$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ \cline{2-2} 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$2019 = 3 \times 673$

2 Diviseurs et multiples

DÉFINITION 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que
— a est un **multiple** de b,
— b est un **diviseur** de a,
— a est **divisible** par b

EXEMPLE :

3 est un diviseur de 2019.
673 est un diviseur de 2019.
2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.
2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ 1.1 : Quelques critères de divisibilité (Démontrée à l'oral et en exercice)

Un nombre entier est divisible par :
— 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
— 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
— 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
— 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
— 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

REMARQUE :

On peut mélanger ces critères :
— un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;
— un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

DÉMONSTRATION :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.
$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.
On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,712$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 2$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 2$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 2$
Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2 + 7 + 1 + 2 = 3 \times 4$
$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.
On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 **:**

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,020$.
$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.
On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.
Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.
Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.
$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.
On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.
Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 **:**

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8\,765$.
$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.
On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$
Ce qui prouve que a est un multiple de 5

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 **:**

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2\,718$.
$a = 2 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$
$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 8$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 8$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 8$
Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.
On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2 + 7 + 1 + 8 = 9 \times 2$
$a = 2 \times 9 \times 111 + 7 \times 9 \times 11 + 1 \times 9 + 9 \times 2$.
On peut factoriser 9, $a = 9(2 \times 111 + 7 \times 11 + 1 + 4)$
Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD