

Plus généralement, $a = 10 \times b + c$ où b est un entier et $c = 5d$ car c vaut 0 ou 5.
Ainsi $a = 10b + 5d$ on peut factoriser 5 pour obtenir $a = 5(2b + d)$ ce qui prouve que a est divisible par 5.

Divisibilité par 9 :

a un nombre dont la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Sur un exemple générique, prenons $a = 2718$.

$$a = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$$

$$a = 2(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 8 \text{ donc } a = 2 \times 999 + 2 + 7 \times 99 + 7 + 1 \times 9 + 1 + 8 \text{ ou encore } a = 2 \times 999 + 7 \times 99 + 1 \times 9 + 2 + 7 + 1 + 8$$

Comme $999 = 9 \times 111$, $99 = 9 \times 11$ et $9 = 9 \times 1$.

On sait que la somme des chiffres est un multiple de 9, en effet, $2 + 7 + 1 + 8 = 9 \times 2$

$$a = 2 \times 9 \times 111 + 7 \times 9 \times 11 + 1 \times 9 + 9 \times 2.$$

On peut factoriser 9, $a = 9(2 \times 111 + 7 \times 11 + 1 + 4)$

Finalement a est bien un multiple de 9.

CQFD

II — Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

1 Les nombres premiers

📌 DÉFINITION 1.3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède **exactement** deux diviseurs.

📌 PROPRIÉTÉ 1.2 :

Si nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

📌 DÉMONSTRATION :

a un nombre entier.

$$a = 1 \times a \text{ donc } a \text{ est divisible par } 1 \text{ et } a \text{ est divisible par } a.$$

1 et a sont deux diviseurs de a .

Si a est un nombre premier alors il possède exactement deux diviseurs : ce sont forcément 1 et a .

CQFD

\mathbb{Z} 1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même! **EXEMPLES :**

Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 :³

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

2 Décomposition en facteurs premiers

📌 THÉORÈME 1.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique

(Admis)

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.⁴

EXEMPLES :

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$$