigu est le côté opposé de l'angle complémentaire.
Le côté opposé à un angle aigu est le côté adjacent de l'angle complémentaire.
Le mot « adjacent »vient du latin *adjacens*, participe présent de *adjacere* qui signifie « être situé auprès ». Il a pour synonyme contigu, voisin ou attenant.
Un **côté adjacent** à un angle est un segment dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
Un **côté opposé** à un angle est un segment dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

PROPRIÉTÉ 9.3 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

DÉMONSTRATION :

Considérons deux triangles rectangles ABC et A′B′C′ rectangle respectivement en A et A′ et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangle est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et A′B′C′ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

REMARQUE :
Considérons deux triangles ABC et A′B′C′ rectangles respectivement en A et A′ semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

Le quotient $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{k \times AB}{k \times BC} = \dfrac{AB}{BC}$

Le quotient $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{k \times AC}{k \times BC} = \dfrac{AC}{BC}$

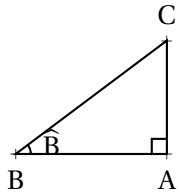
Le quotient $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{k \times AC}{k \times AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et A′B′C′. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{B}$.
Cela justifie la définition suivante :

DÉFINITION 9.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.

On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ de la manière suivante :



$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}$$

MOYEN MNÉMOTECHNIQUE :
Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

C A H S O H T O A

COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT

ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

REMARQUES :

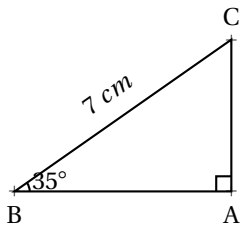
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, cos(75°), sin(75°) et tan(75°) sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.

Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}2588190451$ à 10^{-10} près.

Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, $0,5$ ou 2.

III — Usage de la trigonométrie

MÉTHODE 9 . 1 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et l'hypoténuse



On souhaite calculer la mesure exacte des côtés [AB] et [AC].

Calculons AB**.**

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AB = 7\ cm \times \cos(35°) \approx 5,73\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Dans l'expression $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$ seule la grandeur AB est inconnue.

Pour exprimer AB on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(35°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(35°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(35°)}{1} = \dfrac{AB}{7\ cm}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $AB = 7\ cm \times \cos(35°) \div 1$ soit $AB = 7\ cm \times \cos(35°)$

L'expression $7\ cm \cos(35°)$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **sinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté opposé.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\sin(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\sin(35°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

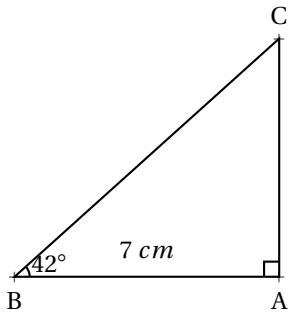
Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \sin(35°) \approx 4,01\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

USAGE DE LA CALCULATRICE :
Les nombres $\cos(35°)$ et $\sin(35°)$ sont disponibles avec la calculatrice.
Les touches cos sin et tan permettent d'obtenir le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle.
Pour calculer $\cos(60°)$ il suffit de saisir cos 60. Le symbole $\circ$ n'est pas nécessaire !

Il faut vérifier que la calculatrice est configurée pour traiter les angles en degrés !

Un bon test consiste à calculer $\cos(60°) = 0,5$. Si la calculatrice ne donne pas cette valeur, c'est qu'elle est mal configurée. Il faut modifier l'unité des angles, en général avec la touche Config ou Setup ou encore Mode ...

MÉTHODE 9 . 2 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et un côté de l'angle droit



On souhaite calculer les mesures des côtés [BC] et [AC]

Calcul de BC**.**

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(42°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(42°) = \dfrac{7\ cm}{BC}$.

Ainsi $\boxed{BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)} \approx 9,42\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Pour exprimer BC on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(42°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(42°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(42°)}{1} = \dfrac{7\ cm}{BC}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $BC = 7\ cm \times 1 \div \cos(42°)$ soit $BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$

L'expression $\dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît le **côté adjacent** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seule la **tangente** se calcule en utilisant la mesure du côté opposé et du côté adjacent.

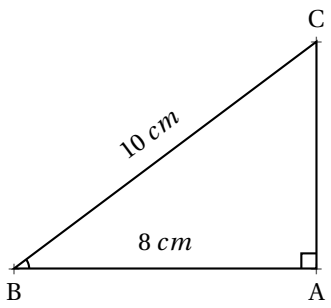
Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\tan(42°) = \dfrac{AC}{AB}$ donc $\tan(42°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \tan(42°) \approx 6,30\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Nous venons de voir que la connaissance de la mesure d'un angle aigu permettait d'obtenir à la calculatrice les nombres sans unités cosinus, sinus ou tangente de cet angle.
Nous allons maintenant remarquer que la connaissance de l'un de ces nombres, cosinus, sinus ou tangente, permet de retrouver la mesure de l'angle.

MÉTHODE 9 . 3 : Calculer la mesure d'un angle connaissant la mesure de deux côtés



Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$

Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$.
Nous pouvons donc calculer le cosinus de cet angle.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$$

À la calculatrice on trouve $\widehat{ABC} \approx 36,87°$ à $0,01°$ près.

On peut obtenir l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant le fait qu'il est complémentaire avec $\widehat{ABC}$.
On a $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

Vérifions avec la trigonométrie.
Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.
Nous pouvons donc calculer le sinus de cet angle.

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$$

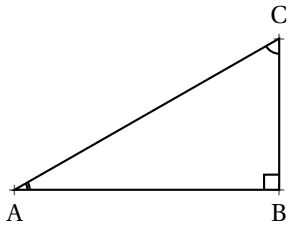
À la calculatrice on trouve $\widehat{ACB} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

USAGE DE LA CALCULATRICE :
Quand on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, la calculatrice donne la mesure de l'angle en utilisant les séquences suivantes Seconde Cos ou Seconde Sin ou enfin Seconde Tan .
Dans ce cas la calculatrice affiche *Arccos()*, *Arcsin()* ou *Arctan()* (ou encore cos^{-1} sin^{-1} ou tan^{-1})...

IV — Quelques propriétés trigonométriques

Cette section est une extension du programme de troisième.

1 Les angles complémentaires et la tangente



Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ sont **complémentaires** . Cela signifie que leur somme vaut 90°.
Dans le triangle ABC rectangle en B, on constate que le côté [AB] est adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ et opposé à l'angle $\widehat{BCA}$.
De même le côté [BC] est adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ et opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Ainsi nous avons :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} \qquad \tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\widehat{BCA} = \frac{BC}{AC} \qquad \sin\widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$$

De plus $\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{cos\widehat{BAC}} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{BC}{AC} \times \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC \times AC}{AC \times AB} = \dfrac{BC}{AB} = \tan\widehat{BAC}$

PROPRIÉTÉ 9.4 : Trigonométrie et angles complémentaires

Dans un triangle rectangle les deux angles aigus $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont complémentaires.
Nous avons de plus les relations suivantes :

$$\cos\widehat{a} = \sin\widehat{b} \qquad \sin\widehat{a} = \cos\widehat{b} \qquad \tan\widehat{a} = \frac{1}{\tan\widehat{b}}$$

Nous avons aussi :

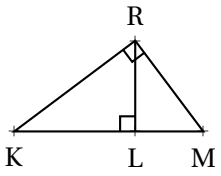
$$\tan\widehat{a} = \frac{\sin\widehat{a}}{\cos\widehat{a}}$$

2 Quelques angles particuliers

3 La relation fondamentale

4 Trigonométrie et cercle de rayon unité

EXERCICE N° 9.1 : Vocabulaire



1. Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots : **adjacent, opposé ou hypoténuse**
Dans le triangle KRM rectangle en R :

— [RK] est le côté ..... à l'angle $\widehat{RKM}$

— [RM] est le côté ..... à l'angle $\widehat{RKM}$

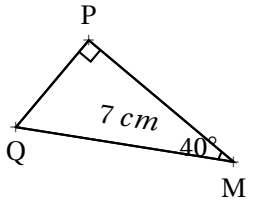
— [RK] est le côté ..... à l'angle $\widehat{RMK}$

— [RM] est le côté ..... à l'angle $\widehat{RMK}$

— [MK] est .....

2. Recommencer la question **1.** avec le triangle RLK puis RLM en faisant pour chacun 5 phrases du même type.
3. Citer tous les couples d'angles complémentaires de cette figure. En déduire tous les angles égaux de cette figure ?
4. Que peut-on dire des triangles KRM, KRL et RLM ?

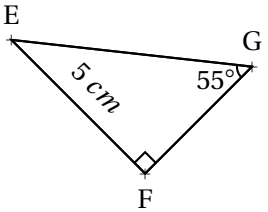
EXERCICE N° 9.2 : Calcul de deux côtés — Épisode 1



Le triangle QPM est rectangle en P.
On sait que $\widehat{PMQ} = 40°$ et que QM = 7 cm

Calculer les valeurs exactes de PQ et PM.
Donner une valeur approchée au mm près.

EXERCICE N° 9.3 : Calcul de deux côtés — Épisode 2



Le triangle EFG est rectangle en F.
On sait que $\widehat{FGE} = 40°$ et que FE = 5 cm

Calculer les valeurs exactes de FG et GE.
Donner une valeur approchée au mm près.

EXERCICE N° 9.4 : Dans quel triangle rectangle ?

EXERCICE N° 9.5 : L'angle à 30°

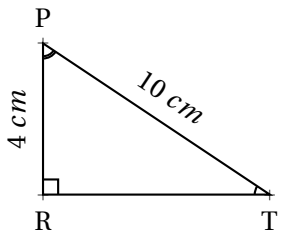
1. Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que :

— AC = 10 cm

— $\widehat{BAC} = 30°$

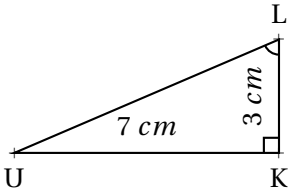
2. Calculer en justifiant votre réponse une valeur approchée au millimètre près des mesures AC et AB
3. Que remarquez-vous pour le côté [BC] ?
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?
5. En utilisant votre calculatrice calculer cos(30°), sin(30°), cos(60°) et sin(60°).
Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer cela ?

EXERCICE N° 9.6 : Calcul d'un angle — Épisode 1



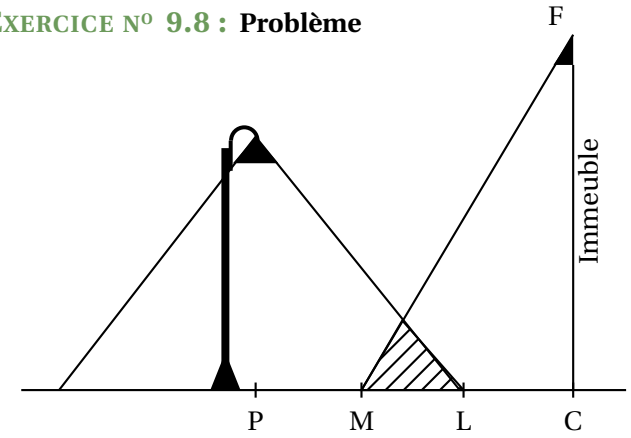
Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{RPT}$ et $\widehat{RTP}$

EXERCICE N° 9.7 : Calcul d'un angle — Épisode 2

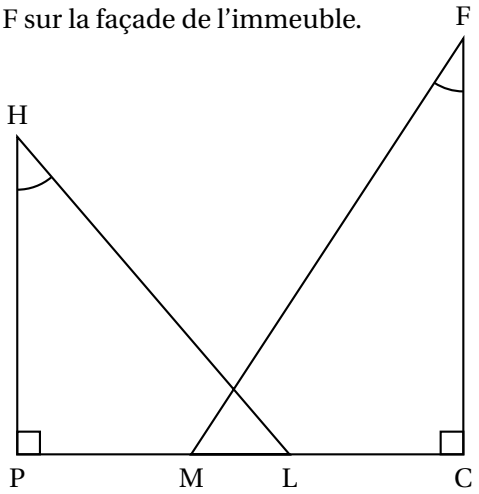


Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{KUL}$ et $\widehat{KLU}$

EXERCICE N° 9.8 : Problème



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC = 5,5 m, CF = 5 m et HP = 4 m

$\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à 3,4 m.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !). Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Contrôle de mathématiques

EXERCICE N° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

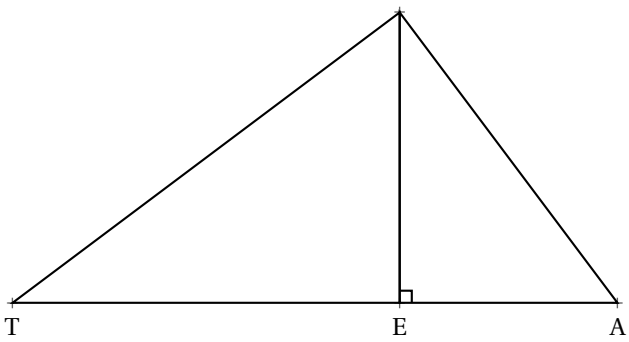
1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

EXERCICE N° 2 : *6 points*



Sur la figure ci-dessus qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

- E ∈ [TA] ;
- (LE) ⊥ (EA) ;
- LT = 16 cm, LA = 12 cm et TA = 20 cm.

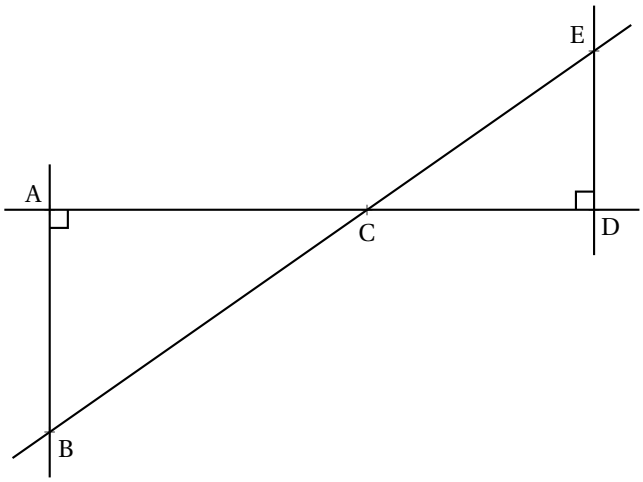
1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

EXERCICE N° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinées en vraie grandeur, on sait que :

- Les points A, C et D sont alignés ;
- les points B, C et E sont alignés ;
- (AB) ⊥ (AD) et (ED) ⊥ (AD) ;
- CD = 5 m, CA = 7 m et $\widehat{ECD} = 35°$.

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

4. Déterminer la mesure de $\widehat{ACB}$.

Contrôle de mathématiques — Correction

Exercice n° 1 : CORRECTION

Calcul littéral

On pose $f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = \left(6x^2 + 21x - 10x - 35\right) - \left(3x - 15x^2 - 5 + 25x\right)$

Il vaut mieux protéger les calculs par des parenthèses pour éviter les erreurs causées par le signe moins.

$f(x) = 6x^2 + 21x - 10x - 35 - 3x + 15x^2 + 5 - 25x$

$\boxed{f(x) = 21x^2 - 17x - 30}$

2. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{3})$.

$\boxed{f(0) = -30}$

$f(\frac{1}{3}) = 21\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 17 \times \frac{1}{3} - 30 = 21 \times \frac{1}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{21}{9} - \frac{17}{3} - 30 = \frac{7}{3} - \frac{17}{3} - \frac{90}{3} = \boxed{-\frac{100}{3}}$

3. Factoriser $f(x)$.

$f(x) = (3x-5)(2x+7) - (3x-5)(1-5x)$
$f(x) = (3x-5)\left((2x+7) - (1-5x)\right)$
$f(x) = (3x-5)(2x+7-1+5x)$

$\boxed{f(x) = (3x-5)(7x+6)}$

4. Résoudre l'équation : $(3x-5)(7x+6) = 0$.

$$(3x-5)(7x+6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x+6 &= 0 \\ 7x+6-6 &= 0-6 \\ 7x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{5}{3} \text{ et } -\frac{6}{7}}$

Exercice n° 2 : CORRECTION

Trigonométrie

1. Démontrer que le triangle LTA est rectangle.

Comparons $LT^2 + LA^2$ et TA^2 :

$LT^2 + LA^2$	TA^2
$16^2 + 12^2$	20^2
$256 + 144$	
400	400

Comme

$$LT^2 + LA^2 = TA^2$$

, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle LTA est rectangle en L}}$.

2. Donner une valeur approchée au centième près de l'angle $\widehat{LTA}$.

Dans le triangle LTA rectangle en L, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

$\cos\widehat{LTA} = \dfrac{16\ cm}{20\ cm} = 0,8$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\sin\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{20\ cm} = 0,6$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\tan\widehat{LTA} = \dfrac{12\ cm}{16\ cm} = 0,75$
À la calculatrice on arrive à $\widehat{LTA} \approx 36,87°$ au centième de degré près.

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{LTA} \approx 36,87°}$

3. Calculer une valeur approchée au millimètre près des côtés TE et LE.

Dans le triangle LTE rectangle en E on a :

$\cos 36,87° = \dfrac{TE}{16\ cm}$ donc $\boxed{TE = 16\ cm \times \cos 36,87° \approx 12,8\ cm \text{ au millimètre près.}}$

$\sin 36,87° = \dfrac{LE}{16\ cm}$ donc $\boxed{LE = 16\ cm \times \sin 36,87° \approx 9,6\ cm \text{ au millimètre près.}}$

4. Donner une valeur approchée au centième près des angles $\widehat{TLE}$, $\widehat{ELA}$ et $\widehat{LAE}$.

On sait que la somme des angles dans un triangle est égale à 180°.

Dans le triangle TLE :

$\widehat{TLE} + \widehat{LTE} + \widehat{LET} = 180°$ donc $\widehat{TLE} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{TLE} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle TLA :

$\widehat{TLA} + \widehat{LTA} + \widehat{LAT} = 180°$ donc $\widehat{LAT} + 36,87° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{LAT} = 180° - 90° - 36,87° = 53,13°}$

Dans le triangle LEA :

$\widehat{LEA} + \widehat{LAE} + \widehat{ALE} = 180°$ donc $\widehat{ELA} + 53,13° + 90° = 180°$ ainsi $\boxed{\widehat{ELA} = 180° - 90° - 53,13° = 36,87°}$

Exercice n° 3 : CORRECTION

Thalès — Trigonométrie

1. Calculer ED et CE.
Donner une valeur approchée au centième près.

Dans le triangle CDE rectangle en D on a :

$\cos 35° = \dfrac{5\ m}{CE}$ donc $\boxed{CE = \dfrac{5\ m}{\cos 35°} \approx 6,11\ m \text{ au centième près.}}$

$\tan 35° = \dfrac{DE}{\ }$ donc $\boxed{DE = 5\ m \times \tan 35° \approx 3,5\ m \text{ au centième près.}}$

2. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

Les droites (ED) et (AB) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles.

$\boxed{\text{Les droites (ED) et (AB) sont parallèles.}}$

3. Calculer AB et BC.
Donner une valeur approchée au centième près.

Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C. On sait que (AB)//(ED).
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{CD}}{\text{CA}} = \frac{\text{CE}}{\text{CB}} = \frac{\text{DE}}{\text{AB}}$$

$$\frac{5\ m}{7\ m} = \frac{6,11\ m}{\text{CB}} = \frac{3,5\ m}{\text{AB}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{CB} = \dfrac{7\ m \times 6,11\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{\text{CB} \approx 8,55\ m}$

$\text{AB} = \dfrac{3,5\ m \times 7\ m}{5\ m}$ d'où $\boxed{\text{AB} \approx 4,9\ m}$

4. Déterminer la mesure de $\widehat{\text{ACB}}$.

Les angles $\widehat{\text{ACB}}$ et $\widehat{\text{ECD}}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.

$\boxed{\widehat{\text{ACB}} = 35°}$

Contrôle de mathématiques

EXERCICE N° 1 : *7 points*

On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) + (7x-1)(6x+3)$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

3. Factoriser $f(x)$.

4. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

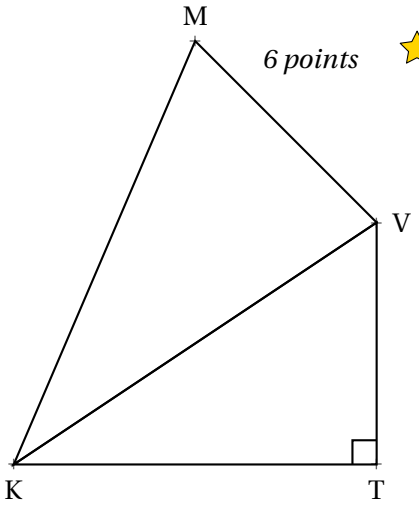
EXERCICE N° 2 : *6 points*

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— Le triangle KTV est rectangle en T ;

— $\widehat{VKT} = 39°$;

— KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

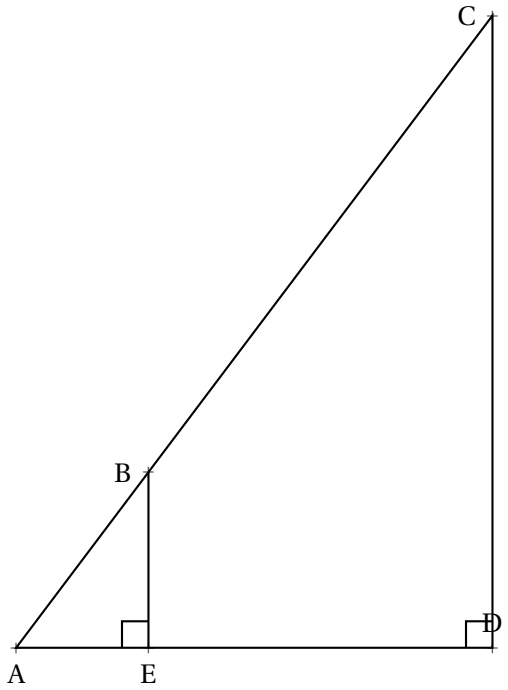


1. Calculer VT et KT. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

EXERCICE N° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— E ∈ [AD] et B ∈ [AC] ;

— AEB est rectangle en E ;

— ADC est rectangle en D ;

— $\widehat{BAE} = 53°$;

— AE = 5 cm et ED = 13 cm.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral

EXERCICE N° 1 : *7 points*

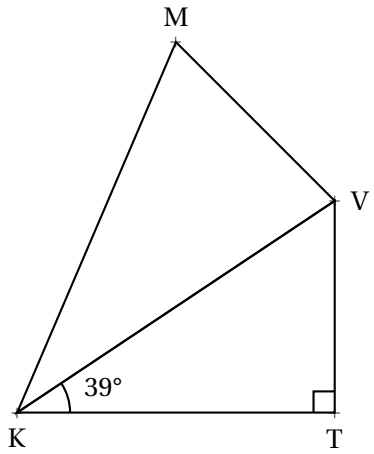
On pose $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$ et $g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

1. Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$
3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(-3x-1) = 0$.

EXERCICE N° 2 : *6 points*

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, on sait que :

— Le triangle KTV est rectangle en T ;
— $\widehat{VKT} = 39°$;
— KV = 76 m, VM = 57 m et MK = 95 m

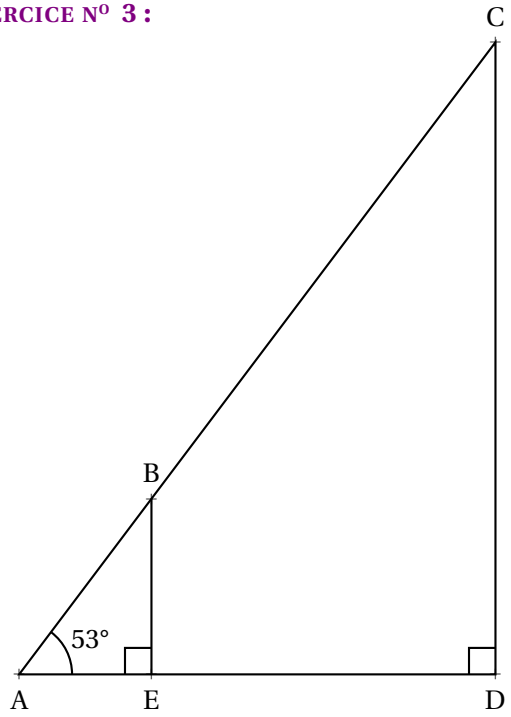


1. Calculer VT et KT.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centimètre près.

2. Démontrer que le triangle KMV est rectangle.

3. Donner une valeur approchée au dixième de degré près des angles $\widehat{KMV}$ et $\widehat{VKM}$.

EXERCICE N° 3 : *7 points*



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que :

— E ∈ [AD] et B ∈ [AC] ;
— AEB est rectangle en E ;
— ADC est rectangle en D ;
— $\widehat{BAE} = 53°$;
— AE = 5 cm et ED = 13 cm.

1. Calculer les longueurs EB et AB et donner une valeur approchée au millimètre près.

2. Démontrer que les droites (EB) et (DC) sont parallèles.

3. Calculer les longueurs CD et AC et donner une valeur approchée au millimètre près.

Trigonométrie et calcul littéral — CORRECTION

Exercice n° 1 : Calcul littéral CORRECTION

MOYEN

Développer et factoriser

1. $f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (21x^2 + 14x - 3x - 2) - (42x^2 + 21x - 6x - 3)$

$f(x) = 21x^2 + 14x - 3x - 2 - 42x^2 - 21x + 6x + 3$

$\boxed{f(x) = -21x^2 - 4x + 1}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = (5x-1)(5x-1) - (4x+3)(4x+3)$

$g(x) = (25x^2 - 5x - 5x + 1) - (16x^2 + 12x + 12x + 9)$

$g(x) = 25x^2 - 5x - 5x + 1 - 16x^2 - 12x - 12x - 9$

$\boxed{g(x) = 9x^2 - 34x - 8}$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (7x-1)(3x+2) - (7x-1)(6x+3)$

$f(x) = (7x-1)[(3x+2) - (6x+3)]$

$f(x) = (7x-1)(3x+2-6x-3)$

$\boxed{f(x) = (7x-1)(-3x-1)}$

$g(x) = (5x-1)^2 - (4x+3)^2$

$g(x) = [(5x-1) + (4x+3)][(5x-1) - (4x+3)]$

$g(x) = (5x-1+4x+3)(5x-1-4x-3)$

$\boxed{g(x) = (9x+2)(x-4)}$

3. Résoudre l'équation : $(7x-1)(9x+5) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 0 \\ 7x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\ 7x &= 1 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 5 &= 0 \\ 9x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 9x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{\frac{1}{7} \text{ et } -\frac{5}{9}}$

Exercice n° 2 : Trigonométrie CORRECTION

MOYEN

Calculer un angle ou un côté avec la trigonométrie

1. Dans le triangle VTK, rectangle en T, l'hypoténuse est le côté[VK].

Calcul de VT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté opposé à l'angle à 39°.

$\sin 39° = \frac{\text{VT}}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{\text{VT} = 76\,\text{m} \times \sin 39° \approx 47{,}83\,\text{m au centimètre près.}}$

Calcul de KT :

On connaît la mesure de l'hypoténuse VK et on cherche le côté adjacent à l'angle à 39°.

$\cos 39° = \frac{\text{KT}}{76\,\text{m}}$ donc $\boxed{\text{KT} = 76\,\text{m} \times \cos 39° \approx 59{,}06\,\text{m au centimètre près.}}$

On pouvait aussi, même si je le déconseille, utiliser le théorème de Pythagore :
Dans le triangle KTV rectangle en T,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$TK^2 + TV^2 = KV^2$$

$$\begin{aligned} TK^2 + 47,83^2 &= 76^2 \\ TK^2 + 2287,7089 &= 5776 \\ TK^2 &= 5776 - 2287,7089 \\ TK^2 &= 3488,2911 \\ TK &= \sqrt{3488,2911} \\ TK &\approx 59,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 59,06^2 + TV^2 &= 76^2 \\ 3488,0836 + TV^2 &= 5776 \\ TV^2 &= 5776 - 3488,0836 \\ TV^2 &= 2287,9164 \\ TV &= \sqrt{2287,9164} \\ TV &\approx 47,83 \end{aligned}$$

2. Comparons $VM^2 + VK^2$ et MK^2 :

$$\begin{aligned} VM^2 + VK^2 \\ 57^2 + 76^2 \\ 3249 + 5776 \\ 9025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MK^2 \\ 95^2 \\ 9025 \end{aligned}$$

Comme $VM^2 + VK^2 = MK^2$, d'après **la réciproque du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle VKM est rectangle en V}}$.

3. Dans le triangle VKM rectangle en V, on peut calculer au choix :

$\cos\widehat{MKV} = \dfrac{76\,m}{95\,m}$
$\cos\widehat{MKV} = 0,8$

$\sin\widehat{MKV} = \dfrac{57\,m}{95\,m}$
$\sin\widehat{MKV} = 0,6$

$\tan\widehat{MKV} = \dfrac{57\,m}{76\,m}$
$\tan\widehat{MKV} = 0,75$

Dans tous les cas, à la calculatrice, on arrive à $\boxed{\widehat{MKV} \approx 36,9°}$.

Exercice n° 3 : Trigonométrie, Pythagore et Thalès CORRECTION

MOYEN

Utiliser les grands résultats de la géométrie

1. Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'hypoténuse est le côté [AB].

Calcul de EB :
On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{BE}{5\,cm}$ donc $\boxed{BE = 5\,cm \times \tan 53° \approx 6,6\,cm \text{ au millimètre près.}}$

Calcul de AB :
On connaît la mesure du côté adjacent et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{5\,cm}{AB}$ donc $\boxed{AB = \dfrac{5\,cm}{\cos 53°} \approx 8,3\,cm \text{ au millimètre près.}}$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore pour trouver le second côté... mais je le déconseille !

2. Les droites (EB) et (DC) sont perpendiculaires à la droite (AD).
On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

$\boxed{\text{Les droites (EB) et (DC) sont parallèles.}}$

3. On pouvait utiliser deux raisonnements :
Avec la trigonométrie :
Dans le triangle ADC, rectangle en D, l'hypoténuse est le côté [AC].

Calcul de CD :

On connaît la mesure du côté adjacent AD = AE + ED = 5 cm + 13 cm = 18 cm et on veut le côté opposé à l'angle à 53°.

$\tan 53° = \dfrac{\text{CD}}{18\,\text{cm}}$ donc $\boxed{\text{CD} = 18\,\text{cm} \times \tan 53° \approx 23{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Calcul de AC :

On connaît la mesure du côté adjacent AD et on cherche l'hypoténuse.

$\cos 53° = \dfrac{18\,\text{cm}}{\text{AD}}$ donc $\boxed{\text{AD} = \dfrac{18\,\text{cm}}{\cos 53°} \approx 29{,}9\,\text{cm au millimètre près.}}$

Avec le théorème de Thalès :
Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A, les droites (BE) et (CD) sont parallèles,
i 'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AE}}{\text{AD}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{EB}}{\text{DC}}$$

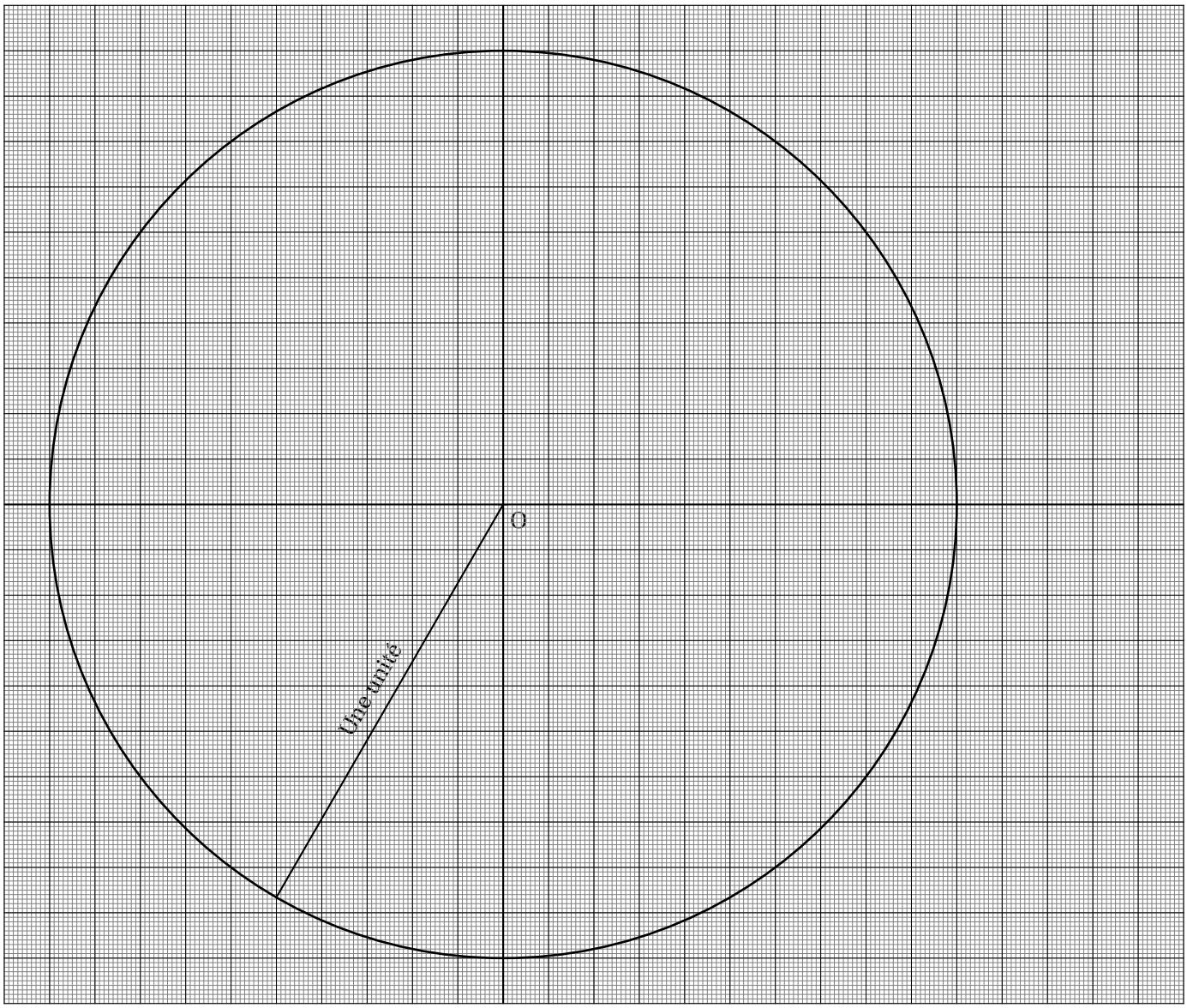
$$\frac{5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} = \frac{8{,}3\,\text{cm}}{\text{AC}} = \frac{6{,}6\,\text{cm}}{\text{DC}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{AC} = \dfrac{8{,}3\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $\text{AC} = \dfrac{149{,}4\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $\text{AC} \approx 29{,}9\,\text{cm}$

$\text{DC} = \dfrac{6{,}6\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}$ d'où $\text{DC} = \dfrac{118{,}8\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}}$ et $\text{DC} \approx 23{,}8\,\text{cm}$

Le cercle trigonométrique

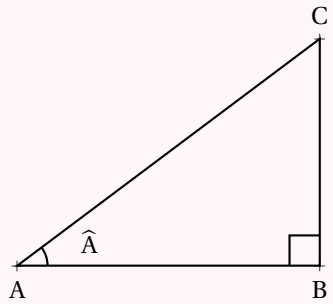


TRIGONOMÉTRIE

DÉFINITION

Dans un triangle ABC rectangle en B :

- le plus long côté du triangle, opposé à l'angle droit est l'hypoténuse ;
- le côté de l'angle droit étant un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- le côté de l'angle droit n'étant pas un côté de l'angle $\widehat{A}$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$.



- [AC] est l'hypoténuse du triangle ;
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$;
- [BC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$;
- [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$;

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en B, il existe trois grandeurs qui ne dépendent que de l'angle $\widehat{A}$ que l'on nomme cosinus, sinus et tangente de l'angle $\widehat{A}$. La connaissance de l'une de ces grandeurs permet de retrouver la mesure de l'angle $\widehat{A}$.
On les définit ainsi :

$$\cos\widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle} \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à l'angle} \widehat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle} \widehat{A}}$$

MOYEN MNÉMOTECHNIQUE :

L'acronyme suivant permet de se souvenir facilement de ces trois définitions :

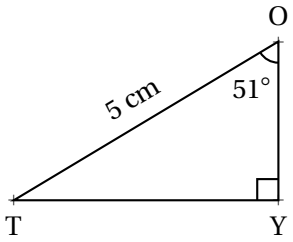
C A H S O H T O A

C pour cosinus, S pour sinus et T pour tangente.
A pour adjacent, O pour opposé et H pour hypoténuse.

USAGES :

Pour calculer la longueur d'un côté connaissant un côté et un angle

TOY un triangle rectangle en T.



Calculons la longueur OY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté adjacent à l'angle à 51°. On utilise donc le **cosinus**.

$\cos 51° = \dfrac{\text{OY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{OY} = 5\ cm \times \cos 51°}$

Finalement OY $\approx 3,15\ cm$

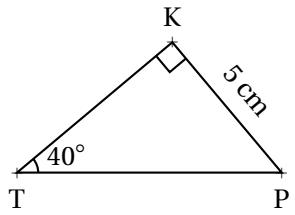
Calculons la longueur TY :

On connaît la mesure de l'hypoténuse, on veut celle du côté opposé à l'angle à 51°. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 51° = \dfrac{\text{TY}}{5\ cm}$ soit $\boxed{\text{TY} = 5\ cm \times \sin 51°}$

Finalement TY $\approx 3,89\ cm$

KPT un triangle rectangle en K.



Calculons la longueur TP :

On connaît la mesure du côté opposé à l'angle à 40°, on veut celle de l'hypoténuse. On utilise donc le **sinus**.

$\sin 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TP}}$ soit $\boxed{\text{TP} = \dfrac{5\ cm}{\sin 40°}}$

Finalement TP $\approx 7,78\ cm$

Calculons la longueur TK :

On connaît la mesure du côté opposé, on veut celle du côté adjacent. On utilise donc la **tangente**.

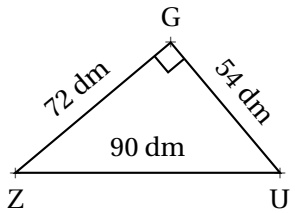
$\tan 40° = \dfrac{5\ cm}{\text{TK}}$ soit $\boxed{\text{TK} = \dfrac{5\ cm}{\tan 40°}}$

Finalement TK $\approx 5,96\ cm$

Pour résoudre une équation du type $5 = \dfrac{x}{7}$ ou $8 = \dfrac{7}{x}$, on écrit chaque membre comme une fraction, $\dfrac{5}{1} = \dfrac{x}{7}$ et $\dfrac{8}{1} = \dfrac{7}{x}$ puis on utilise la règle de trois !

Pour calculer la mesure d'un angle connaissant deux côtés

ZUG un triangle rectangle en G.



Calculons la mesure des angles $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$.

On peut calculer au choix soit le cosinus, le sinus ou la tangente de chacun de ces angles.

Ainsi $\cos\widehat{UZG} = \dfrac{72\ dm}{90\ dm} = 0,8$.

À la calculatrice on trouve $\boxed{\widehat{UZG} \approx 36,87°}$

Il faut saisir seconde cos 0,8

Comme $\widehat{UZG}$ et $\widehat{GUZ}$ sont complémentaires, $\widehat{GUZ} = 90° - 36,87° = 53,13°$

Informations légales

- **Auteur :** Fabrice ARNAUD
- **Web :** pi.ac3j.fr
- **Mail :** contact@ac3j.fr

- **Dernière modification :** 8 février 2024 à 6:22

Ce document a été écrit pour LaTeXavec l'éditeur Vim 9.0.1000-4.
Il a été compilé sous Linux Ubuntu Lunar 23.04 avec la distribution TeX Live 2022.20230122-2 et pdfTeX 3.141592653-2.6-1.40.24.

Pour compiler ce document, un fichier comprennant la plupart des macros est nécessaires. Ce fichier, Entete.tex, est encore trop mal rédigé pour qu'il puisse être mis en ligne. Il est en cours de réécriture et permettra ensuite le partage des sources dans de bonnes conditions.
Le fichier source a été réalisé sous Linux Ubuntu avec l'éditeur Vim. Il utilise une balise spécifique à Vim pour permettre une organisation du fichier sous forme de replis. Cette balise %{{{ ... %}}} est un commentaire pour LaTeX, elle n'est pas nécessaire à sa compilation. Vous pouvez l'utiliser avec Vim en lui précisant que ce code defini un repli. Je vous laisse consulter la documentation officielle de Vim à ce sujet.

Licence CC BY-NC-SA 4.0

Attribution
Pas d'Utilisation Commerciale
Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International

Ce document est placé sous licence CC-BY-NC-SA 4.0 qui impose certaines conditions de ré-utilisation.

Vous êtes autorisé à :

Partager — copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats

Adapter — remixer, transformer et créer à partir du matériel

L'Offrant ne peut retirer les autorisations concédées par la licence tant que vous appliquez les termes de cette licence.

Selon les conditions suivantes :

Attribution — Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.

Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant.

Partage dans les Mêmes Conditions — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec la même licence avec laquelle l'œuvre originale a été diffusée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des mesures techniques qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

Consulter : `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr`

Comment créditer cette Œuvre ?

Ce document, **Cours.pdf**, a été crée par **Fabrice ARNAUD (contact@ac3j.fr)** le 8 février 2024 à 6:22.
Il est disponible en ligne sur **pi.ac3j.fr**, **Le blog de Fabrice ARNAUD**.
Adresse de l'article : `https://pi.ac3j.fr/mathematiques-college`.