

CHAPITRE III



Le théorème de Thalès

T^{OUS} le reste

Plan du cours :

a

Programme (BO n° 30 du 26-7-2018) :

— a

Compétences :

— a

SITUATION INITIALE : La tour Eiffel

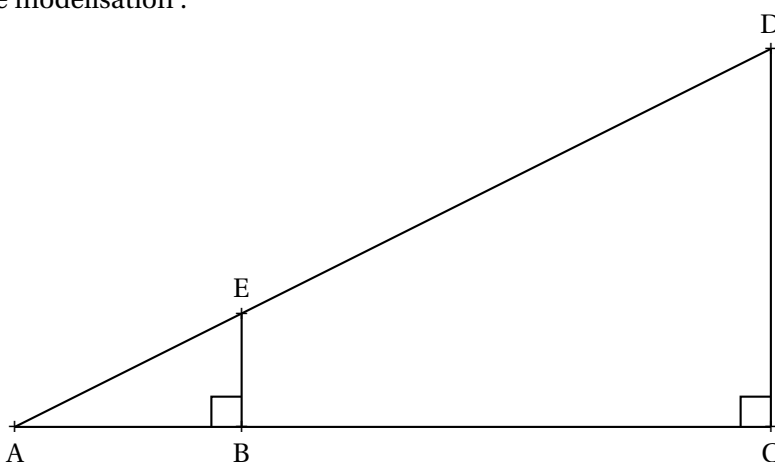


À quelle distance de la Tour Eiffel cette photo a-t-elle été prise ?

1. On estime les grandeurs de cette situation :

- La Tour Eiffel mesure 324 m ;
- l'ouverture entre les doigts mesure 18 cm ;
- le téléphone prenant la photo se situe à 80 cm de la main.

Voici une proposition de modélisation :



Compléter cette figure avec les grandeurs estimées.

On cherche à évaluer la grandeur BC. On pose $BC = x$

2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles ABE, ACD et du quadrilatère BCDE.

3. Montrer que x est la solution de l'équation :

$$162(0,8 + x) = 0,072 + 162,09x$$

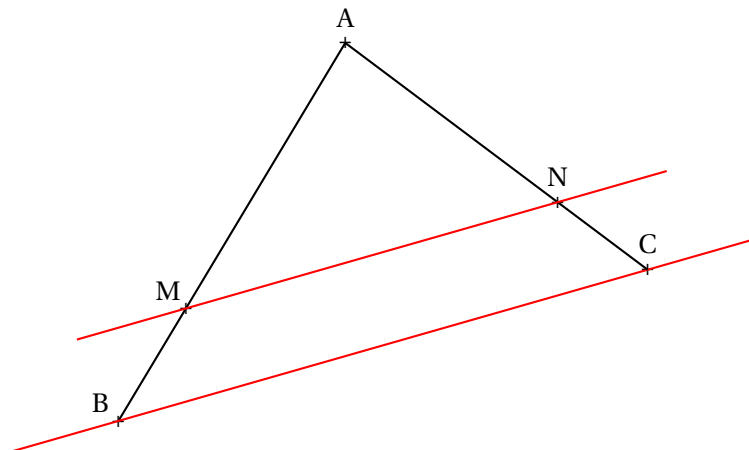
4. Résoudre cette équation et en déduire AC

5. Calculer AE et AD.

6. Montrer que les mesures du triangle ABE sont proportionnelles à celles du triangle ACD.

I — Le théorème de Thalès – Version triangle

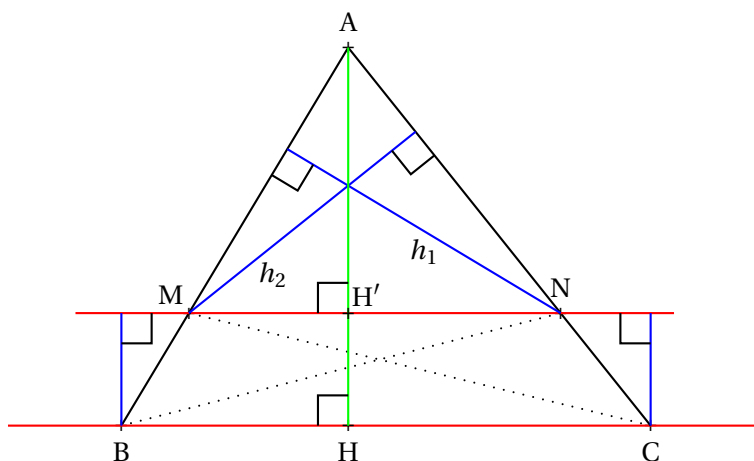
THÉORÈME 3.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

DÉMONSTRATION :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.

$$\mathcal{A}(\text{MNB}) = \mathcal{A}(\text{MNC})$$

$$\mathcal{A}(\text{AMN}) = AM \times h_1 \text{ et } \mathcal{A}(\text{ABN}) = AB \times h_1 \text{ ainsi } \frac{\mathcal{A}(\text{AMN})}{\mathcal{A}(\text{ABN})} = \frac{AM}{AB}$$

$$\mathcal{A}(\text{AMN}) = AN \times h_2 \text{ et } \mathcal{A}(\text{ACM}) = AC \times h_2 \text{ ainsi } \frac{\mathcal{A}(\text{AMN})}{\mathcal{A}(\text{ACM})} = \frac{AN}{AC}$$

On constate que $\mathcal{A}(\text{ABN}) = \mathcal{A}(\text{AMN}) + \mathcal{A}(\text{MNB})$ et que $\mathcal{A}(\text{ACM}) = \mathcal{A}(\text{AMN}) + \mathcal{A}(\text{MNC})$
Comme $\mathcal{A}(\text{MNB}) = \mathcal{A}(\text{MNC})$ on prouve ainsi que $\mathcal{A}(\text{ABN}) = \mathcal{A}(\text{ACM})$

Finalemment $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\frac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.

On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\frac{AM}{AB} = \frac{AH'}{AH}$

De même dans le triangle AHC, on obtient $\frac{AN}{AC} = \frac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH'C et NH'H ont la même base et la même hauteur donc $\mathcal{A}(\text{NH}'C) = \mathcal{A}(\text{NH}'H)$

Ainsi $\mathcal{A}(\text{NH}'C) = \mathcal{A}(\text{NH}'H)$ c'est-à-dire $\frac{AH' \times HC}{2} = \frac{AH' \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH' \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\frac{AH'}{AH} = \frac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\frac{AH'}{AH} = \frac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$

$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$

$$MN \times HC = H'N \times BC$$

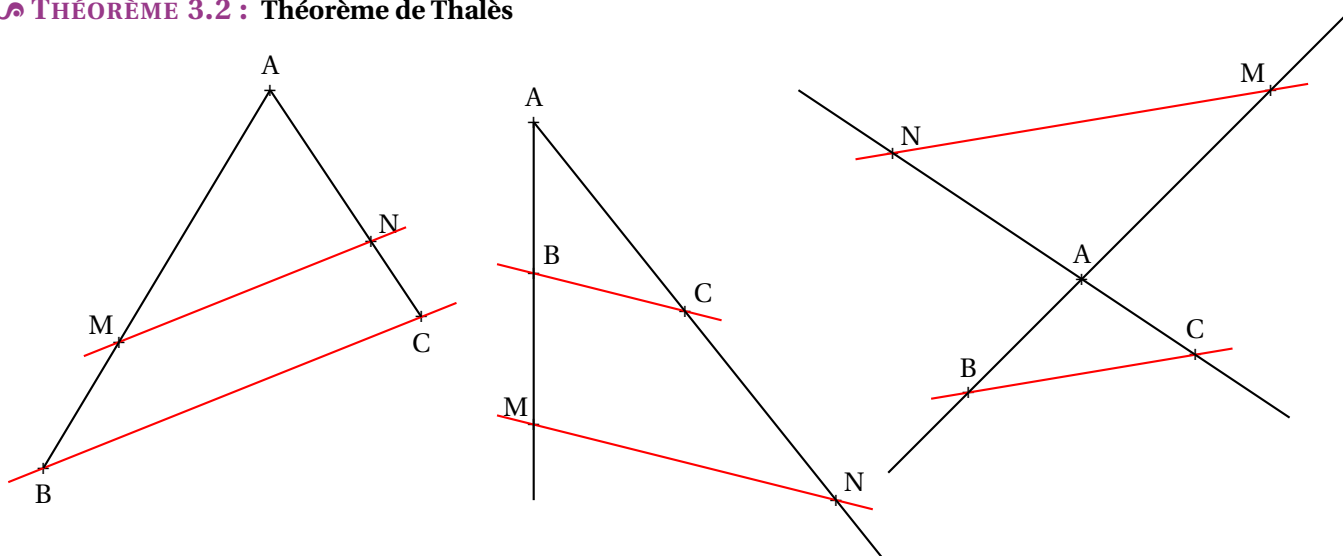
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\frac{MN}{BC} = \frac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

CQFD

II — Le théorème de Thalès – Version générale

🌀 THÉORÈME 3.2 : Théorème de Thalès



Si deux droites (MB) et (NC) sont sécantes en A et $(MN) \parallel (BC)$
 alors les mesures des triangles AMN et ABC sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

🌀 DÉMONSTRATION :

Il y a trois possibilités liées à l'ordre des points :

Premier cas : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$

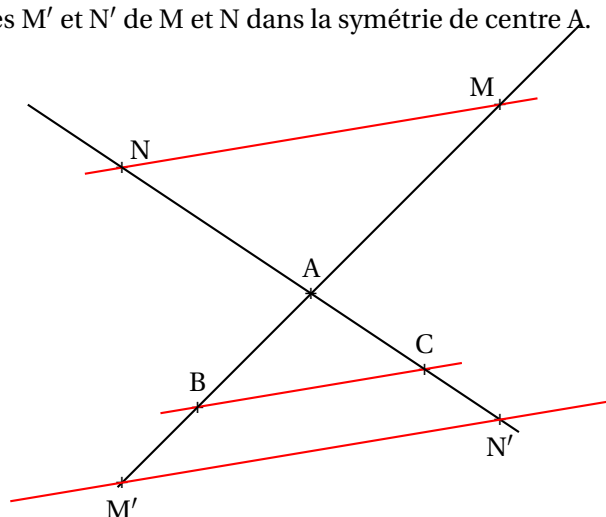
Il s'agit de la situation étudiée en première partie, on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Second cas : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$

Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AMN. Comme $(BC) \parallel (MN)$ on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$
 Comme ces trois quotients sont égaux, leurs inverses le sont aussi. D'où le résultat.

Troisième cas : $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ mais $M \notin [AB]$ et $N \notin [AC]$

Considérons les symétriques M' et N' de M et N dans la symétrie de centre A.



$MNN'M'$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu par construction, il s'agit donc d'un parallélogramme.

Nous avons donc $MN = M'N'$ et $(MN) \parallel (M'N')$.

Or $(MN) \parallel (BC)$. On sait que si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles. Ainsi $(M'N') \parallel (BC)$.

Comme dorénavant $M' \in [AB)$ et $N' \in [AC)$ on peut appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$

Et comme $M'N' = MN$, $AM' = AM$ et $AN' = AN$ on obtient le résultat attendu.

CQFD

III — La réciproque et la contraposée du théorème de Thalès

IV — Application aux triangles semblables

📌 DÉFINITION 3.1 :

Triangles semblables

On dit que deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels.

📌 PROPRIÉTÉ 3.1 : Agrandissement ou réduction

(Admise)

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe un nombre positif non nul k tel que $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$

k est un coefficient d'agrandissement/réduction.

Si $0 < k < 1$ alors $A'B'C'$ est une réduction du triangle ABC .

Si $k > 1$ alors $A'B'C'$ est un agrandissement du triangle ABC .

Si $k = 1$ alors ABC et $A'B'C'$ sont des triangles égaux.

📌 DÉMONSTRATION :

À rédiger!

CQFD

📌 PROPRIÉTÉ 3.2 : Triangles semblables et angles

(Admise)

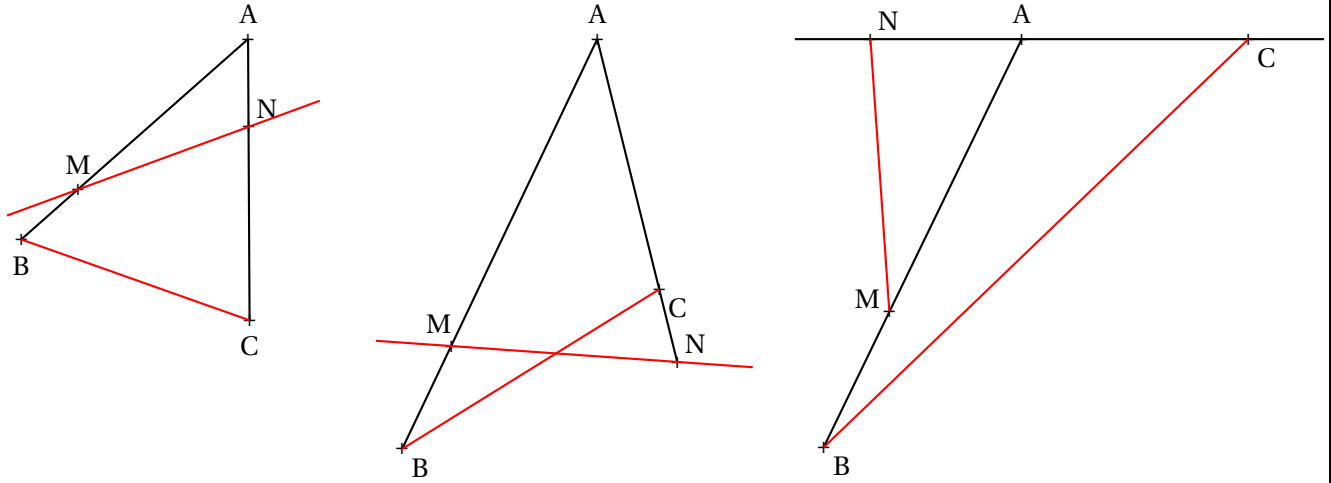
Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles égaux.

📌 DÉMONSTRATION :

À rédiger!

✿ EXERCICES ✿

EXERCICE N° 3.1 : Collection de cas pathologiques



1. Pour chacune des figures suivantes :

— mesurer les longueurs AB, AC, BC, AM, AN et MN ;

— calculer les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$

2. Que constatez-vous pour chaque figure? Quelles explications pouvez-vous donner?

3. Corriger chacune des figures en déterminant une nouvelle position pour le point N.

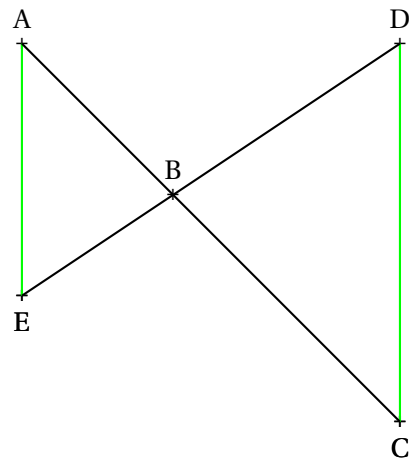
EXERCICE N° 3.2 : Un cas singulier



Sur la figure ci-après, les droites (AC) et (DE) sont sécantes en B.

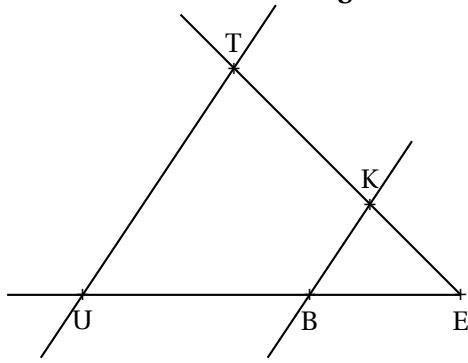
On sait que :

- BA = 55 m
- BC = 89 m
- BE = 34 m
- BD = 55 m



Les droites (AE) et (DC) sont-elles parallèles?

EXERCICE N° 3.3 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

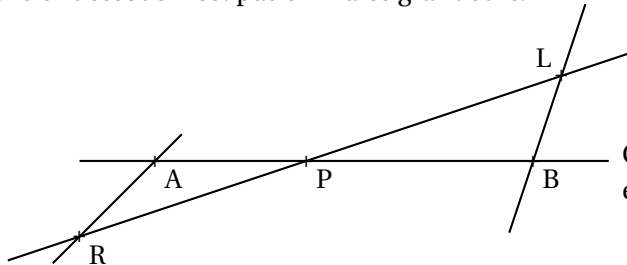
- (TK) et (UB) sont sécantes en E;
- $BE = 5\text{ m}$, $UE = 12\text{ m}$, $BK = 4\text{ m}$ et $TE = 10\text{ m}$;
- $(UT) // (BK)$

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et, le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

EXERCICE N° 3.4 : Thalès papillon



La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



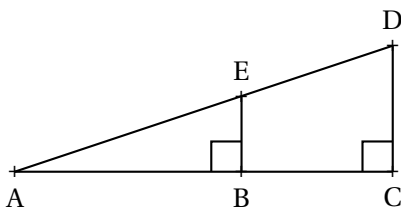
- (AB) et (RL) sont sécantes en P;
- $LB = 2\text{ cm}$, $AR = 3\text{ cm}$, $PB = 1\text{ cm}$ et $PR = 5\text{ cm}$;
- $(AR) // (LB)$

Calculer les valeurs exactes de LP et AP et, le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

EXERCICE N° 3.5 : Thalès ou Pythagore?



La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



- ABE est rectangle en B;
- ACD est rectangle en C;
- $AB = 36\text{ m}$, $AE = 60\text{ m}$, $DC = 72\text{ m}$.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

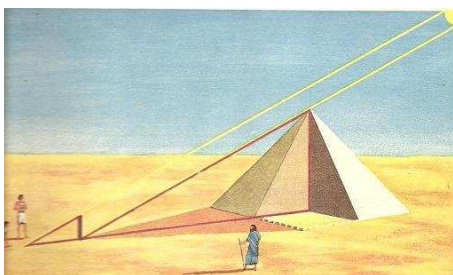
EXERCICE N° 3.6 : La légende de Thalès



La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.

Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :

« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».

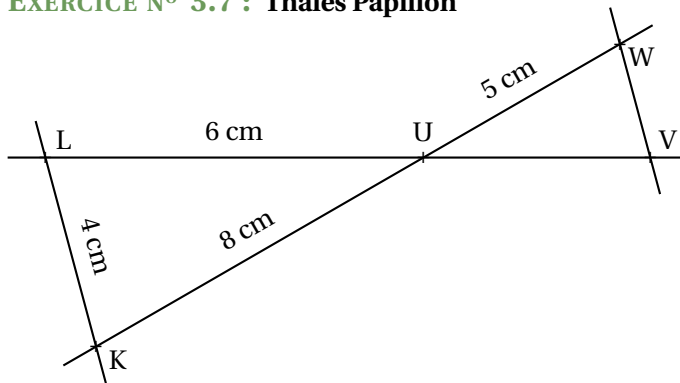


Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

- la canne de Thalès mesurait 3 coudées;
- l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées;
- la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide;
- une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm .

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer?

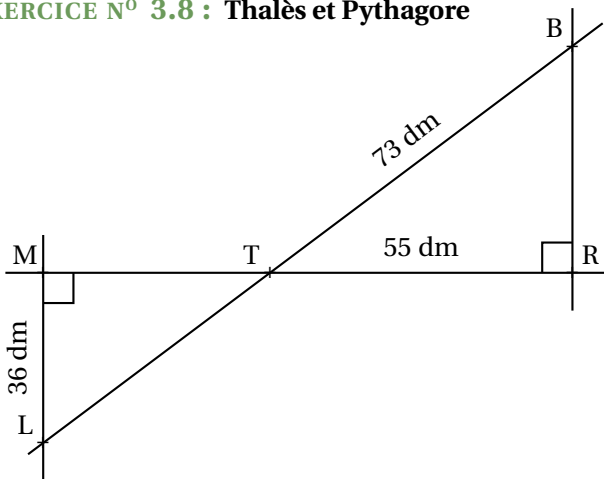
EXERCICE N° 3.7 : Thalès Papillon



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que $(VW) \parallel (LK)$ et que les droites (LV) et (KW) sont sécantes en U.

Donner les valeurs exactes des longueurs UV et WV puis une valeur approchée au dixième près.

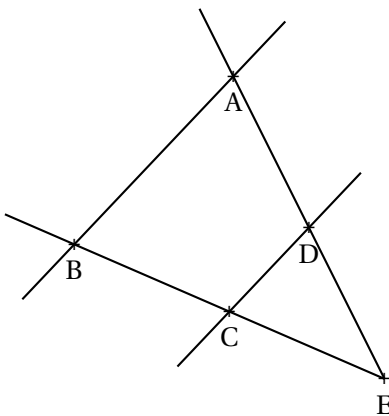
EXERCICE N° 3.8 : Thalès et Pythagore



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on sait que (BL) et (MR) sont sécantes en T et que les droites (BR) et (ML) sont perpendiculaires à la droite (MR) .

Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée au centième près des longueurs : BR puis TM et TL.

EXERCICE N° 3.9 : Parallèle ou pas?

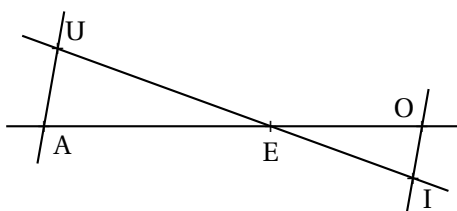


Sur la figure ci-contre on sait que les droites (BC) et (AD) sont sécantes en E de plus on a :

- $EC = 55 \text{ m}$
- $EB = 89 \text{ m}$
- $ED = 34 \text{ m}$
- $EA = 55 \text{ m}$
- $DC = 48 \text{ m}$
- $AB = 77 \text{ m}$

Les droites DC et AB sont-elles parallèles?

EXERCICE N° 3.10 : Parallèle ou pas? — Épisode 2



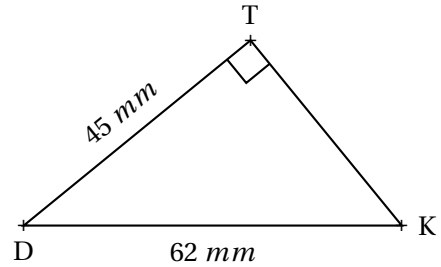
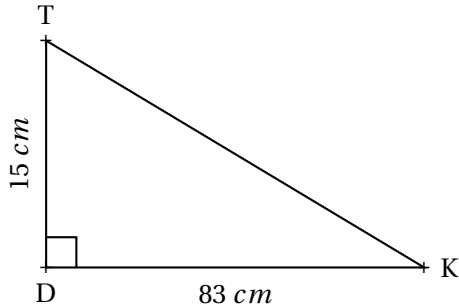
Sur la figure ci-après on sait que les droites (UI) et (AO) sont sécantes en E. De plus :

- $EO = 6 \text{ mm}$
- $EA = 12 \text{ mm}$
- $EI = 8 \text{ mm}$
- $EU = 12 \text{ mm}$

Les droites (OI) et (AU) sont-elles parallèles?

EXERCICE N° 1 : Calculer ✖

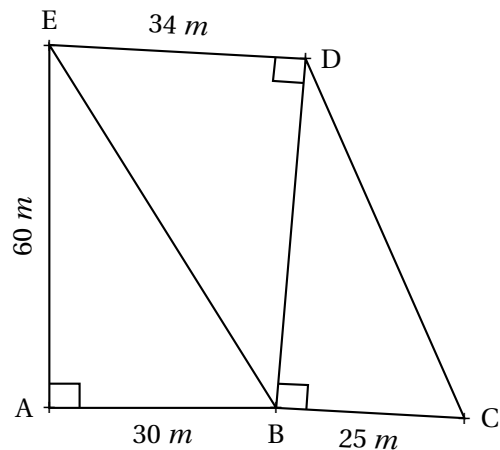
Pour chacune des figures suivantes, (qui ne sont pas reproduites en vraies grandeurs), calculer la valeur exacte de la mesure du côté TK puis donner une valeur approchée au millième près.



EXERCICE N° 2 : Trois à la suite! ✖✖✖

La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs!

Calculer la mesure du segment [CD].



EXERCICE N° 3 : Rectangle ou pas? ✖

Tracer le triangle ZOE tel que $ZO = 48 \text{ mm}$, $ZE = 55 \text{ mm}$ et $OE = 73 \text{ mm}$. ZOE est-il rectangle?

EXERCICE N° 4 : Rectangle ou pas? – Épisode 2 ✖

Tracer le triangle KAE tel que $KE = 36 \text{ mm}$, $KA = 77 \text{ mm}$ et $AE = 84 \text{ mm}$. KAE est-il rectangle?

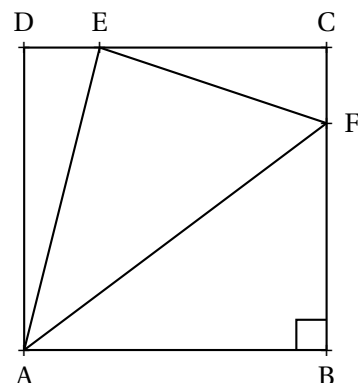
EXERCICE N° 5 : Rectangle ou pas? – Épisode 3 ✖✖✖

Le carré ABCD a des côtés de 4 cm.

$E \in [CD]$ tel que $CE = 3 \text{ cm}$

$F \in [BC]$ tel que $BF = 3 \text{ cm}$

Le triangle AEF est-il rectangle?



Exercice n° 1 :

1. Le triangle DTK est rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DT^2 + DK^2 = TK^2$$

$$15^2 + 83^2 = TK^2$$

$$225 + 6889 = TK^2$$

$$TK^2 = 7114$$

$$TK = \sqrt{7114}$$

$$TK \approx 84,345$$

Au millième près, $TK \approx 84,345 \text{ mm}$

2. Le triangle DTK est rectangle en T.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$TD^2 + TK^2 = DK^2$$

$$45^2 + TK^2 = 62^2$$

$$2025 + TK^2 = 3844$$

$$TK^2 = 3844 - 2025$$

$$TK^2 = 1819$$

$$TK = \sqrt{1819}$$

$$TK \approx 42,65$$

Au millième près, $TK \approx 42,64 \text{ mm}$

Exercice n° 2 :

Dans le triangle ABE rectangle en A.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AE^2 = BE^2$$

$$30^2 + 60^2 = BE^2$$

$$900 + 3600 = BE^2$$

$$BE^2 = 4500$$

$$BE = \sqrt{4500}$$

$$BE \approx 67$$

Dans le triangle EDB rectangle en D.
D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$DE^2 + DB^2 = EB^2$$

$$34^2 + DB^2 = 4500$$

$$1156 + DB^2 = 4500$$

$$DB^2 = 4500 - 1156$$

$$DB^2 = 3344$$

$$DB \approx 58$$

Il est conseillé d'utiliser la valeur exacte de EB^2 obtenue précédemment. Sinon on obtient :

$$DB^2 = 67^2 - 1156 \approx 3333$$

$$DB = \sqrt{3333} \approx 58$$

Dans le triangle DBC rectangle en B

D'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$BD^2 + BC^2 = DC^2$$

$$3344 + 25^2 = DC^2$$

$$DC^2 = 3969$$

$$DC = \sqrt{3969}$$

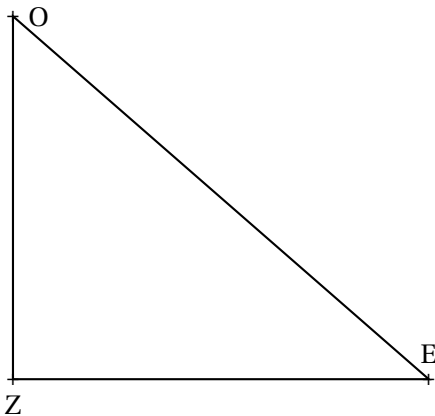
$$DC = 63$$

En valeur approchée on arrive à :

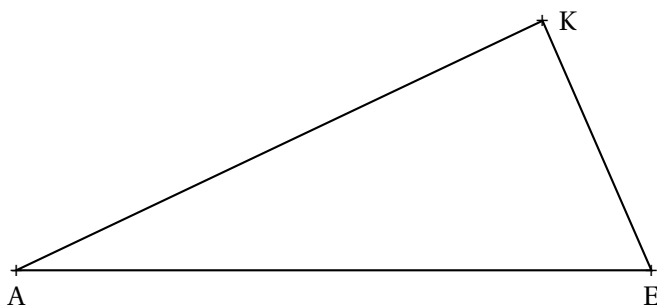
$$DC^2 = 58^2 + 25^2 \approx 3989$$

$$DC \approx 63$$

Exercice n° 3



Exercice n° 4



Comparons OE^2 et $ZO^2 + ZE^2$

$$OE^2 = 73^2 \text{ donc } OE^2 = 5329$$

$$ZO^2 + ZE^2 = 48^2 + 55^2 \text{ donc } ZO^2 + ZE^2 = 5329$$

$$\text{Ainsi } ZO^2 + ZE^2 = OE^2,$$

D'après **la réciproque du théorème de Pythagore** le triangle ZOE est rectangle en Z.

Comparons AE^2 et $KA^2 + KE^2$

$$AE^2 = 84^2 \text{ donc } AE^2 = 7056$$

$$KA^2 + KE^2 = 77^2 + 36^2 \text{ donc } KA^2 + KE^2 = 7225$$

$$\text{Ainsi } KA^2 + KE^2 \neq AE^2,$$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle KAE n'est pas rectangle.

Exercice n° 5

Calculons AE.

Dans le triangle ADE rectangle en D.

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$

$$4^2 + 1^2 = AE^2$$

$$16 + 1 = AE^2$$

$$AE^2 = 17$$

$$AE = \sqrt{17}$$

Calculons EF.

Dans le triangle ECF rectangle en C.

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$CE^2 + CF^2 = EF^2$$

$$3^2 + 1^2 = EF^2$$

$$9 + 1 = EF^2$$

$$EF^2 = 10$$

$$EF = \sqrt{10}$$

Calculons AF

Dans le triangle ABF rectangle en B.

D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$

$$4^2 + 3^2 = AF^2$$

$$16 + 9 = AF^2$$

$$AF^2 = 25$$

$$AF = 5$$

Comparons AF^2 et $EA^2 + EF^2$

$$AF^2 = 5^2 = 25$$

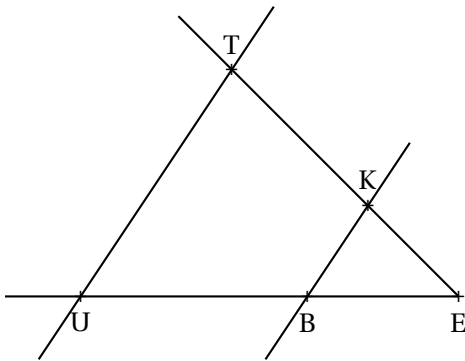
$$EA^2 + EF^2 = 17 + 10 = 27$$

Comme $EA^2 + EF^2 \neq AF^2$ d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle AEF n'est pas rectangle.



🌀 RÉACTIVATION — Thalès dans un triangle 🌀

EXERCICE N° 1 : Thalès triangle



Sur la figure qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

- (TK) et (UB) sont sécantes en E;
- $BE = 5\text{ m}$, $UE = 12\text{ m}$, $BK = 4\text{ m}$ et $TE = 10\text{ m}$;
- $(UT) \parallel (BK)$

Calculer les valeurs exactes de UT et KE et, le cas échéant, une valeur approchée au centimètre près.

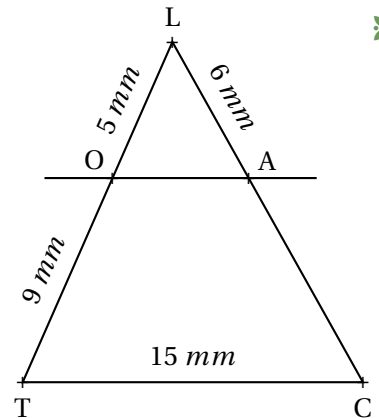
EXERCICE N° 2 : Thalès triangle — Épisode 2



Sur la figure ci-après qui n'est pas en vraies grandeurs nous avons :

- les points L, O et T sont alignés;
- les points L, A et C sont alignés;
- les droites (OA) et (TC) sont parallèles.

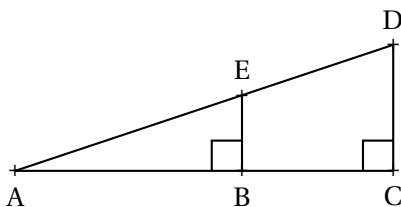
Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millième près des longueurs OA et AC.



EXERCICE N° 3 : Thalès ou Pythagore?



La figure ci-dessous n'est pas en vraies grandeurs.



- ABE est rectangle en B;
- ACD est rectangle en C;
- $AB = 36\text{ m}$, $AE = 60\text{ m}$, $DC = 72\text{ m}$.

Calculer les valeurs exactes de EB, BC et ED

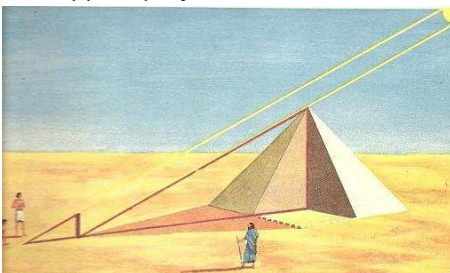
EXERCICE N° 4 : La légende de Thalès



La légende raconte que Thalès de Milet (-626 – -547 avant notre ère) aurait été invité par le pharaon Ahmôsis vers -560 pour honorer sa grande réputation de scientifique. Le pharaon déclara devant Thalès ne pas connaître la hauteur exacte de la grande pyramide de Khéops construite presque deux mille ans auparavant.

Thalès planta alors sa canne en plein soleil et affirma :

« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre et le même que celui de la pyramide avec la sienne. ».

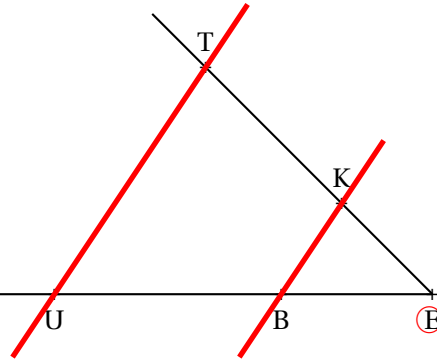


Voici quelques informations numériques (fictives) sur cette histoire (légendaire)...

- la canne de Thalès mesurait 3 coudées;
- l'ombre de la canne au sol mesurait 5 coudées;
- la canne se situait exactement à 465 coudées du centre de la pyramide;
- une coudée à cette époque mesurait environ 52 cm.

Quelle mesure de la hauteur de la pyramide Thalès a-t-il réussi à effectuer?

Exercice n° 1 :



Dans le triangle EUT, $B \in [UE]$ et $K \in [TE]$
 Les droites (KB) et (TU) sont parallèles.
 D'après **le théorème de Thalès** on a :

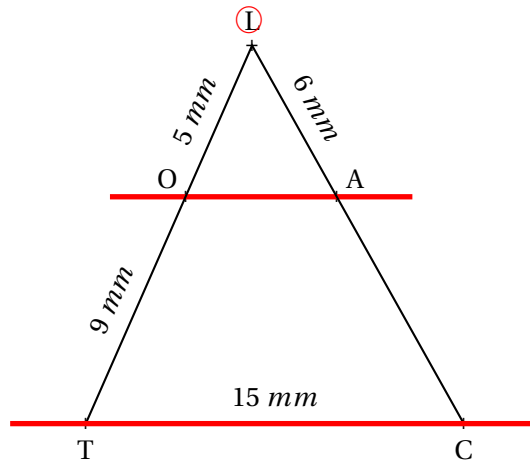
$$\frac{EB}{EU} = \frac{EK}{ET} = \frac{BK}{UT}$$

$$\frac{5 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{EK}{10 \text{ m}} = \frac{4 \text{ m}}{UT}$$

Comme $\frac{5 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{EK}{10 \text{ m}}$ donc $EK = \frac{10 \text{ m} \times 5 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{50}{12} \text{ m} \approx 4,17 \text{ m}$ à 1 cm près.

Comme $\frac{5 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{4 \text{ m}}{UT}$ donc $UT = \frac{4 \text{ m} \times 12 \text{ m}}{5 \text{ m}} = \frac{48}{5} \text{ m} = 9,6 \text{ m}$

Exercice n° 2 :



Les droites (OT) et (AC) sont sécantes en L, les droites (OA) et (TC) sont parallèles,
 D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LO}{LT} = \frac{LA}{LC} = \frac{OA}{TC}$$

$$\frac{5 \text{ mm}}{5 \text{ mm} + 9 \text{ mm}} = \frac{6 \text{ mm}}{LC} = \frac{OA}{15 \text{ mm}}$$

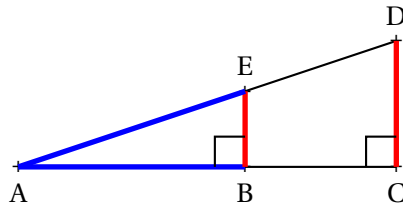
$$\frac{5 \text{ mm}}{14 \text{ mm}} = \frac{6 \text{ mm}}{LC} = \frac{OA}{15 \text{ mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$LC = \frac{6 \text{ mm} \times 14 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \text{ d'où } LC = \frac{84 \text{ mm}^2}{5 \text{ mm}} \text{ et } LC = 16,8 \text{ mm}$$

$$OA = \frac{15 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}}{14 \text{ mm}} \text{ d'où } OA = \frac{75 \text{ mm}^2}{14 \text{ mm}} \text{ et } OA \approx 5,357 \text{ mm}$$

Exercice n° 3



Dans le triangle rectangle ABE on connaît deux mesures sur trois : on peut donc utiliser le théorème de Pythagore.

Dans le triangle ABE rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BE^2 = AE^2$$

$$36^2 + BE^2 = 60^2$$

$$1296 + BE^2 = 3600$$

$$BE^2 = 3600 - 1296$$

$$BE^2 = 2304$$

$$BE = \sqrt{2304}$$

$$BE = 48$$

Pour calculer BC il faut calculer AC car $BC = AC - AB$. Pareil pour ED il faut d'abord calculer AD.

$(EB) \perp (AC)$ et $(DC) \perp (AC)$

On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(EB) \parallel (DC)$

Dans le triangle ADC, $B \in [AC]$ et $E \in [AD]$,
Les droites (EB) et (DC) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{36 \text{ m}}{AC} = \frac{60 \text{ m}}{AD} = \frac{48 \text{ m}}{72 \text{ m}}$$

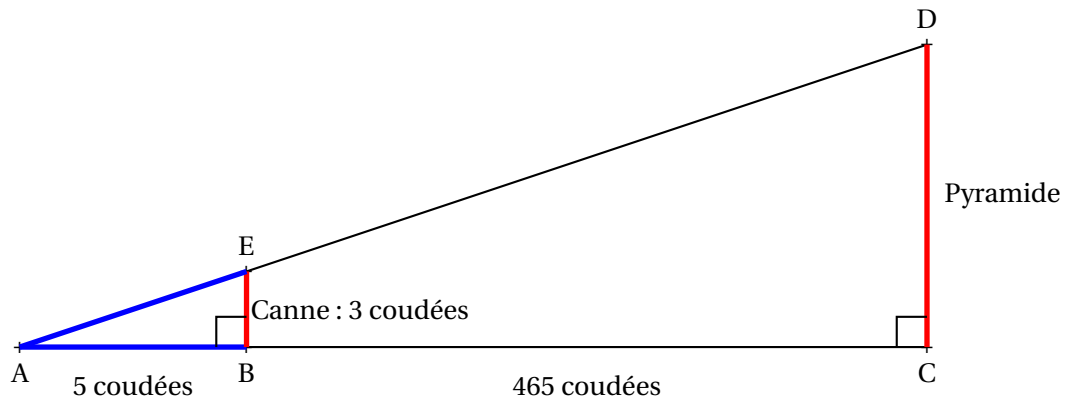
Comme $\frac{36 \text{ m}}{AC} = \frac{48 \text{ m}}{72 \text{ m}}$ on a $AC = \frac{36 \text{ m} \times 72 \text{ m}}{48 \text{ m}} = \frac{2592}{48} \text{ m} = 54 \text{ m}$.

Comme $\frac{60 \text{ m}}{AD} = \frac{48 \text{ m}}{72 \text{ m}}$ on a $AD = \frac{60 \text{ m} \times 72 \text{ m}}{48 \text{ m}} = \frac{4320}{48} \text{ m} = 90 \text{ m}$.

Donc $BC = AC - AB = 54 \text{ m} - 36 \text{ m} = \boxed{18 \text{ m}}$ et $ED = AD - AE = 90 \text{ m} - 60 \text{ m} = \boxed{30 \text{ m}}$.

Exercice n° 4

Il faut modéliser la situation en faisant un schéma!



Comme la canne et la pyramide sont perpendiculaires au sol, on peut dire que la canne et la pyramide sont parallèles.

Dans le triangle ACD, $B \in [AC]$ et $E \in [AD]$ et $(EB) \parallel (DC)$,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

$$\frac{5}{5 + 465} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{CD}$$

Donc $\frac{3}{CD} = \frac{5}{470}$ donc $CD = \frac{3 \times 470}{5} = \frac{1410}{5} = 282$

Or une coudée mesure 52 cm. La pyramide mesure donc $282 \times 52 \text{ cm} = 14664 \text{ cm} = \boxed{146,64 \text{ m}}$

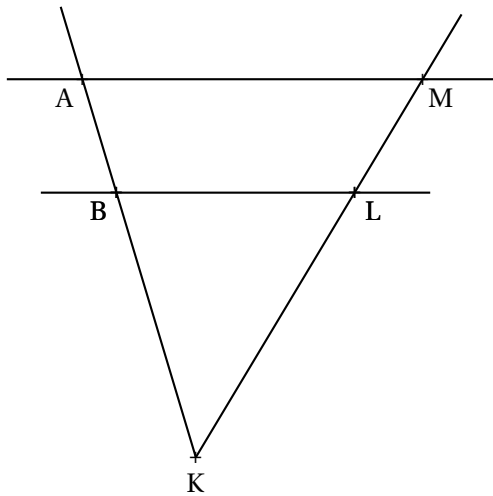
NOM :

PRÉNOM :

CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



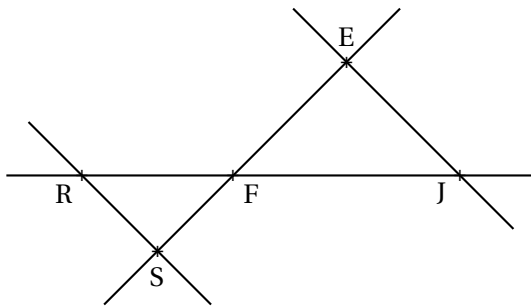
Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- $(AM) // (BL)$;
- (AB) et (ML) sont sécantes en K ;
- $BL = 5 \text{ cm}$, $AM = 9 \text{ cm}$, $KL = 3 \text{ cm}$ et $KA = 8 \text{ cm}$.

Calculer les valeurs exactes des longueurs KB et KM puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- $(RS) // (EJ)$;
- (RJ) et (SE) sont sécantes en F ;
- $FJ = 10 \text{ m}$, $RF = 7 \text{ m}$, $EJ = 12 \text{ m}$ et $FS = 5 \text{ m}$.

Calculer les valeurs exactes des longueurs FE et RS puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

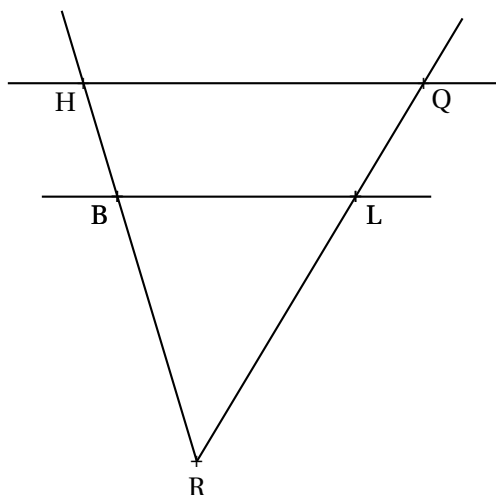
NOM :

PRÉNOM :

CLASSE :

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



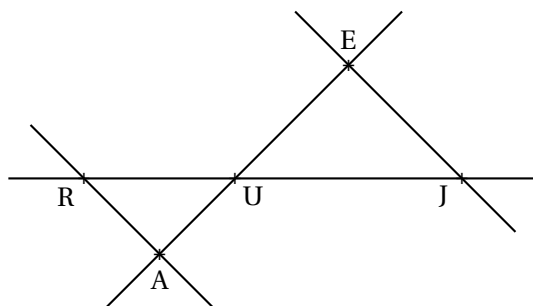
Rédigez ci-dessous votre raisonnement

Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- $(HQ) \parallel (BL)$;
- (HB) et (QL) sont sécantes en R ;
- $BL = 7 \text{ cm}$, $HQ = 9 \text{ cm}$, $RL = 3 \text{ cm}$ et $RH = 10 \text{ cm}$.

Calculer les valeurs exactes des longueurs RB et RQ puis en donner une valeur approchée au millimètre près.

Exercice 2



Rédigez ci-dessous votre raisonnement

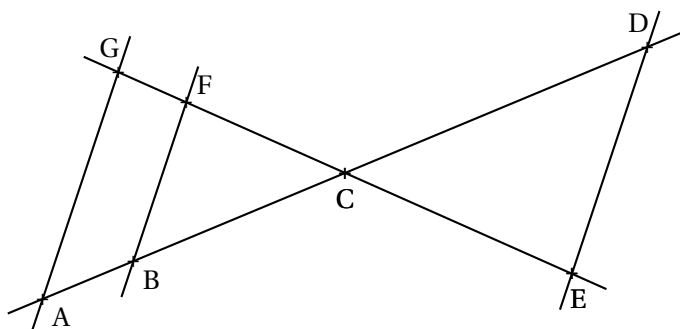
Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs,

- $(RA) \parallel (EJ)$;
- (RJ) et (AE) sont sécantes en U ;
- $UJ = 10 \text{ m}$, $RU = 7 \text{ m}$, $EJ = 12 \text{ m}$ et $UA = 5 \text{ m}$.

Calculer les valeurs exactes des longueurs UE et RA puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

Interrogation de mathématiques

Exercice 1



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs nous savons que :

- Les droites (AD) et (GE) sont sécantes en C;
- $B \in (AD)$ et $F \in (GE)$;
- $(BF) \parallel (ED)$
- $FC = 51 \text{ mm}$, $GF = 18 \text{ mm}$, $BF = 68 \text{ mm}$;
- $BC = 85 \text{ mm}$, $AB = 30 \text{ mm}$, $CD = 135 \text{ mm}$.

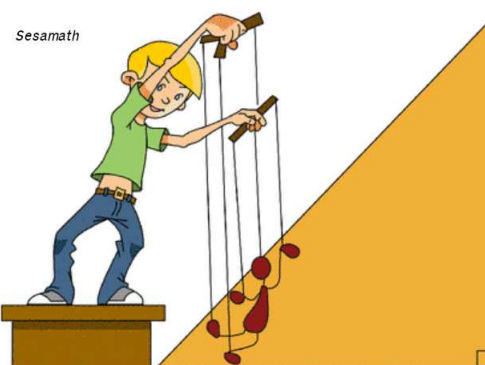
1. Calculer DE et CE.
2. Démontrer que les droites (FB) et (GA) sont parallèles.
3. En utilisant la question 3., calculer GA.
4. Les droites (FC) et (FB) sont-elles perpendiculaires?
5. Démontrer en utilisant la question 4. que le triangle CDE est rectangle.

Exercice 2

Julien prépare un spectacle de marionnettes et d'ombres chinoises.

Son écran mesure 2 m et sa marionnette 24 cm . Debout sur son estrade, il positionne sa marionnette à 30 cm de la lumière.

À quelle distance de la source de lumière doit-il placer l'écran pour que agrandir la marionnette au maximum?



Toutes les traces de recherches seront valorisées.

Exercice 3

Voici trois fonctions :

$$f : x \rightarrow 6x - 8$$

$$g : x \rightarrow 10 - 3x$$

$$h : x \rightarrow x^2 + 3x - 28$$

1. Calculer $f(4)$, $g(-2)$ et $h(-1)$.
2. Calculer l'antécédent de 5 par f .
3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| 1 | x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | $f(x)$ | -38 | -32 | -26 | -20 | -14 | -8 | -2 | 4 | 10 | 16 | 22 |
| 3 | $g(x)$ | 25 | 22 | 19 | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | -2 | -5 |
| 4 | $h(x)$ | -18 | -24 | -28 | -30 | -30 | -28 | -24 | -18 | -10 | 0 | 12 |

4. Déterminer sans justification les antécédents de -28 par h .
5. Déterminer sans justification l'image de 4 par h .
6. Quelle formule a été écrite dans la cellule B4 puis recopiée vers la droite.

Correction

Exercice 1

1. Les droites (FE) et (BD) sont sécantes en C. Les droites (BF) et (ED) sont parallèles.

D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{FB}{DE}$$

$$\frac{51 \text{ mm}}{CE} = \frac{85 \text{ mm}}{135 \text{ mm}} = \frac{68 \text{ mm}}{DE}$$

$$CE = \frac{51 \text{ mm} \times 135 \text{ mm}}{85 \text{ mm}} = \frac{6885}{85} \text{ mm} = 81 \text{ mm} \text{ et } DE = \frac{68 \text{ mm} \times 135 \text{ mm}}{85 \text{ mm}} = \frac{9180}{85} \text{ mm} = 108 \text{ mm}$$

2. Comparons $\frac{CF}{CG}$ et $\frac{CB}{CA}$

$$\frac{CF}{CG} = \frac{51 \text{ mm}}{51 \text{ mm} + 18 \text{ mm}} = \frac{51}{69} \text{ et } \frac{CB}{CA} = \frac{85 \text{ mm}}{85 \text{ mm} + 30 \text{ mm}} = \frac{85}{115}$$

Il y a trois méthodes pour vérifier si ces fractions sont égales :

| Valeurs approchées | Simplification | Les produits en croix |
|--|--|---|
| $\frac{51}{69} \approx 0,739$ à 0,001 près. | $\frac{51}{69} = \frac{3 \times 17}{3 \times 23} = \frac{17}{23}$ | $51 \times 115 = 5865$ $69 \times 85 = 5865$ |
| $\frac{85}{115} \approx 0,739$ à 0,001 près. | $\frac{85}{115} = \frac{5 \times 17}{5 \times 23} = \frac{17}{23}$ | |

Ainsi $\frac{CF}{CG} = \frac{CB}{CA}$. Comme les points C, F et G sont alignés et dans le même ordre que les points alignés C, B et A.

D'après le **réci-proque du théorème de Thalès** les droites (FB) et (GA) sont parallèles.

3. Les droites (FG) et (BA) sont sécantes en C. Les droites (FB) et (GA) sont parallèles.

D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CF}{CG} = \frac{CB}{CA} = \frac{BF}{GA}$$

$$\frac{51}{69} = \frac{85}{115} = \frac{68 \text{ mm}}{GA}$$

$$\text{Donc } GA = \frac{68 \text{ mm} \times 69}{51} = \frac{4692}{51} = 92 \text{ mm}$$

4. Nous allons démontrer que le triangle BFC est rectangle.

$$\begin{aligned} FC^2 + FB^2 &= 51^2 + 68^2 & BC^2 &= 85^2 \\ FC^2 + FB^2 &= 2601 + 4624 & BC^2 &= 7225 \\ FC^2 + FB^2 &= 7225 \end{aligned}$$

Comme $FC^2 + FB^2 = BC^2$ d'après le **réci-proque du théorème de Pythagore**, le triangle FBC est rectangle en F.

Les droites (FC) et (FB) sont donc perpendiculaires.

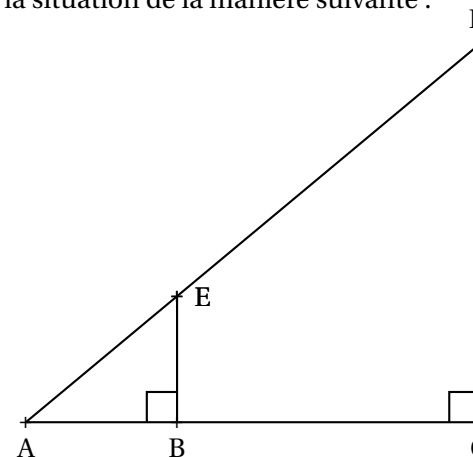
5. On sait que (DE) // (FB) et aussi que (FB) \perp (FE)

Or **si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**

Ainsi (DE) \perp (CE) et le triangle CED est rectangle en E.

Exercice 2

On peut modéliser la situation de la manière suivante :



Comme la marionnette et l'écran sont en position verticale, on peut raisonnablement dire que $(CD) \parallel (BE)$

Les droites (BC) et (ED) sont sécantes en A .

D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

$$\frac{30 \text{ cm}}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{24 \text{ cm}}{2 \text{ m}}$$

$$\text{Donc } AC = \frac{30 \text{ cm} \times 2 \text{ m}}{24 \text{ cm}} = \frac{30 \text{ cm} \times 200 \text{ cm}}{24 \text{ cm}} = \frac{6000 \text{ cm}}{24 \text{ cm}} = 250 \text{ cm} = 2,5 \text{ m}$$

Il doit placer l'écran à $2,50 \text{ m}$ de la lumière.

Exercice 3

1. $f(4) = 6 \times 4 - 8 = 24 - 8 = 16$

$$g(-2) = 10 - 3 \times (-2) = 10 + 6 = 16$$

$$h(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) - 28 = 1 - 3 - 28 = -30$$

2. Il faut résoudre $f(x) = 5$

$$6x - 8 = 5$$

$$6x - 8 + 8 = 5 + 8$$

$$6x = 13$$

$$x = \frac{13}{6}$$

3.

$$f(x) = g(x)$$

$$6x - 8 = 10 - 3x$$

$$6x - 8 + 8 = 10 - 3x + 8$$

$$6x = 18 - 3x$$

$$6x + 3x = 10 - 3x + 3x$$

$$9x = 10$$

$$x = \frac{10}{9}$$

4. Dans le tableau on lit que -3 et 0 sont des antécédents de -28 par h .

5. Dans le tableau on lit que l'image de 4 par h est 0 .

6. Dans la cellule B4 il faut écrire $= B4 * B4 + 3 * B4 - 28$ ou $= B4^2 + 3 * B4 - 28$ ou $= B4^2 + 3 * B4 - 28$



Évaluation de mathématiques



Exercice 1

(6 points)

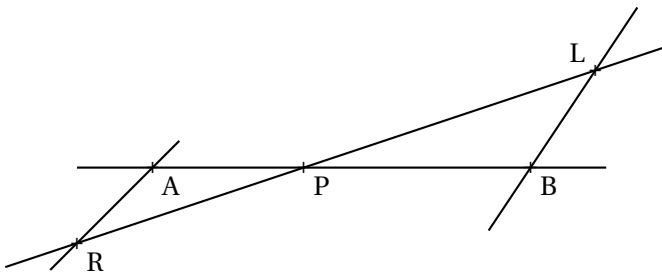
On pose :

- $f(x) = (x-4)(-6x-2)$;
- $g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$;
- $h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$

Montrer en développant que $f(x) = g(x) = h(x)$

Exercice 2

(4 points)



La figure ci-après n'est pas en vraies grandeurs.

On sait que :

- (AB) et (RL) sont sécantes en P;
- $LB = 4\text{ m}$, $PR = 5\text{ m}$, $PB = 5\text{ m}$ et $PA = 3\text{ m}$;
- $(AR) \parallel (LB)$

Calculer les valeurs exactes de LP et AR, et le cas échéant, une valeur approchée au millimètre près.

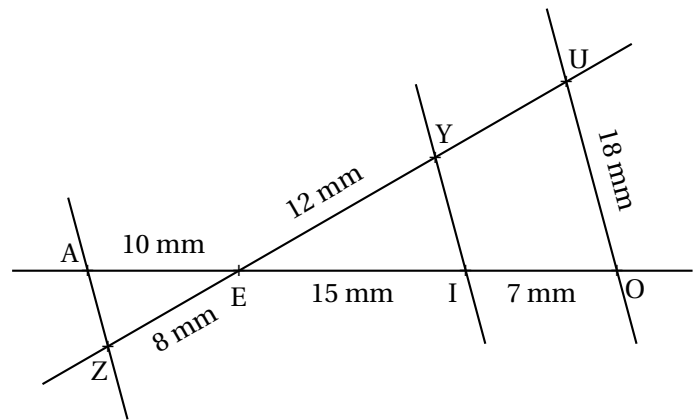
Exercice 3

(6 points)

La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur.

1. On sait que les droites (UY) et (IO) sont sécantes en E et que les droites (YI) et (UO) sont parallèles.

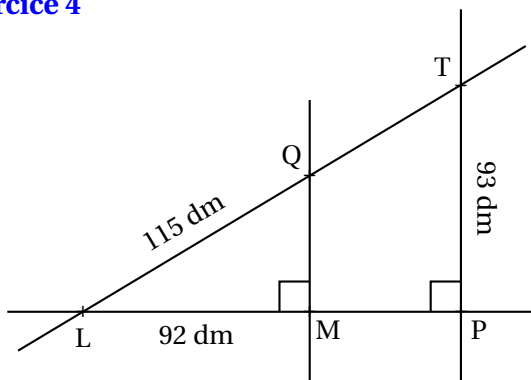
Calculer la valeur exacte de EU et YI puis une valeur approchée au dixième près.



2. Les droites (AZ) et (YI) sont-elles parallèles?

Exercice 4

(4 points)



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur on sait que :

- Le triangle LMQ est rectangle en M;
- Le triangle LPT est rectangle en P;
- Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L.

1. Calculer QM

2. En admettant que $QM = 69\text{ dm}$, calculer LT et LP.

**Exercice 1**

$$f(x) = (x-4)(-6x-2)$$

$$f(x) = -6x^2 - 2x + 24x + 8$$

$$f(x) = -6x^2 + 22x + 8$$

$$g(x) = 8 + 2x(7-3x) + 8x$$

$$g(x) = 8 + 14x - 6x^2 + 8x$$

$$g(x) = -6x^2 + 22x + 8$$

$$h(x) = (x-4)(x+3) + (x-4)(-5-7x)$$

$$h(x) = x^2 + 3x - 4x - 12 - 5x - 7x^2 + 20 + 28x$$

$$h(x) = -6x^2 + 22x + 8$$

Exercice 2

Les droites (LR) et (AB) sont sécantes en P, les droites (AR) et (LB) sont parallèles, D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PL}{PR} = \frac{BL}{AR}$$

$$\frac{5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \frac{PL}{5 \text{ m}} = \frac{4 \text{ m}}{AR}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$PL = \frac{5 \text{ m} \times 5 \text{ m}}{3 \text{ m}} \text{ d'où } PL = \frac{25 \text{ m}^2}{3 \text{ m}} \text{ et } PL \approx 8,333 \text{ m}$$

$$AR = \frac{4 \text{ m} \times 3 \text{ m}}{5 \text{ m}} \text{ d'où } AR = \frac{12 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} \text{ et } AR = 2,4 \text{ m}$$

$$PL \approx 8,333 \text{ m et } AR = 2,4 \text{ m}$$

Exercice 3

1. Les droites (YU) et (IO) sont sécantes en E, les droites (YI) et (UO) sont parallèles, D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{EY}{EU} = \frac{EI}{EO} = \frac{YI}{UO}$$

$$\frac{12 \text{ mm}}{EU} = \frac{15 \text{ mm}}{15 \text{ mm} + 7 \text{ mm}} = \frac{YI}{18 \text{ mm}}$$

$$\frac{12 \text{ mm}}{EU} = \frac{15 \text{ mm}}{22 \text{ mm}} = \frac{YI}{18 \text{ mm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$$EU = \frac{12 \text{ mm} \times 22 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} \text{ d'où } EU = \frac{264 \text{ mm}^2}{15 \text{ mm}} \text{ et } EU = 17,6 \text{ mm}$$

$$YI = \frac{15 \text{ mm} \times 18 \text{ mm}}{22 \text{ mm}} \text{ d'où } YI = \frac{270 \text{ mm}^2}{22 \text{ mm}} \text{ et } YI \approx 12,3 \text{ mm}$$

$$EU = 17,6 \text{ mm et } YI \approx 12,3 \text{ mm}$$

2. Comparons $\frac{EI}{EA}$ et $\frac{EY}{EZ}$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{15 \text{ mm}}{10 \text{ mm}}$$

$$\frac{EY}{EZ} = \frac{12 \text{ mm}}{8 \text{ mm}}$$

$$\frac{EI}{EA} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{EY}{EZ} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Comme $\frac{EY}{EZ} = \frac{EI}{EA}$ et comme les points E, I et A sont alignés et dans le même ordre que les points E, Y et Z, d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (YI) et (AZ) sont parallèles.

(YI) // (AZ)

Exercice 4

1. Dans le triangle LMQ rectangle en M,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$ML^2 + MQ^2 = LQ^2$$

$$92^2 + MQ^2 = 115^2$$

$$8464 + MQ^2 = 13225$$

$$MQ^2 = 13225 - 8464$$

$$MQ^2 = 4761$$

$$MQ = \sqrt{4761}$$

$$MQ = 69$$

MQ = 69 mm

2. Les droites (QM) et (TP) sont perpendiculaires à la droite (LP).
Or on sait que **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles**.

Ainsi (QM) // (TP)

Les droites (QT) et (MP) sont sécantes en L, les droites (QM) et (TP) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{LQ}{LT} = \frac{LM}{LP} = \frac{QM}{TP}$$

$$\frac{115 \text{ dm}}{LT} = \frac{92 \text{ dm}}{LP} = \frac{69 \text{ dm}}{93 \text{ dm}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

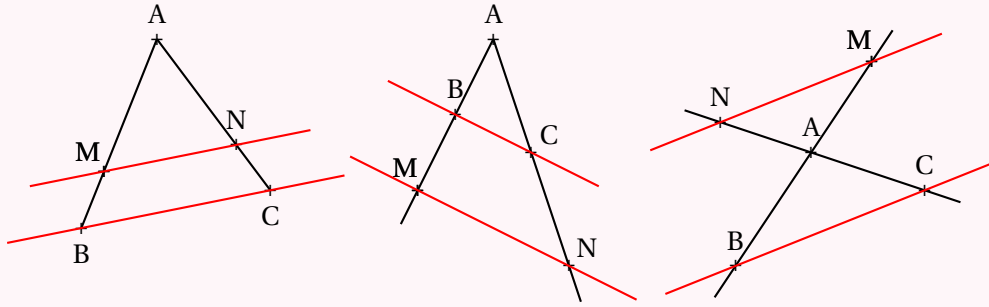
$$LT = \frac{115 \text{ dm} \times 93 \text{ dm}}{69 \text{ dm}} \text{ d'où } LT = \frac{10695 \text{ dm}^2}{69 \text{ dm}} \text{ et } LT = 155 \text{ dm}$$

$$LP = \frac{93 \text{ dm} \times 92 \text{ dm}}{69 \text{ dm}} \text{ d'où } LP = \frac{8556 \text{ dm}^2}{69 \text{ dm}} \text{ et } LP = 124 \text{ dm}$$

LE THÉORÈME DE THALÈS

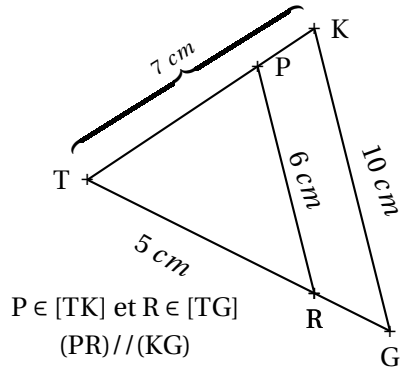


LE THÉORÈME DE THALÈS



Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si $(MN) \parallel (BC)$
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles c'est-à-dire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Calculer TG et TP.

Les droites (PK) et (RG) sont sécantes en T.
Les droites (PR) et (KG) sont parallèles.
D'après le **théorème de Thalès** on a :

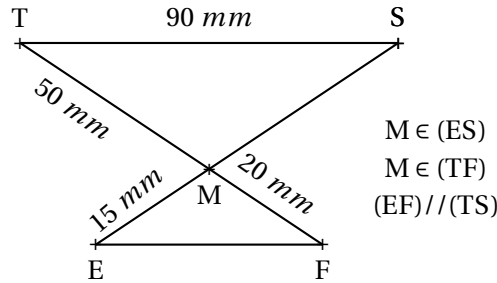
$$\frac{TP}{TK} = \frac{TR}{TG} = \frac{PR}{KG}$$

$$\frac{TP}{7 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{TG} = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$

On utilise la règle de trois :

$$TP = \frac{7 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 4,2 \text{ cm}$$

$$TG = \frac{5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \approx 8,3 \text{ cm}$$



Calculer MS et EF.

Les droites (ES) et (TF) sont sécantes en M.
Les droites (EF) et (TS) sont parallèles.
D'après le **théorème de Thalès** on a :

$$\frac{ME}{MS} = \frac{MF}{MT} = \frac{EF}{ST}$$

$$\frac{15 \text{ mm}}{MS} = \frac{20 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = \frac{EF}{90 \text{ mm}}$$

On utilise la règle de trois :

$$MS = \frac{50 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 37,5 \text{ mm}$$

$$EF = \frac{90 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 36 \text{ mm}$$

CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME DE THALÈS

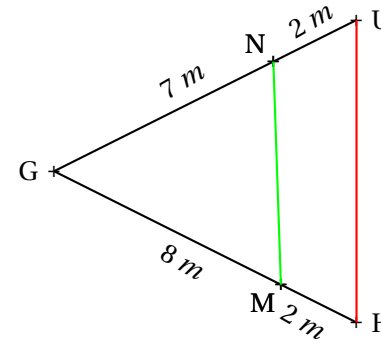
Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A avec A, B et M dans le même ordre que A, C et N et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



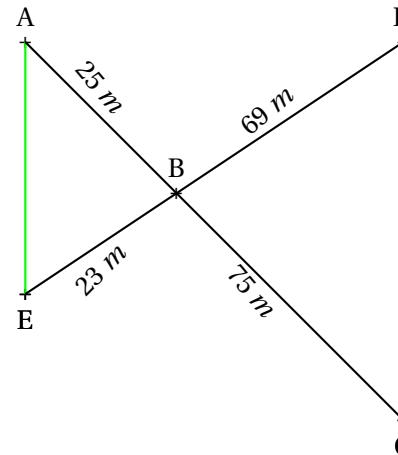
(NM) et (HU) sont-elles parallèles?

Comparons $\frac{GN}{GU}$ et $\frac{GM}{GH}$

$$\frac{GN}{GU} = \frac{7 \text{ m}}{9 \text{ m}} \approx 0,78$$

$$\frac{GM}{GH} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 0,8$$

Comme $\frac{GN}{GU} \neq \frac{GM}{GH}$ d'après le **contraposée du théorème de Thalès**, les droites (NM) et (HU) sont sécantes.



(AE) et (DC) sont-elles parallèles?

Comparons $\frac{BA}{BC}$ et $\frac{BE}{BD}$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{25 \text{ m}}{75 \text{ m}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{23 \text{ m}}{69 \text{ m}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Comme $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD}$ et comme les points B, A et C sont alignés et dans le même ordre que les points alignés B, E et D.

D'après le **réci-proque du théorème de Thalès** les droites (AE) et (DC) sont parallèles.