

§ SITUATION INITIALE : Un programme de calcul pour les nombres premiers ?

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier;
- Le multiplier par lui-même;
- Ajouter 41;
- Soustraire le nombre de départ.

1. Montrer qu'en choisissant 3 comme nombre de départ on obtient 47.
2. Calculer les nombres obtenus par ce programme de calcul en choisissant successivement : 1, 5 et 10 comme nombre de départ.
3. En utilisant la fonction **Tableau** de votre calculatrice compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$																

4. Utiliser la fonction **Décomp** de la calculatrice pour vérifier que $f(n)$ est premier pour $0 \leq n \leq 15$.
5. Quelle conjecture peut-on faire sur ces 16 nombres entiers ?
6. Calculer $f(39)$ et $f(40)$ et décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers en vous aidant de la touche **Décomp** de la calculatrice.

Leonhard Euler (1707–1783), mathématicien suisse, a découvert cette fonction en 1772. Elle donne 40 nombres premiers pour les valeurs de n entières comprises entre 0 et 39.

En 1752, Christian Goldbach démontra qu'il n'existait aucun polynôme à coefficient entier permettant d'obtenir des nombres premiers pour tous les nombres entiers. Adrien-Marie Legendre au début du XIX^e siècle montra ce résultat avec des coefficients fractionnaires. En 2000, Jones, Sato, Wada et Wiens découvrirent un polynôme de degré 25 à 26 variables dont les images des nombres entiers positifs sont exactement les nombres premiers.