CHAPITRE I

Arithmétique

L'ÉTYMOLOGIE du mot arithmétique est basée sur le grec ancien arithmos, qui signifie nombre.
L'origine de l'arithmétique semble être une invention phénicienne. Dans l'école pythagoricienne, à la deuxième moitié du VI^{e}siècle av. J.-C., l'arithmétique était, avec la géométrie, l'astronomie et la musique, une des quatre sciences quantitatives ou mathématiques (Mathemata). Celles-ci furent regroupées au sein des sept arts libéraux par Martianus Capella (V^{e}siècle) et plus précisément désignées sous le nom de quadrivium par Boèce. Les trois autres disciplines étaient littéraires (grammaire, rhétorique, dialectique) et firent l'objet des travaux de Cassiodore et, plus tard, Alcuin qui leur donna le nom de trivium.[2]

Au IIIe siècle av. J.-C., Euclide formalise, dans son livre les Éléments, les fondements de l'arithmétique. On y trouve notamment le lemme couramment nommé lemme d'Euclide, une version datée du théorème fondamental de l'arithmétique et une étude sur les nombres parfaits. Diophante d'Alexandrie, vers 250, écrit son Arithmetica qui contient 130 équations. Les équations, à coefficients entiers et dont les solutions recherchées sont entières, prennent aujourd'hui le nom d'équations diophantiennes.

La Chine développe parallèlement une arithmétique modulaire. Sun Zi écrit vers l'an 300 un traité de mathématiques dont le problème 26 du chapitre 3 est le suivant : « Soient des objets dont on ignore le nombre. En les comptant 3 par 3 il en reste 2, en les comptant 5 par 5, il en reste 3 et en les comptant 7 par 7, il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets ? ». Qin Jiushao (1202 - 1261) développe le théorème des restes chinois.
Le XIVe siècle voit un déclin progressif puis un oubli de ces résultats. L'Inde possède aussi une tradition forte en arithmétique. Aryabhata (476 - 550) recherche de manière systématique les solutions entières de l'équation linéaire à deux inconnues à coefficients entiers. Les équations diophantiennes de degré deux sont étudiées par Brahmagupta (598 - 668).

La civilisation islamique joue un double rôle en arithmétique : elle véhicule le savoir acquis par les Grecs, Indiens, Chinois et Européens, et elle apporte des connaissances nouvelles notamment sur l'étude des propriétés de certains ensembles d'entiers, comme les nombres premiers, parfaits, amicaux ou figurés.

En 1621, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac traduit le livre de Diophante en latin. Les questions soulevées intéressent les mathématiciens de l'époque. Pierre de Fermat propose un grand nombre d'énoncés, les trois plus célèbres étant probablement son grand théorème, son théorème des deux carrés et son petit théorème. La communauté scientifique se lance des défis sur ce sujet.

Le siècle suivant voit la résolution de certaines de ces questions, souvent par Leonhard Euler : il contredit Fermat en démontrant que ses nombres ne sont pas toujours premiers, et prouve le théorème des deux carrés. Il commet aussi des erreurs, sa tentative de démonstration du grand théorème de Fermat pour n égal à trois est un échec, sa première démonstration s'avère fausse. Il soulève d'autres questions comme la loi de réciprocité quadratique en 1782. Là encore, et malgré une tentative d'Adrien-Marie Legendre, la solution reste hors de portée.

À l'âge de 17 ans, Gauss démontre la loi de réciprocité quadratique. Un an plus tard, le 30 mars 1796, il prend conscience que ses calculs arithmétiques permettent de construire à la règle et au compas l'heptadécagone, c'est-à-dire le polygone régulier à dix-sept côtés, problème resté ouvert depuis l'Antiquité. Enfin en 1801, il publie Disquisitiones arithmeticae (Recherches arithmétiques) il est surnommé le prince des mathématiciens.Toutes les équations diophantiennes de Fermat sont maintenant résolues à l'exception de son grand théorème. De nouvelles conjectures apparaissent.

L'arithmétique modulaire est enrichie. Dirichlet, un élève de Gauss trouve une démonstration du théorème de la progression arithmétique en développant le concept des caractères et en formalisant les bases de la théorie analytique des nombres.

Au XIX^{e}siècle, ces mathématiques sont dénommées arithmétique transcendante. Si le terme d'arithmétique reste largement usité, Legendre considère, en 1830, cette branche comme suffisamment développée pour mériter le terme de théorie des nombres.

Ce domaine quitte au XX^{e}siècle celui des mathématiques pures. En revanche, une application industrielle fait, au cours du temps, de plus en plus appel aux notions mathématiques développées par Gauss : la science des codes secrets appelée cryptologie.

En 1976 une nouvelle famille de codes est découverte, fondée sur une clé publique. Des solutions industrielles sont rapidement développées, la plus célèbre est dénommée R.S.A. Elle se fonde sur les travaux de Fermat et d'Euler. Avec le développement de l'informatique, l'arithmétique modulaire devient un domaine de recherche actif : les applications nécessitent l'utilisation d'opérations sur des grands nombres, et la mise en œuvre d'algorithmes efficaces. [3]

Plan du cours :

I – Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 – La division euclidienne

2 – Diviseurs et multiples

3 – Les critères de divisibilité

II – Décomposition en produit de facteurs premiers

1 – Les nombres premiers

2 – Décomposition en produit de facteurs premiers

III – Applications

1 – Recherche des diviseurs communs

2 – Fractions irréductibles

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) :

— multiples et diviseurs ;
— critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 ;
— division euclidienne (quotient, reste) ;
— définition d'un nombre premier ; liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 ;
— fractions irréductibles.

Compétences :

— déterminer si un entier est ou n'est pas un multiple ou diviseur d'un autre entier ;
— déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 ;
— utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 ;
— déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ;
— décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou l'aide d'un logiciel) ;
— simplifier une fraction pour la rendre irréductible ;
— modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonctions de phénomènes, etc.).

Situation initiale : Le jeu de Juniper-Green

Mode « bataille »

Règle du jeu :

- Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 100;
- Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :
  - Ce nombre n'a pas encore été choisi dans cette partie;
  - Ce nombre est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.
- Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre voisin en notant à chaque fois en ligne les nombres entiers successifs choisis.

Mode « collaboratif »

Règle du jeu :

- Vous utilisez les mêmes règles que pour le mode « bataille »;
- Vous devez trouver la plus longue succession de nombres entiers qui correspond à une partie de Juniper-Green.

[1]

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

Définition 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geqslant b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

- $a = b \times q + r$
- $0 \leqslant r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b.

Remarque :

Le diviseur ne peut pas être égal à 0![2]

Vocabulaire :
L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne**.

Exemples :

$2019 = 31 \times 65 + 4$

2019 est le dividende, 31 le diviseur,

65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.

Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième!

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ \hline 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$2019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

DÉFINITION 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que
- a est un **multiple** de b,
- b est un **diviseur** de a,
- a est **divisible** par b

EXEMPLE :

3 est un diviseur de 2019.
673 est un diviseur de 2019.
2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.
2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ 1.1 : Quelques critères de divisibilité (Démontrée à l'oral et en exercice)

Un nombre entier est divisible par :
- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

REMARQUE :

On peut mélanger ces critères :
- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

DÉMONSTRATION :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.
$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.
On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,712$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 2$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 2$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 2$
Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2 + 7 + 1 + 2 = 3 \times 4$
$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.
On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 **:**

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,020$.
$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.
On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.
Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.
Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.
$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.
On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.
Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 **:**

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8\,765$.
$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.
On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 5

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,718$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 8$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 8$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 8$
Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2 + 7 + 1 + 8 = 9 \times 2$
$a = 2 \times 9 \times 111 + 7 \times 9 \times 11 + 1 \times 9 + 9 \times 2$.
On peut factoriser 9, $a = 9(2 \times 111 + 7 \times 11 + 1 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD

II — Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

1 Les nombres premiers

DÉFINITION 1.3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède **exactement** deux diviseurs.

PROPRIÉTÉ 1.2 :

Si nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

DÉMONSTRATION :

a un nombre entier.
$a = 1 \times a$ donc a est divisible par 1 et a est divisible par a.
1 et a sont deux diviseurs de a.
Si a est un nombre premier alors il possède exactement deux diviseurs : ce sont forcément 1 et a.

CQFD

1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même ! **EXEMPLES :**
Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 : [3]
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

2 Décomposition en facteurs premiers

THÉORÈME 1.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique (Admis)

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.[4]

EXEMPLES :

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

MÉTHODE 1 . 1 : Comment décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on divise ce nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant et on recommence avec le quotient jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.
On divise donc par 2, 3, 5, 7, 11, 13...
Les critères de divisibilité sont très utiles dans cette situation.

Décomposons le nombre 3 780

$3\,780 = 2 \times 1\,890$

$1\,890 = 2 \times 945$

$945 = 3 \times 315$

$315 = 3 \times 105$

$105 = 3 \times 35$

$35 = 5 \times 7$

Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

On peut aussi présenter les calculs ainsi :

$$\begin{array}{r|c} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

III — Applications

1 Fractions irréductibles

DÉFINITION 1.4 : Fraction irréductible

a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

EXEMPLE :

$\dfrac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

$\dfrac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.

D'ailleurs $\dfrac{76}{64} = \dfrac{2 \times 38}{2 \times 32} = \dfrac{38}{32} = \dfrac{2 \times 19}{2 \times 16} = \dfrac{19}{16}$

La fraction $\dfrac{19}{16}$ est irréductible.

MÉTHODE 1 . 2 : Simplifier une fraction en une fraction irréductible
Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1\,260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

---

2 Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

MÉTHODE 1 . 3 : Déterminer les diviseurs d'un nombre entier
Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers. Voici ses diviseurs :

Aucun facteur premier : 1

Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;

Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$

Trois facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$

Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

On vient de trouver 21 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630

MÉTHODE 1 . 4 : Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Les facteurs premiers communs sont : 2, 3, 3 et 5

Les combinaisons possibles sont : 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Il y a donc 11 diviseurs communs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90.

90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

QUESTIONS DU JOURS

QUESTION DU JOUR N° 1 : Division euclidienne

Trouver tous les nombres entiers compris entre 2019 et 2089 vérifiant les critères suivants :
- le reste de la division de ces nombres par 2 est 1;
- le reste de la division de ces nombres par 3 est 0;
- le reste de la division de ces nombres par 5 est 3.

QUESTION DU JOUR N° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Trouver tous les nombres entiers compris entre 1789 et 2250 vérifiant les critères suivants :
- ces nombres sont des multiples de 2;
- ces nombres sont des multiples de 3;
- ces nombres sont des multiples de 5;
- ces nombres sont des multiples de 7.

QUESTION DU JOUR N° 3 : Les années bissextiles

En 2018 le 14 mars (jour de π) était un mercredi. En 2019 c'était un jeudi. En 2020 ce sera un samedi.
Quel jour de la semaine était le 14 mars 2000?

QUESTION DU JOUR N° 4 : Les jours fériés

En 2019 le 1er mai, le 8 mai, Noël et le jour de l'an qui suit sont des mercredis. On peut observer que le 1er mai est le 121e jour de l'année, le 8 mai est le 128 e et Noël le 359e. De la même manière le 8 mars (67e jour), journée de la femme, le 21 juin (172e jour), fête de la musique et le 1er novembre (305e jour), la Toussaint sont des vendredis.
Comment expliquer ces observations?

QUESTION DU JOUR N° 5 : Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3528 et 3024.
Simplifier la fraction $\dfrac{3528}{3024}$

QUESTION DU JOUR N° 6 : Décomposition en produit de facteurs premiers – Épisode 2

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 7875 et 7425.
Simplifier la fraction $\dfrac{7425}{7875}$

QUESTION DU JOUR N° 7 : Les bus

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 42 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 30 min. Le bus n° 67 met 35 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt?

QUESTION DU JOUR N° 8 : Les bus — Épisode 2

Trois lignes de bus se rencontrent au même arrêt « Arènes ». Le bus n° 14 revient à cet arrêt toutes les 60 min. Le bus n° 34 repasse à cet arrêt toutes les 45 min. Le bus n° 67 met 54 min avant de repasser par là.
Ce matin à 8 h 00 les trois bus sont en même temps à l'arrêt « Arènes ».
À quels moments de la journée ces trois bus vont-ils se retrouver tous les trois ensemble à cet arrêt?

Correction du jour n° 1 : Division euclidienne

Comme le reste de la division par 2 est 1 : ce sont des nombres impairs.
Comme le reste de la division par 3 est 0 : ce sont des multiples de 3.
Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5. Si le reste est 3, ils se terminent par 3 ou 8. Mais ils sont impairs.
Ce sont des nombres dont le chiffre des unités est 3 et des multiples de 3.
2 023, 2 033, 2 053, 2 063 et 2 083 ne sont pas des multiples de 3.
Il s'agit de 2 043 et 2 073.

Correction du jour n° 2 : Division euclidienne — Épisode 2

Ce nombre est un multiple de 2, 3, 5 et 7 donc de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
2 100 est un multiple de 210. 2 310 aussi mais trop grand. 1 890 est bon aussi mais pas 1 680 trop petit.

Correction du jour n° 3 : Les années bissextiles

Mardi 14 mars 2000 !
Il y a 365 jours dans une année ordinaire et 366 dans une année bissextile.
$365 = 7 \times 52 + 1$ et $366 = 7 \times 52 + 2$.
Les années bissextiles ont lieu les années multiples de 4.
Partant de 2018, 18 années nous séparent de 2000. Il y a donc 18 jours de décalage. 2016, 2012, 2008 et 2004 étaient bissextiles.
Il faut ajouter 4 jours.
22 jours à retirer. $22 = 3 \times 7 + 1$ soit 3 semaines entières moins un jour : mardi

---

Correction du jour n° 4 : Les jours fériés

À rédiger !

Correction du jour n° 5 : Les bus

On peut facilement trouver les multiples communs en faisant la liste :
$42; 84; 126; 168; 210; 252; \dots$
$30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; \dots$
$35; 70; 105; 140; 175; 210; \dots$
Ou avec une démarche experte :
Comme $42 = 2 \times 3 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $35 = 5 \times 7$.
$\text{PPCM}(42, 30) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(42, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$\text{PPCM}(30, 35) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
Ils se retrouvent toutes les 210 min

Correction du jour n° 6 : Les bus — Épisode 2

En faisant la liste :
$60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 480; 540; \dots$
$45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450; 495; 540; \dots$
$54; 108; 162; 216; 270; 324; 378; 432; 486; 540; \dots$
Penser à parler de la touche $\boxed{\text{Rép}}$ de la calculatrice !
Une méthode plus experte :
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, $45 = 3 \times 3 \times 5$ et $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$\text{PPCM}(60, 45) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$
$\text{PPCM}(60, 54) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 540$
$\text{PPCM}(45, 54) = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 270$

Exercices

Exercice n° 1.1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants :
6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre.

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.
3.b En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.c Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 50 nombres parfaits (Janvier 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 1.2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations.
Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

EXERCICE N° 1.3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $M_3 = 2^3 - 1$ donc $M_3 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers. Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ^e^siècle, affirme que : « Si M_n est premier alors n est premier. »
Constatez la véracité de ce théorème en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

EXERCICE N° 1.4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1$, $F_0 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier* n *positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641. *Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

EXERCICE N° 1.5 : Quelques conjectures

Voici quelques conjectures en rapport avec les nombres entiers.
Pour chacune d'entre elle, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse en proposant soit un contre-exemple, soit une démonstration.

Affirmation n° 1 : La somme de deux nombres pairs est un nombre pair ;

Affirmation n° 2 : La somme de deux nombres impairs est un nombre impair ;

Affirmation n° 3 : Si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;

Affirmation n° 4 : Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6 ;

Affirmation n° 5 : Si un nombre est divisible par 3 et 9 alors il est divisible par 27 ;

Affirmation n° 6 : Le carré d'un nombre pair est un nombre pair ;

Affirmation n° 7 : Le carré d'un nombre impair est un nombre pair ;

Affirmation n° 8 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est un nombre pair.

✿ Devoirs maisons ✿

Devoir maison : Arithmétique — **Les Repunits**

Un **Repunit** est un nombre dont l'écriture décimale est constituée que du chiffre 1.
1, 11, 111, 11 111... 111 111 111 111 sont des Repunits.

1. Effectuer la division euclidienne en la posant de 11 par 9, de 111 par 9, de 1 111 par 9 et enfin de 11 111 par 9

2. En utilisant votre calculatrice, écrire l'égalité euclidienne qui correspond à la division par 9 des Repunits 111 111, 1 111 111, 11 111 111 et 111 111 111.

3. Que remarquez-vous ?

4. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 3 ?

5. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 9 ?

6. [WEB] – Un Repunit peut-il être premier ?

Devoir maison : Arithmétique — **La divisibilité par** 11

DEVOIR MAISON : ARITHMÉTIQUE — **Irrationalité de $\sqrt{2}$**

1. Calculer $\left(\sqrt{2}\right)^2$

2.a p un nombre entier. Que peut-on dire du nombre entier $2p$ et du nombre entier $2p+1$?
Tester avec des valeurs de p de votre choix pour justifier votre réponse.

2.b p un nombre entier. Simplifier les expressions suivantes :

— $(2p)^2$
— $(2p+1)^2$

2.c En utilisant les questions **2.a** et **2.b** dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

— **Affirmation 1 :** Le carré d'un nombre entier pair est pair ;
— **Affirmation 2 :** Le carré d'un nombre entier impair est pair.

3.a On suppose maintenant qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Démontrer que dans ce cas que $2q^2 = p^2$.

3.b En déduire que p^2 est pair. Qu'en est-il de p ?

3.c Comme p est pair on peut écrire $p = 2k$ où k est un entier. En calculant p^2 et en utilisant la question **3.a** montrer que $q^2 = 2k^2$

3.d En déduire que q et p sont tous les deux pairs.

3.e Que pensez-vous de la fraction $\dfrac{p}{q}$?
Pourquoi est-ce en contradiction avec l'hypothèse de départ de la question **3.a**

4. Qu'est-ce que ce raisonnement prouve pour le nombre $\sqrt{2}$?

Contrôle de mathématiques

EXERCICE 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(2 points)*

EXERCICE 2 : *(5 points)*

1. Décomposer les nombres 2 320, 2 349 et 203 en produit de nombres premiers.

2. Des archéologues viennent de découvrir dans les ruines du collège Vauquelin un trésor gaulois : 2 320 statères d'or, 2 349 quinaires en argent et 203 deniers en bronze. Les archéologues parviennent ensuite à se partager ses pièces de manière parfaitement équitable.
Combien sont les archéologues inventeurs de ce trésor ?

3. Combien de pièces de chaque sorte un archéologue va-t-il recevoir ?

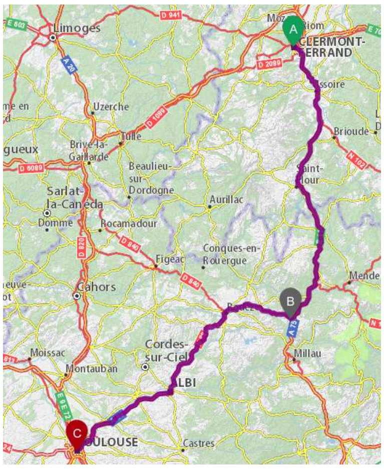
EXERCICE 3 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

EXERCICE 4 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?
Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.
Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

EXERCICE 5 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

Contrôle de mathématiques – Correction

Exercice 1 :
2 – –3 – –5 – –7 – –11 – –13 – –17 – –19 – –23 – –29 – –31 – –37 – –41 – –43 – –47

Exercice 2 :
1. Décomposer les nombres 2320, 2349 et 203 en produit de nombres premiers.

$$\begin{array}{r|l} 2320 & 2 \\ 1160 & 2 \\ 580 & 2 \\ 290 & 2 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2349 & 3 \\ 783 & 3 \\ 261 & 3 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 203 & 7 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{2320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 29}$, $\boxed{2349 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 29}$ et $\boxed{203 = 7 \times 29}$.

2. Clairement 29 est le seul diviseur commun à 2320, 2349 et 203. Il y a donc $\boxed{\text{29 archéologues}}$.

3. $2320 = 29 \times 80$, $2349 = 29 \times 81$ et $203 = 29 \times 7$

$\boxed{\text{Chacun recevra 80 statères, 81 quinaires et 7 deniers.}}$

Exercice 3 :
1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6840 & 2 \\ 3420 & 2 \\ 1710 & 2 \\ 855 & 3 \\ 285 & 3 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi $3780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $6840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 19$

2. $\dfrac{3780}{6840} = \dfrac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 19} = \dfrac{3 \times 7}{2 \times 19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 4 :
1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5538\ s$

Or $\boxed{5538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.

$150\ min = 9000\ s$

Temps	$14\,538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3\,600\ s}{14\,538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 5 :

1. $840 = 16 \times 50 + 40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.
$840 = 30 \times 28$ et $630 = 30 \times 21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.
$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
Le plus grand diviseur commun est donc $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4 \times 210$ et $630 = 210 \times 3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Contrôle de mathématiques

EXERCICE 1 : Écrire sur votre copie la liste des nombres premiers inférieurs à 50. *(3 points)*

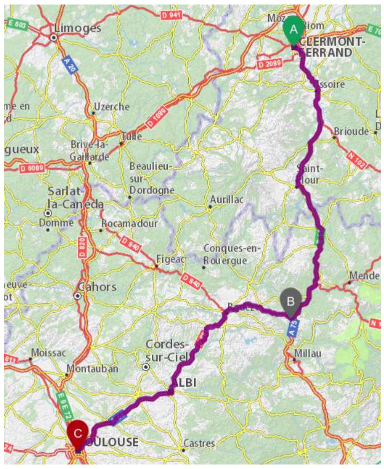
EXERCICE 2 : *(3 points)*

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,780}{6\,840}$

EXERCICE 3 : *(5 points)*

Un automobiliste fait régulièrement le trajet Clermont-Ferrand Toulouse en passant par l'autoroute jusque Séverac Le Château puis par la nationale jusque Toulouse.



1. En roulant à 130 km/h sur les 200 km d'autoroute entre Clermont-Ferrand et Séverac, combien de temps lui faut-il pour faire cette distance ?

Indiquer votre réponse à la seconde près.

2. Il lui faut ensuite 2 h 30 min pour effectuer les 200 km restants entre Séverac et Toulouse.

Quelle est sa vitesse moyenne sur cette partie du trajet ?

3. Finalement quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet Clermont-Ferrand Toulouse ?

EXERCICE 4 : *(5 points)*

Un pâtissier a reçu ce matin 840 fraises maralines et 630 framboises Glen Coe. Il souhaite préparer des tartelettes aux fraises et aux framboises toutes identiques, c'est-à-dire ayant chacune la même quantité de fraises et de framboises.

1. Peut-il faire 50 tartelettes ? Peut-il faire 30 tartelettes ?

2. Déterminer le nombre maximal de tartelettes qu'il va pouvoir préparer et indiquer combien de framboises et de fraises il devra utiliser pour chacune d'entre elle.

Toute trace de recherche même non aboutie sera valorisée !

EXERCICE 5 : *(4 points)*

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5x+3 &= 3x+5 \\ 6x-4 &= 2x+7 \\ 4x-11 &= 10-3x \\ 3-7x &= 9-4x \end{aligned}$$

Contrôle de mathématiques – Correction

Exercice 1 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47

Exercice 2 :

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 3 780 et 6 840

$$\begin{array}{r|c}
3780 & 2 \\
1890 & 2 \\
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c}
6840 & 2 \\
3420 & 2 \\
1710 & 2 \\
855 & 3 \\
285 & 3 \\
95 & 5 \\
19 & 19 \\
1 &
\end{array}$$

Ainsi $3780 = 2\times2\times3\times3\times3\times5\times7$ et $6840 = 2\times2\times2\times3\times5\times19$

2. $\dfrac{3780}{6840} = \dfrac{2\times2\times3\times3\times3\times5\times7}{2\times2\times2\times3\times3\times5\times19} = \dfrac{3\times7}{2\times19} = \dfrac{21}{38}$

Exercice 3 :

1. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$	x
Distance	$130\ km$	$200\ km$

On a $x = \dfrac{3600\ s \times 200\ km}{130\ km} \approx 5538\ s$

Comme $5538 = 60\times92+18$ et que $92 = 60\times1+32$, on a $\boxed{5538\ s = 92\ min\ 18\ s = 1\ h\ 32\ min\ 18\ s}$

2. Le temps et la distance sont proportionnels.

Temps	$2\ h\ 30\ min = 150\ min$	$60\ min$
Distance	$200\ km$	x

On a $x = \dfrac{200\ km \times 60\ min}{150\ min} = 80\ km$ soit $\boxed{80\ km/h}$

3. Le temps et la distance sont proportionnels.

$150\ min = 9000\ s$

Temps	$14538\ s$	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$
Distance	$400\ km$	x

On a $x = \dfrac{400\ km \times 3600\ s}{14538\ s} \approx 99\ km$ soit $\boxed{99\ km/h}$

Exercice 4 :

1. $840 = 16\times50+40$ donc il ne peut pas faire 50 tartes.

$840 = 30\times28$ et $630 = 30\times21$: il peut faire 30 tartes.

2. Décomposons 840 et 630 en facteurs premiers.

$840 = 2\times2\times2\times3\times5\times7$ et $630 = 2\times3\times3\times5\times7$

On peut utiliser ces décompositions pour établir la liste des diviseurs des nombres :

840 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 28 ; 30 ; 35 ; 42 ; 56 ; 70 ; 84 ; 105 ; 120 ; 140 ; 168 ; $\boxed{210}$; 280 ; 420 ; 840

630 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 15 ; 21 ; 30 ; 42 ; 63 ; 70 ; 90 ; 105 ; 126 ; $\boxed{210}$; 315 ; 630

Le plus grand diviseur commun est donc $2\times3\times5\times7 = 210$

Il peut faire 210 tartelettes et comme $840 = 4\times210$ et $630 = 210\times3$ il y aura 4 fraises et 3 framboises par tartelette.

Exercice 5 :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
5x+3 &= 3x+5\\
5x+3-3 &= 3x+5-3\\
5x &= 3x+2\\
5x-3x &= 3x+2-3x\\
2x &= 2\\
x &= \frac{2}{2}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x-4 &= 2x+7\\
6x-4+4 &= 2x+7+4\\
6x &= 2x+11\\
6x-2x &= 2x+11-2x\\
4x &= 11\\
x &= \frac{11}{4}\\
x &= 2,75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x-11 &= 10-3x\\
4x-11+11 &= 10-3x+11\\
4x+3x &= 21-3x+3x\\
7x &= 21\\
x &= \frac{21}{3}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3-7x &= 9-4x\\
3-7x-3 &= 9-4x-3\\
-7x &= 6-4x\\
-7x+4x &= 6-4x+4x\\
-3x &= 6\\
x &= \frac{6}{-3}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

Évaluation

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1
Le SCMaglev est un train japonais. Il a parcouru en 2015 les 240 km séparant Tokyo de Nagoya en 42 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2
En 2004, le colombien Juan Pablo Montoya, pilote de Formule 1, a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 262 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3
Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le lièvre commun d'Europe peut se déplacer à 18 m/s.
Qui est le plus rapide des deux?

Évaluation

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1
Le TransRapid est un train chinois. Il a parcouru en 2004 370 km en 38 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2
En 2005, le sud africain Alan Van Der Merwe, pilote de Formule 1, a parcouru $3,2$ km à la vitesse moyenne de 397 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3
Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Un rhinocéros peut se déplacer à la vitesse de 15 m/s.
Qui est le plus rapide des deux?

Évaluation

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1
Le TGV est un train français. Il a parcouru en 2015 la distance de 325 km en 34 min.
Calculer sa vitesse moyenne exprimée en km/h. *On arrondira à l'unité près.*

Exercice 2
En 2008, le colombien Juan Pablo Montoya a parcouru les $5,7$ km du circuit de Monza en Italie à la vitesse moyenne de 256 km/h.
Combien de temps a-t-il mit pour parcourir cette distance? *On arrondira à la seconde près.*

Exercice 3
Usain Bolt, l'homme le plus rapide au monde sur 100 m, a atteint la vitesse de $37,58$ km/h.
Le chat commun peut se déplacer à 13 m/s.
Qui est le plus rapide des deux?

Évaluation — Correction

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$42\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$240\ km$	$\frac{240\ km \times 60\ min}{42\ min} \approx 343\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{343\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\frac{5,7\ km \times 3\,600\ s}{262\ km} \approx 78\ s$
Distance	$262\ km$	$5,7\ km$

Il a mis $\boxed{78\ s = 1\ min\ 18\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37\,580\ m$ et $1\ h = 3\,600\ s$.
Comme $\frac{37\,580\ m}{3\,600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le lièvre !

$18\ m \times 3\,600 = 64\,800\ m = 64,8\ km$
Le lièvre se déplace à $64,8\ km/h$.
Le lièvre est plus rapide qu'Usain Bolt !

Évaluation — Correction

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Exercice 1

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$38\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$370\ km$	$\frac{370\ km \times 60\ min}{38\ min} \approx 584\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{584\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3\,600\ s$	$\frac{3,2\ km \times 3\,600\ s}{397\ km} \approx 29\ s$
Distance	$397\ km$	$3,2\ km$

Il a mis $\boxed{29s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37580\ m$ et $1\ h = 3600\ s$.
Comme $\dfrac{37580\ m}{3600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le rhinocéros !

$15\ m \times 3600 = 54000\ m = 54\ km$
Le rhinocéros se déplace à $54\ km/h$.
Le rhinocéros est plus rapide qu'Usain Bolt !

Évaluation — Correction

Résoudre chacun des exercices en justifiant votre réponse

Pour calculer la vitesse moyenne, on considère que la distance et le temps de parcours sont proportionnels.

Temps	$34\ min$	$1\ h = 60\ min$
Distance	$325\ km$	$\dfrac{325\ km \times 60\ min}{34\ min} \approx 574\ km$

La vitesse moyenne de ce train est d'environ $\boxed{574\ km/h}$

Exercice 2

Temps	$1\ h = 60\ min = 3600\ s$	$\dfrac{5,7\ km \times 3600\ s}{256\ km} \approx 80\ s$
Distance	$256\ km$	$5,7\ km$

Il a mis $\boxed{80\ s = 1\ min\ 20\ s}$

Exercice 3

On peut passer en mètres par seconde ou en kilomètre par heure.
$37,58\ km = 37580\ m$ et $1\ h = 3600\ s$.
Comme $\dfrac{37580\ m}{3600} \approx 10,4\ m$.
La vitesse d'Usain Bolt est d'environ $10,4\ m/s$, il est plus lent que le chat !

$13\ m \times 3600 = 46800\ m = 46,8\ km$
Le chat se déplace à $46,8\ km/h$.
Le chat est plus rapide qu'Usain Bolt !

❃ VOCABULAIRE ❃

VOCABULAIRE :

✧ **Décomposition en facteurs premiers :** Tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

✧ **Diviseur :** Un des nombres entiers obtenu dans la division euclidienne. Un diviseur d'un nombre entier est tel que le reste de la division euclidienne vaut zéro.

✧ **Divisible :** Un nombre est divisible par un autre quand le reste de la division euclidienne vaut zéro.

✧ **Division euclidienne :** C'est la division entière habituelle. On divise le dividende par le diviseur et on obtient un quotient et un reste.

✧ **Fraction irréductible :** Une fraction qui ne peut pas se simplifier, dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun.

✧ **Multiple :** Un nombre est multiple d'un autre s'il se trouve dans la table de multiplication de l'autre.

✧ **Nombre premier :** Un nombre entier est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

✧ **Quotient :** Un des nombres entiers obtenu dans la division euclidienne.

✧ **Reste :** Un des nombres entiers obtenu dans la division euclidienne.

Notes

[1]Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper-Green. Il a été repris par Ian Stewart qui a décrit les règles dans Pour la science de juillet 1997. Voir aussi le bulletin vert de l'APMEP n° 427. La plus longue suite que j'ai obtenue pour $n = 100$ contient 35 termes, la voici :

20 – 40 – 80 – 16 – 32 – 64 – 1 – 2 – 6 – 3 – 9 – 18 – 36 – 72 – 24 – 48 – 96 – 12 – 60 – 30 – 90 – 15 – 45 – 5 – 25 – 50 – 100 – 10 – 70 – 7 – 14 – 42 – 84 – 21 – 63

[2]En effet pour tout nombre entier positif a on a $a = 0 \times k + a$ où k est un entier positif $0 \leqslant k < a$.

Or $a \geqslant 0$ et en tant que reste de cette division il doit aussi vérifier $a < 0$.

Ces deux conditions sont incompatibles !

[3]Le plus grand nombre premier connu au 7 décembre 2018 est $2^{82\,589\,933} - 1$: il comporte 24 millions de chiffres en écriture décimale.

[4]1 est égal au produit vide : c'est le résultat du produit d'aucun nombre. On peut ainsi étendre le théorème fondamental de l'arithmétique au nombre 1.