Arithmétique

La division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$,
Alors il existe un unique couple de nombres entiers naturels q et r tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne**.

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,1 & 1\,5 \\ \cline{2-2} 5\,2 & 1\,3\,4 \\ 7\,1 & \\ 1\,1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,2 & 5\,6 \\ \cline{2-2} 3\,4\,2 & 3\,6 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,1 & 4\,3 \\ \cline{2-2} 3\,0\,1 & 4\,7 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,2 & 6 \\ \cline{2-2} 2\,2 & 3\,3\,7 \\ 4\,2 & \\ 0 & \end{array}$$

$2021 = 15 \times 134 + 11$ $\qquad$ $2022 = 56 \times 36 + 6$ $\qquad$ $2021 = 43 \times 47$ $\qquad$ $2022 = 6 \times 337$

Remarques : un nombre entier est toujours divisible par 1 et par lui-même.

Vocabulaire

Quand le reste de la **division euclidienne** est nul, par exemple quand on divise 2021 par 43, on dit que 2021 est un **multiple** de 43 ou que 2021 est **divisible** par 43 ou encore que 43 est un **diviseur** de 2021.

Exemples :

Un **nombre entier pair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut zéro.
Ainsi tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2 \times n$ où n est un entier naturel.

Un **nombre entier impair** est un nombre dont le reste dans la division euclidienne par 2 vaut un.
Ainsi tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2 \times n + 1$ où n est un entier naturel.

Critères de divisibilité

- Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un entier est divisible par **4** si le nombre formé par le chiffre de ses dizaines et celui de ses unités est un multiple de 4.
- Un entier est divisible par **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Nombres premiers

Un nombre entier est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs.
Un nombre entier est **premier** s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même !

Exemple : voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 91 ; 97

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples : $2021 = 43 \times 47$; $2022 = 2 \times 3 \times 337$; $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Fraction irréductible

Une **fraction est irréductible** si elle n'est pas simplifiable. Cela signifie que 1 est le seul diviseur commun à son numérateur et son dénominateur.

Applications :

$$\begin{array}{c|c} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ $\qquad$ $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Ainsi $2 \times 2 = 4$ est un diviseur de 360 ; $3 \times 3 \times 5 = 45$ est un diviseur de 540 ...

$\dfrac{360}{540} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} = \dfrac{2}{3}$. On a simplifié par $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$.

90 est le plus grand diviseur commun à 360 et 540. On a $360 = 4 \times 90$ et $540 = 6 \times 90$.

Si nous avons à notre disposition 360 fleurs rouges et 540 fleurs jaunes, nous pouvons au maximum réaliser 90 bouquets tous identiques composés chacun de 4 fleurs rouges et 6 fleurs jaunes.

Notes

[1]Le jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école Juniper-Green. Il a été repris par Ian Stewart qui a décrit les règles dans Pour la science de juillet 1997. Voir aussi le bulletin vert de l'APMEP n° 427. La plus longue suite que j'ai obtenue pour $n = 100$ contient 35 termes, la voici :

20 – 40 – 80 – 16 – 32 – 64 – 1 – 2 – 6 – 3 – 9 – 18 – 36 – 72 – 24 – 48 – 96 – 12 – 60 – 30 – 90 – 15 – 45 – 5 – 25 – 50 – 100 – 10 – 70 – 7 – 14 – 42 – 84 – 21 – 63

[2]En effet pour tout nombre entier positif a on a $a = 0 \times k + a$ où k est un entier positif $0 \leqslant k < a$.

Or $a \geqslant 0$ et en tant que reste de cette division il doit aussi vérifier $a < 0$.

Ces deux conditions sont incompatibles !

[3]Le plus grand nombre premier connu au 7 décembre 2018 est $2^{82\,589\,933} - 1$: il comporte 24 millions de chiffres en écriture décimale.

[4]1 est égal au produit vide : c'est le résultat du produit d'aucun nombre. On peut ainsi étendre le théorème fondamental de l'arithmétique au nombre 1.