SITUATION INITIALE : Le jeu de Juniper-Green

Mode « bataille »

RÈGLE DU JEU :

— Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 100;

— Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :

- Ce nombre n'a pas encore été choisi dans cette partie;
- Ce nombre est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.

— Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

Faire quelques parties avec votre voisin en notant à chaque fois en ligne les nombres entiers successifs choisis.

Mode « collaboratif »

RÈGLE DU JEU :

— Vous utilisez les mêmes règles que pour le mode « bataille »;

— Vous devez trouver la plus longue succession de nombres entiers qui correspond à une partie de Juniper-Green.

[1]

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

DÉFINITION 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geqslant b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

— $a = b \times q + r$

— $0 \leqslant r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b.

REMARQUE :

Le diviseur ne peut pas être égal à 0![2]

VOCABULAIRE :

L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne** .

EXEMPLES :

$2019 = 31 \times 65 + 4$

2019 est le dividende, 31 le diviseur,

65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.

Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième!

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ \cline{2-2} 159 & 65 \\ 4 & \\ & \end{array}$$

$2019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

DÉFINITION 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que
- a est un **multiple** de b,
- b est un **diviseur** de a,
- a est **divisible** par b

EXEMPLE :

3 est un diviseur de 2019.
673 est un diviseur de 2019.
2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.
2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ 1.1 : Quelques critères de divisibilité (Démontrée à l'oral et en exercice)

Un nombre entier est divisible par :
- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

REMARQUE :

On peut mélanger ces critères :
- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

DÉMONSTRATION :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.
$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.
On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,712$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1) + 7(99+1) + 1(9+1) + 2$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 2$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 2$
Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2 + 7 + 1 + 2 = 3 \times 4$
$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.
On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 **:**

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,020$.
$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.
On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.
Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.
Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.
$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.
On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.
Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 **:**

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8\,765$.
$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.
On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 5

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,718$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999+1) + 7(99+1) + 1(9+1) + 8$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 8$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 8$
Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2 + 7 + 1 + 8 = 9 \times 2$
$a = 2 \times 9 \times 111 + 7 \times 9 \times 11 + 1 \times 9 + 9 \times 2$.
On peut factoriser 9, $a = 9(2 \times 111 + 7 \times 11 + 1 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD