✿ EXERCICES À RÉDIGER À LA MAISON ✿

Ce travail est à rédiger sur une copie double. Toutes traces de recherche sera valorisée !

EXERCICE Nº 1 : **Les nombres parfaits**

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants : 6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que remarquez-vous pour 6 et 28 ?

On dit que les nombres 6 **et** 28 **sont parfaits.**

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers. En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.b Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 51 *nombres parfaits (Décembre 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !*
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

EXERCICE Nº 3 : **Les nombres de Mersenne**

1. Les nombres de Mersenne sont de la forme $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif. Par exemple $\mathrm{M}_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \ldots, \mathrm{M}_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers.
Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ᵉsiècle, affirme que :

« Si M_n est premier alors n est premier. »

Vérifiez que ce théorème semble être vrai en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $\mathrm{M}_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

DEVOIR MAISON : ARITHMÉTIQUE — **Les Repunits**

Un **Repunit** est un nombre dont l'écriture décimale est constituée que du chiffre 1.
1, 11, 111, 11 111... 111 111 111 111 sont des Repunits.

1. Effectuer la division euclidienne en la posant de 11 par 9, de 111 par 9, de 1 111 par 9 et enfin de 11 111 par 9

2. En utilisant votre calculatrice, écrire l'égalité euclidienne qui correspond à la division par 9 des Repunits 111 111, 1 111 111, 11 111 111 et 111 111 111.

3. Que remarquez-vous ?

4. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 3 ?

5. Quels sont les Repunits inférieurs à 10^{18} qui sont divisibles par 9 ?

6. [WEB] – Un Repunit peut-il être premier ?

DEVOIR MAISON : ARITHMÉTIQUE — **La divisibilité par** 11

EXERCI
1. Décor
2. Pour 2
On dit q
3. En vo
Les nomb
nombres
220 *et* 28

EXERCI
1. Les no
Calculer
2. Vérifi
3. Effect
En 1670,
partie de
641. *Aujo*
autre nom

DEVOIR MAISON : ARITHMÉTIQUE — **Irrationalité de $\sqrt{2}$**

1. Calculer $\left(\sqrt{2}\right)^2$

2.a p un nombre entier. Que peut-on dire du nombre entier $2p$ et du nombre entier $2p+1$?
Tester avec des valeurs de p de votre choix pour justifier votre réponse.

2.b p un nombre entier. Simplifier les expressions suivantes :

— $(2p)^2$

— $(2p+1)^2$

2.c En utilisant les questions **2.a** et **2.b** dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

— **Affirmation 1 :** Le carré d'un nombre entier pair est pair ;

— **Affirmation 2 :** Le carré d'un nombre entier impair est pair.

3.a On suppose maintenant qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Démontrer que dans ce cas que $2q^2 = p^2$.

3.b En déduire que p^2 est pair. Qu'en est-il de p ?

3.c Comme p est pair on peut écrire $p = 2k$ où k est un entier. En calculant p^2 et en utilisant la question **3.a** montrer que $q^2 = 2k^2$

3.d En déduire que q et p sont tous les deux pairs.

3.e Que pensez-vous de la fraction $\dfrac{p}{q}$?
Pourquoi est-ce en contradiction avec l'hypothèse de départ de la question **3.a**

4. Qu'est-ce que ce raisonnement prouve pour le nombre $\sqrt{2}$?