

I — Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1 La division euclidienne

📌 DÉFINITION 1.1 : La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geq b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

- $a = b \times q + r$
- $0 \leq r < b$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la **division euclidienne** du **dividende** a par le **diviseur** b .

REMARQUE :

ℤ Le diviseur ne peut pas être égal à 0! ²

VOCABULAIRE :

L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle **l'égalité euclidienne**.

EXEMPLES :

$$2019 = 31 \times 65 + 4$$

2019 est le dividende, 31 le diviseur,

65 le quotient et 4 le reste. On constate que $4 < 65$.

Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième!

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 31 \\ 159 & 65 \\ 4 & \end{array}$$

$$2019 = 3 \times 673$$

2 Diviseurs et multiples

📌 DÉFINITION 1.2 : Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.

On dit alors que

- a est un **multiple** de b ,
- b est un **diviseur** de a ,
- a est **divisible** par b

EXEMPLE :

3 est un diviseur de 2019.

673 est un diviseur de 2019.

2019 est un multiple de 3 et un multiple de 673.

2019 est divisible par 3 et divisible par 673.

3 Les critères de divisibilité

🌀 PROPRIÉTÉ 1.1 : Quelques critères de divisibilité

(Démontrée à l'oral et en exercice)

Un nombre entier est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8;
- 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4;
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5;
- 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

REMARQUE

On peut mélanger ces critères :

- un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2;
- un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

🌀 DÉMONSTRATION :

Divisibilité par 2 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Sur un exemple générique, prenons $a = 216$.

$a = 210 + 6$, $a = 21 \times 10 + 6$ donc $a = 10 \times 21 + 6$ et $a = 2 \times 5 \times 21 + 2 \times 3$.

On peut factoriser 2, $a = 2(5 \times 21 + 3)$

Ce qui prouve que a est un multiple de 2.

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 2d$ car c vaut 0, 2, 4, 6 ou 8.

Ainsi $a = 10b + 2d$ on peut factoriser 2 pour obtenir $a = 2(5b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 2.

Divisibilité par 3 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2712$.

$a = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$

$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 2$ donc $a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 2$ ou encore $a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 2$

Comme $999 = 3 \times 333$, $99 = 3 \times 33$ et $9 = 3 \times 3$.

On sait que la somme des chiffres est un multiple de 3, en effet, $2 + 7 + 1 + 2 = 3 \times 4$

$a = 2 \times 3 \times 333 + 7 \times 3 \times 33 + 1 \times 3 \times 3 + 3 \times 4$.

On peut factoriser 3, $a = 3(2 \times 333 + 7 \times 33 + 1 \times 3 + 4)$

Finalement a est bien un multiple de 3.

Divisibilité par 4 :

a un nombre dont la somme des chiffres de dizaines et des unités forment un multiple de 4.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2020$.

$a = 20 \times 100 + 20$. Comme $100 = 25 \times 4$, $a = 20 \times 4 \times 25 + 4 \times 5$.

On peut factoriser 4 et $a = 4(20 \times 25 + 5)$.

Cela prouve que a est un multiple de 4.

Dans le cas général, si $a < 100$ la propriété est évidente.

Sinon $a = b \times 100 + c$ où b est un entier et c un multiple de 4 c'est-à-dire que $c = 4d$ où d est un entier.

$a = b \times 100 + 4d$ et $a = b \times 4 \times 25 + 4d$.

On peut factoriser 4 : $a = 4(b \times 25 + d)$.

Ce qui prouve que a est un multiple de 4.

Divisibilité par 5 :

a un nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5.

Sur un exemple générique, prenons $a = 8765$.

$a = 8760 + 5$, $a = 876 \times 10 + 5$ donc $a = 2 \times 5 \times 876 + 5 \times 1$.

On factorise 5, $a = 5(2 \times 876 + 1)$

Ce qui prouve que a est un multiple de 5