Exercices

Exercice n° 1.1 : Les nombres parfaits

1. Faire la liste des diviseurs des nombres suivants :
6 — 10 — 12 — 28 — 60 — 64

2. Pour chacun des nombres précédent faire la somme des diviseurs différents du nombre.

On dit que les nombres 6 et 28 sont parfaits.

3.a Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.
3.b En déduire la liste des diviseurs de 496.
3.c Montrer que 496 est parfait.

4. Faire le même travail avec le nombre 8 128

On connaît pour l'instant 50 nombres parfaits (Janvier 2018). Aucun n'est impair. On ne sait pas s'il en existe !
En voici quelques-uns : 6 – 28 – 496 – 8 128 – 33 550 336 – 8 589 869 056 – 137 438 691 328

Exercice n° 1.2 : Les nombres amicaux

1. Décomposer 220 et 284 en produit de facteurs premiers.

2. Pour 220 et 284 faire la somme des diviseurs différents du nombre. Que constatez-vous ?

On dit que 220 et 284 sont amicaux.

3. En vous inspirant de la méthode des questions **1.** et **2.**, montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Les nombres amicaux sont réputés pour porter bonheur en amitié ou en amour dans de nombreuses civilisations.
Ces couples de nombres sont assez nombreux. En voici quelques-uns :
220 et 284 — 1 184 et 1 210 – 2 620 et 2 924 – 5 020 et 5 564 – 6 232 et 6 368

Exercice n° 1.3 : Les nombres de Mersenne

1. Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $M_3 = 2^3 - 1$ donc $M_3 = 8 - 1 = 7$
Calculer les nombres de Mersenne : $M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$

2. Décomposer les onze nombres de Mersenne précédents en produit de nombres premiers. Lesquels de ces nombres de Mersenne sont premiers ?

3. Un théorème de Marin Mersenne, moine mathématiciens du XVIII ^e^siècle, affirme que : « Si M_n est premier alors n est premier. »
Constatez la véracité de ce théorème en observant les onze nombres de Mersenne de la question **1.**

4. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que pouvez-vous en déduire en relisant la question **3.** ?

Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne. Il s'agit de $M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$. *Ce nombre écrit en base 10 comporte* 24 862 048 *chiffres ! Il a été découvert en décembre 2018 par le Great Internet Prime Search. Ce projet de calcul partagé est accessible à tous et propose des primes financières importante en cas de découverte de grands nombres premiers.*

Exercice n° 1.4 : Les nombres de Fermat

1. Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier positif.
Par exemple $F_0 = 2^{2^0} + 1$, $F_0 = 2^1 + 1 = 3$.
Calculer les nombres de Fermat : F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2. Vérifier à la calculatrice que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

3. Effectuer $641 \times 6\,700\,417$. Que pouvez-vous en déduire pour F_5 ?

En 1670, Pierre de Fermat fait la conjecture que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ *sont premiers pour tout entier n positif. Cela fait partie des 47 conjectures publiées par son fils après la mort de Fermat. En 1732, Leonhard Euler montre que* F_5 *est divisible par* 641. *Aujourd'hui encore on ne connaît que* 5 *nombres de Fermat premiers. D'après Boklan et Conway en 2016, la probabilité qu'un autre nombre de Fermat soit premier est inférieure à une chance sur un milliard. C'est la seule conjecture erronée de Fermat.*

Exercice n° 1.5 : Quelques conjectures

Voici quelques conjectures en rapport avec les nombres entiers.
Pour chacune d'entre elle, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse en proposant soit un contre-exemple, soit une démonstration.

Affirmation n° 1 : La somme de deux nombres pairs est un nombre pair ;

Affirmation n° 2 : La somme de deux nombres impairs est un nombre impair ;

Affirmation n° 3 : Si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;

Affirmation n° 4 : Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6 ;

Affirmation n° 5 : Si un nombre est divisible par 3 et 9 alors il est divisible par 27 ;

Affirmation n° 6 : Le carré d'un nombre pair est un nombre pair ;

Affirmation n° 7 : Le carré d'un nombre impair est un nombre pair ;

Affirmation n° 8 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est un nombre pair.