$3\,780 = 2 \times 1\,890$

$1\,890 = 2 \times 945$

$945 = 3 \times 315$

$315 = 3 \times 105$

$105 = 3 \times 35$

$35 = 5 \times 7$

Ainsi $3\,780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

On peut aussi présenter les calculs ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 3\,780 & 2 \\ 1\,890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

III — Applications

1 Fractions irréductibles

DÉFINITION 1.4 : Fraction irréductible

a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$

La fraction $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si 1 est le seul diviseur commun de a et b.

Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

EXEMPLE :

$\dfrac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

$\dfrac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.

D'ailleurs $\dfrac{76}{64} = \dfrac{2 \times 38}{2 \times 32} = \dfrac{38}{32} = \dfrac{2 \times 19}{2 \times 16} = \dfrac{19}{16}$

La fraction $\dfrac{19}{16}$ est irréductible.

MÉTHODE 1 . 2 : Simplifier une fraction en une fraction irréductible

Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1\,260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

2 Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

MÉTHODE 1 . 3 : Déterminer les diviseurs d'un nombre entier
Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers. Voici ses diviseurs :

Aucun facteur premier : 1

Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;

Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$

Trois facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$

Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

On vient de trouver 21 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630

MÉTHODE 1 . 4 : Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Les facteurs premiers communs sont : 2, 3, 3 et 5

Les combinaisons possibles sont : 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Il y a donc 11 diviseurs communs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90.

90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.
